

1^η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Σειρές και Μετασχηματισμός Fourier, Χαρακτηριστικά Σημάτων, Τυχαίες Μεταβλητές

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 [Σειρές Fourier]

Let $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^N$ be an orthogonal set of N signals; i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(t)\phi_j^*(t) dt = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq N$$

and let $x(t)$ be an arbitrary signal. Let $\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(t)$ be a linear approximation of $x(t)$ in terms of $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^N$. We are interested in finding α_i 's such that

$$\epsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt$$

is minimized.

1. Show that the minimizing α_i 's satisfy

$$\alpha_i = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi_i^*(t) dt$$

2. Show that with the above choice of α_i 's we have

$$\epsilon_{\min}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 [Μετασχηματισμός Fourier]

Αποδείξτε ότι $F\{x(t) * y(t)\} = F\{x(t)\} \times F\{y(t)\}$ (όπου $*$ δείχνει τη συνέλιξη δύο σημάτων) και ότι $F\{x(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} F\{x(t)\}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3 [Ισχύς και αυτό-συσχέτιση]

ΝΑ υπολογιστεί η συνάρτηση αυτο-συσχέτισης για το σήμα $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ ως συνάρτηση της περιόδου $T_0 = 1/f_0$. Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του παραπάνω σήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4 [Φασματική πυκνότητα ισχύος και ισχύς]

Έστω $S(f) = 10^{-6} f^2$ η φασματική πυκνότητα ισχύος ενός σήματος, για $0 \leq f \leq 10\text{KHz}$.
 Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος που περιέχεται μεταξύ των συχνοτήτων 0 και 10KHz και μεταξύ 5 και 6KHz.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5 [Σήματα ενέργειας και σήματα ισχύος]

Using the definition of power-type and energy-type signals,

1. Show that $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$ is a power-type signal and its power content is A^2 .
2. Show that the unit step signal $u_{-1}(t)$ (the unit step function) is a power-type signal and find its power content.
3. Show that the signal

$$x(t) = \begin{cases} Kt^{-1/2} & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

is neither an energy- nor a power-type signal.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6 [Πιθανότητες]

Έστω Y μια τυχαία μεταβλητή με θετικές τιμές, δηλ. $f_Y(y) = 0, y < 0$.

(α) Έστω $a > 0$. Να δειχτεί η ανισότητα Markov, $P(Y > a) \leq \frac{E[Y]}{a}$

(β) Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με διασπορά σ^2 . Έστω η τυχαία μεταβλητή $Y = (X - E[X])^2$ και έστω $a = \varepsilon^2$ για κάποιο ε . Αποδείξτε την ανισότητα Chebyshev,

$$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7 [Γκαουσιανή Τ.Μ]

The noise voltage in an electric circuit can be modeled as a Gaussian random variable with mean equal to zero and variance equal to 10^{-4} .

1. What is the probability that the value of the noise exceeds 10^{-4} ? What is the probability that it exceeds 4×10^{-4} ? What is the probability that the noise value is between -2×10^{-4} and 10^{-4} ?
2. Given that the value of the noise is positive, what is the probability that it exceeds 10^{-4} ?
3. This noise passes through a half-wave rectifier with characteristics

$$R(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Find the PDF of the rectified noise by first finding its CDF. Why can we not use the general expression in Equation (4.1.10) here?

4. Find the expected value of the rectified noise in the previous part.