18 Ιουνίου 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΟΛΟΓΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ
Διδάσκων/Εισηγητής: Γιάννης Χατζάρας

ΕΞΕΤΑΣΗ Ιουνίου στο ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΘΕΜΑΤΑ – Ενδεικτικές Απαντήσεις

__ΘΕΜΑ 1__. i) Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$. (Μον 1)

ii) Βρείτε τη παράγωγο της $f(x,y,z)=xyz$ στο σημείο $P(1,1,1)$ κατά τη διεύθυνση της κλίσης της f στο P. (Μον 0,75)

iii) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ με τη συνθήκη $x+y+z+1=0$. (*Υπόδ.* Ισχύει ότι $\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^2 \le \dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}$). (Μον 1,25)

Απάντηση

i) Για το διαφορικό ισχύει $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$,όπου $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

ii) Η μοναδιαία κατεύθυνση είναι $\vec{u}=\dfrac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, οπότε $D_u f(P_0)=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$.

iii) Πρόκειται για υπολογισμό ακρότατων της f υπό τη συνθήκη $g(x,y,z)=x+y+z+1=0$.
Υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία από τις σχέσεις (πολλαπλασιαστές Lagrange)Q

$$\nabla f=\lambda\nabla g, \lambda\in\mathbb{R} \text{ και } g(x,y,z)=x+y+z+1=0.$$

Βρίσκουμε $x=y=z=\dfrac{\lambda}{2}$ κι από τη συνθήκη ότι $\lambda=-\dfrac{2}{3}$. Έτσι, το κρίσιμο σημείο είναι $P_0=\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$. Για το είδος του ακρότατου ελέγχω το πρόσημο της διαφοράς

$$f(P)-f(P_0)=x^2+y^2+z^2-\frac{1}{3}=x^2+y^2+z^2-\frac{(-1)^2}{3}=$$
$$=x^2+y^2+z^2-\frac{x+y+z}{3}=x^2+y^2+z^2-3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$
(λόγω της συνθήκης g=0)

Από την υπόδειξη

$$3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \le x^2+y^2+z^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow f(P)-f(P_0)\ge 0.$$

Επομένως, το P_0 είναι σημείο τοπικού ελάχιστου για την *f*.

<u>ΘΕΜΑ 2</u>. Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_R x\,y\,dydx$, όπου *R*, η περιοχή που περικλείεται από τις γραμμές $x = y^2, y^2 = 4 - x, y = 0, x \ge 0, y \ge 0$ (να κάνετε ένα πρόχειρο σχέδιο της περιοχής *R*). (Μον 1,25)

Απάντηση

Έχουμε τη περιοχή *R* να σχηματίζεται από τη τομή δύο παραβολών (πάνω από τον άξονα x'x). Έχουμε

$$I = \iint\limits_R x\,y\,dxdy = \int_0^2 \int_{y^2}^{y^2+4} xy\,dxdy = \ldots = 48$$

Ενώ αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης

$$I = \iint\limits_R x\,y\,dydx = \iint\limits_{R_1} x\,y\,dydx + \iint\limits_{R_2} x\,y\,dydx =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} xydydx + \int_2^4 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xydydx = \ldots$$

Όπου οι παραβολές τέμνονται στο $(2, \sqrt{2})$ πάνω από τον άξονα x'x.

<u>ΘΕΜΑ 3</u>. i) Να υπολογίσετε το $I = \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y}dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2}dz$. (Μον 1,5)

ii) Να υπολογιστεί το $\oint\limits_c F \cdot dr$, όπου $F = \left(\arctan x + y^2\right)\vec{i} + \left(e^y - x^2\right)\vec{j}$ και *c* η κλειστή επίπεδη γραμμή που ορίζεται από τα ημικύκλια $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 1$, πάνω από τον άξονα $x0x'$ και τμήματα του άξονα (να κάνετε ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμα). (Μον 1,25). Βρείτε την εξερχόμενη ροή του κάθετου διανυσματικού πεδίου *G* στο *F* . (Μον 0,75)

Απάντηση

i) Ελέγχω αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης, δηλ αν το διαν/κο πεδίο $F(x, y, z) = \frac{1}{y}\vec{i} + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)\vec{j} - \frac{y}{z^2}\vec{k}$ είναι συντηρητικό (αστρόβιλο).

Έχουμε

$P_y = -\frac{1}{y^2} = Q_x, P_z = 0 = R_x, Q_z = -\frac{1}{z^2} = R_y$, άρα το πεδίο είναι συντηρητικό. Δηλαδή $\exists f(x, y, z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *ώστε* $\nabla f = F$ και με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων βρίσκουμε $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + c, c \in \mathbb{R}$. Έτσι το ζητούμενο επικαμπύλιο ισούται με (θεώρημα)

$$I = \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y}dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2}dz = f(2,2,2) - f(1,1,1) = 0.$$

ii) Πρόκειται για το υπολογισμό επικαμπύλιου ολοκληρώματος επίπεδου διαν/κου πεδίου κατά μήκος επίπεδης καμπύλης που δημιουργείται από την ένωση των δύο ημικυκλίων και των δύο ευθύγραμμων τμημάτων επί του άξονα x'x (μεταξύ των δυο ημικυκλίων). Επειδή η F και η καμπύλη ικανοποιούν τις συνθήκες του Θεωρήματος του Green, έχουμε:

$\oint_c F\cdot dr = \iint_R \left(Q_x - P_y\right)dydx = \iint_R (-2x-2y)dydx$, όπου R η φραγμένη περιοχή που περικλείεται από τη παραπάνω καμπύλη. Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες κι έχουμε

$$\iint_R (-2x-2y)dydx = -2\int_0^{\pi}\int_1^{3} r(\cos\theta+\sin\theta)r\,drd\theta = -\frac{104}{3}$$

Η εξερχόμενη ροή του κάθετου διαν/κου πεδίου $G(x,y)=(e^y-x^2)\vec{i}-(\arctan(x)+y^2)\vec{j}$ στο F από τη 2^{η} μορφή του Θεωρήματος Green είναι επίσης

$$\oint_c F\cdot dr = \oint_c G\cdot\vec{n}\,dr = -\frac{104}{3}$$

όπου $\vec{n}$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στη καμπύλη (με φορά προς τα έξω).

<u>ΘΕΜΑ 4</u>. **i)** Να υπολογιστεί ο λογάριθμος $\ln\left(\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)$. (Μον 0,75)

ii) Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $e^z+e^{-z}=1$ (Μον 1)

iii) Αφού ελέγξτε ότι η συνάρτηση $u(x,y)=2x(1-y)$, να βρείτε τη συζυγή αρμονική $v(x,y)$ αυτής. Ποια είναι η παράγωγος της $f=u+iv$; (Μον. 1)

Απάντηση.

i) Είναι $\ln(z)=\ln|z|+i(\theta+2k\pi), k\in\mathbb{Z}, \theta=\arg(z)$ (όρισμα του z)

Για
$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}, \textit{οπότε}$$
$$\ln z_1=\ln 1+i\frac{\pi}{3}=i\frac{\pi}{3}\ (k=0)$$

Όμοια για $z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$, οπότε $\ln z_2=-i\frac{\pi}{3}$.

ii) Θέτω $e^z=we^z+e^{-z}=1\Rightarrow w+\frac{1}{w}=1\Rightarrow w^2-w+1=0$. Λύνοντας την εξίσωση

$$w_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=e^z\Rightarrow z=\ln w=i(2k\pi\pm\frac{\pi}{3}), k\in\mathbb{Z}\ \text{(βλ (i))}$$

iii) Η συναρτηση u(x,y) είναι αρμονική αφού έχει συνεχεις μερικές παραγώγους και

$$\left.\begin{array}{l} u_x=2(1-y)\Rightarrow u_{xx}=0 \\ u_y=-2x\Rightarrow u_{yy}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$

Αν v(x,y) η συζυγης αρμονική της u, τότε από τις συνθήκες Cauchy-Riemann έχουμε

$u_x=v_y\ \textit{και}\ u_y=-v_x$.

Από τη πρώτη σχέση προκύπτει

$v(x,y) = 2y - \frac{y^2}{2} + c_1(x)$ κι από τη δεύτερη σχέση $c_1(x) = x^2 + c, c \in \mathbb{R}$.

$f\,'(z) = u_x + iv_x = 2(1-y) - 2yi$

(αγνοήστε τυχόν αριθμητικά λάθη)

Καλή Επιτυχία & Καλό καλοκαίρι