

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ στο ΛΟΓΙΣΜΟ II

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1. i) Να βρεθεί η ευθεία τομής και η γωνία μεταξύ των επιπέδων $3x - 6y - 2z = 3$ και $2x + y - 2z = 2$. (Μον 0.5+0,5)

ii) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dydx$ και να σχεδιαστεί η περιοχή ολοκλήρωσης. (Μον 1,5)

ΘΕΜΑ 2. i) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου $F = \text{rot}(xi + yj + zk)$ κατά μήκος της καμπύλης $x = \cos t$ και $y = \sin t$. (Μον 1,5)

ii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για την $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ ακολουθώντας τη διαδρομή από την αρχή 0 στο σημείο A(0,0,1), μετά στο σημείο B(0,1,1) και τέλος στο σημείο C(1,1,1) μέσω ευθυγράμμων τμημάτων. (Μον 1,5)

ΘΕΜΑ 3. α) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης $F = (2x \ln y - yz)\vec{i} + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)\vec{j} - xy\vec{k}$ από το σημείο A(1,2,1) ως το σημείο B(2,1,1). Δείξτε ότι το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που συνδέει τα σημεία A και B. (Μον 1+0,5)

β) Δείξτε ότι για ένα διανυσματικό πεδίο F ισχύει $\text{div}(\text{rot}F) = 0$ (Μον 0,75)

ΘΕΜΑ 4. α) Να υπολογιστεί ο $\log(-1+i\sqrt{3})$. (Μον 0,5)

β) Για ποιους μιγαδικούς συμβαίνει $\sin z = 0$. (Μον 0,5)

ΘΕΜΑ 5. Αφού εξετάστε ότι η συνάρτηση $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 - 5x$, $x, y \in \mathbb{R}$ είναι αρμονική, να βρείτε τη συζυγή αρμονική $v = v(x, y)$ της u . (Μον. 1). Αφού εξηγήσετε ότι η συνάρτηση $f = u + iv$ είναι ολόμορφη να βρείτε την παράγωγο $f'(z)$. (Μον. 0,5)