25 Ιουνίου 2010

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ
ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ & ΔΙΚΤΥΩΝ
Εισηγητές: Γ. Χατζάρας, Κ. Αγάς
Εξάμηνο: Εαρινό 2009-2010

**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α περιόδου στο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ**

**Ενδεικτικές Απαντήσεις**

**Θέμα 1.** **α)** Έστω η συνάρτηση $Z = e^{-y}f$, όπου $f = f(x-y)$. Να βρεθεί η παράσταση $Z_x+Z_{xx}+Z_{xy}$ **(0,75 Μ)**

## Απάντηση

**α)** $Z_x=(e^{-y}f)_x=e^{-y}f_x=e^{-y}(x-y)_x=e^{-y}f'\ 1$
$Z_{xx}=(e^{-y}f')_x = e^{-y}f''\,(x-y)_x=e^{-y}f''\ 1$
$Z_{xy}=(e^{-y}f')_y= -e^{-y}f' + e^{-y}f''\,(x-y)_y = e^{-y}f' + e^{-y}f''(-1)$
Άρα $Z_x+Z_{xx}+Z_{xy} = 0$

**β)** Να γίνει αλλαγή των ορίων ολοκλήρωσης για να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\int_0^1\left[\int_y^{y-2}(x+y)dx\right]dy$ (Δεν χρειάζεται να λυθεί) **(0,75 Μ)**

## Απάντηση

Όπως δίνονται τα όρια ολοκληρώνουμε ως προς τον άξονα των y για αυτό είναι και σταθερά. Μας ζητά να ολοκληρώσουμε ως προς τον άξονα των χ και έτσι έχουμε ένα τριπλό χωρίο με την εξής μορφή. ( κάντε ένα σχήμα για τις εξισώσεις x=y και x=y-2)

$$I = \int_{-2}^{-1}\int_0^{x+2} f(x,y)dy\ dx + \int_{-1}^{0}\int_0^{1} f(x,y)dy\ dx + \int_0^1\int_x^1 f(x,y)dy\ dx$$

**γ)** Έστω το στερεό που ορίζεται από την σχέση $4x^2+y^2+4z^2=16$. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού με $β_1$) διπλό $β_2$) τριπλό ολοκλήρωμα. (να γραφούν μόνο οι σχέσεις). **( 0,75 Μ)**

## Απάντηση

$$V = 8\iint_D z(x,y)dxdy = 8\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-4x^2}} \frac{\sqrt{16-4x^2-y^2}}{4}dy\ dx$$

$$V = 8\iiint dxdydz = 8\int_0^2\int_0^4\int_0^{\frac{\sqrt{16-4x^2-y^2}}{4}} dz\ dy\ dx$$

**<u>Θέμα 2</u>.** Έστω η διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(3x^2y-4yz\,,x^3-4xz+2y\,,-4xy-2z)$

**α)** Να βρεθεί <u>αν υπάρχει</u> η συνάρτηση δυναμικού Φ(x,y,z) τέτοια ώστε $\overrightarrow{grad\Phi}=\vec{F}$

**β)** Να υπολογιστεί το έργο για μετακίνηση ενός υλικού σημείου κατά μήκος του τόξου $\overline{AB}$ του ελλειψοειδούς $4x^2+y^2+4z^2=16$ από το σημείο A(0,0,1) στο B(1,1,0). Το έργο αυτό είναι παραγόμενο ή καταναλισκόμενο; **(2 Μ)**

## <u>Απάντηση</u>

Καταρχήν θα βρούμε την rotF που είναι μηδέν και άρα το πεδίο είναι αστρόβιλο άρα υπάρχει συνάρτηση δυναμικού Φ(x,y,z)
Με βάση τη θεωρία η συνάρτηση δυναμικού βρίσκεται από τη σχέση:

$$\Phi(x,y,z)=\int_0^{x} f_1(x,y,z)dx+\int_0^{y} f_2(0,y,z)dy+\int_0^{z} f_3(0,0,z)dz=x^3y-4xyz+y^2-z^2$$

Επειδή το πεδίο είναι συντηρητικό το έργο εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική κατάσταση άρα $W_{A\text{-}B}$=Φ(Β)-Φ(Α)= Φ(1,1,0) – Φ(0,0,1)= 3>0 , παραγόμενο.

**<u>Θέμα 3</u>.** Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c 3dx+x^2e^{(y-2)^3}dy$ κατά τη θετική φορά διαγραφής του συνόρου C του τριγωνικού χωρίου
R: { $(x,y): x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 2\}$ α) Με τον ορισμό **(0,75 Μ)** β) με τη χρήση του θεωρήματος του Green. **(0,75 Μ)**

## <u>Απάντηση</u>

Από τη γραφική παράσταση της x+y=2 με τους άξονες προκύπτει ορθογώνιο τρίγωνο με συντεταγμένες O(0,0) , A(2,0) και B(0,2).
Για το τμήμα ΟΑ.
X=2t   I= $\int_{OA} 3dx+x^2e^{(y-2)^3}dy=6$
Y=0
Για το τμήμα ΑΒ
X=2-2t
Y= 2t
I= $\int_{AB} 3dx+x^2e^{(y-2)^3}dy=-\frac{17}{3}-\frac{1}{3}e^{-8}$
Για το τμήμα ΒΟ
X=0
Y= 2-2t
I= $\int_{BO} 3dx+x^2e^{(y-2)^3}dy=0$
Συνεπώς $I_{ολ}$= 1/3 -1/3 $e^{-8}$

**<u>Θεώρημα Green</u>**

$$\oint_c \vec{f}d\vec{r}=\iint_D (Q_x-P_y)dxdy$$

P(x,y) =3   $P_y$=0

Q(x,y) = $x^2\, e^{(y-2)^3}$ $\qquad$ $Q_x = 2x\, e^{(y-2)^3}$

$$I = \int_0^2 \int_0^{2-y} 2xe^{(y-2)^3}\, dx\, dy$$

**<u>Θέμα 4</u>. α)** Δείξτε ότι $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2+1}{z-1}=\infty$ **( 0,75 Μ)**

**β)** Να βρείτε την εκθετική μορφή του μιγαδικού $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$ και τις ρίζες $\sqrt[3]{z}$ όπου $z=4(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})$ **(0,75+0,75 Μ)**

## <u>Απάντηση</u>

**α)** $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2+1}{z-1}=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z^2}+1}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(1-z)z^2}{\left(z^2+1\right)z}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(1-z)z}{z^2+1}=0$

το οποίο ισχύει.

**β)** η εκθετική μορφή ενός μιγαδικού $z$ είναι : $z=|z|e^{i\varphi}$, όπου $\varphi=\arg(z)$. Έτσι, για τον $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$ έχουμε

$\left|\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)\right|=1$ και $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$, οπότε $\arg(z)=\dfrac{\pi}{6}$ και τελικά $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)=e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Για τις κυβικές ρίζες του $z=4(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})$ έχουμε:

$$\left|4(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})\right|=8 \text{ και } \arg\left(4(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})\right)=\frac{3\pi}{4}$$

οπότε

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),\ k=0,1,2$$

και επομένως $\sqrt[3]{z}=\left\{\begin{array}{l} 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ 2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \\ 2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right) \end{array}\right\}$.

**<u>Θέμα 5</u> α)** Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $u_1(x,y)=x\,e^x+y\,e^y$ , $u_2(x,y)=x^2-y^2+2x+1$, $x,y\in\mathbb{R}$, είναι αρμονικές και να βρείτε τη συζυγή αρμονική τους $v=v(x,y)$. **(0,75 Μ)**

**β)** Αν η συνάρτηση $f=u+iv$ είναι ολόμορφη, να βρείτε την παράγωγο $f'(z)$. **(0,75 Μ)**

## <u>Απάντηση</u>

Επειδή

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=e^x+xe^x,\quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=2e^x+xe^x$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=e^y+ye^y,\quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=2e^y+ye^y$$

και $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\neq 0\backslash$

προκύπτει ότι η $u_1(x,y)=x\,e^x+y\,e^y$ δεν είναι αρμονική.

Ανάλογα, για την $u_2(x,y)$ (η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2$^{ης}$ τάξης):

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=2x+2,\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=2$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=-2$$

οπότε $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0$

άρα η $u_2(x,y)$ είναι αρμονική συνάρτηση.

Αν $v_2$ είναι η συζυγής αρμονική αυτής τότε θα πρέπει $\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=\dfrac{\partial v_2}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial u_2}{\partial y}=-\dfrac{\partial v_2}{\partial x}$. Έτσι

$$\frac{\partial v_2}{\partial y}=2x+2\Rightarrow v_2(x,y)=\int\left(2x+2\right)dy+c(x)=2xy+2y+c(y)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x}=-\frac{\partial u_2}{\partial y}=2y\Rightarrow 2y+c'(x)=2y\Rightarrow c(x)=c=\text{σταθ.}$$

Άρα η συζυγής αρμονική της $u_2$ είναι η συνάρτηση: $v_2(x,y)=2xy+2y+c$.

Αν $f(x,y)=u_2(x,y)+i\,v_2(x,y)=\left(x^2-y^2+2x+1\right)+i\left(2xy+2y+c\right)$ και σαν συνάρτηση του $z$ γράφεται $f(z)=z^2+2z+1+ic$ (1).

Είναι γνωστό ότι, αν η $v_2$ είναι η συζυγής αρμονική μιας συνάρτησης $u_2$ τότε η $f(x,y)=u_2(x,y)+i\,v_2(x,y)$ είναι ολόμορφη και τότε (από το θεώρημα Cauchy-Riemann) ισχύει

$$f'\left(x,y\right)=\frac{\partial u_2}{\partial x}+i\frac{\partial v_2}{\partial x}=2x+2+2iy=2(x+iy)+2=2z+2=\left(z^2+2z+1+ic\right)'=f'(z)$$

(η τελευταία ισότητα ισχύει αν παραγωγίζαμε την (1) σαν πολυώνυμο μιγαδικής μεταβλητή, που είναι πάλι ολόμορφη συνάρτηση).

**<u>Θέμα 6.</u> α)** Αφού ελέγξτε ότι η συνάρτηση $c(t)=2+3i-6e^{-2i\pi t}$ : $[0,1]\to C$ είναι απλός, κλειστός και λείος δρόμος βρείτε το μήκος του $\mu(c)$ και το προσανατολισμό του $c$. **(1 Μ)**

**β)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_c \frac{e^{\pi i z}}{z^6}\,dz$, κατά μήκος του δρόμου $c$ όπως ορίστηκε στο (α). **(0,75 Μ)**

## <u>Απάντηση</u>

**α)** η συνάρτηση $c(t)=2+3i-6e^{-2i\pi t}$ αποτελεί κύκλο, με κέντρο τον μιγαδικό $z_0=2+3i$ και ακτίνα r=6. Είναι $c(t)=2+3i-6e^{-2i\pi t}=2+3i-6\left(\cos(2\pi t)-i\sin(2\pi t)\right)$ (1) και $c(t_1)\neq c(t_2)$, για $t_1\neq t_2$ αφού $\cos(2\pi t_1)-i\sin(2\pi t_1)\neq\cos(2\pi t_2)-i\sin(2\pi t_2)$, άρα είναι απλός δρόμος.
Επίσης από την (1) $c(t)=2+3i-6e^{-2i\pi t}=\left(2-6\cos(2\pi t)\right)+i\left(3+6\sin(2\pi t)\right)$ προκύπτει ότι ο δρόμος είναι και λείος, αφού το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
Ακόμη είναι θετικά προσανατολισμένος (όπως και κάθε κυκλικός δρόμος) αφού π.χ. για

$t=\dfrac{1}{8}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

$t=\dfrac{1}{2}$, $\varphi=\pi$

$t=1$, $\varphi=2\pi$

δηλαδή όσο αυξάνει το t αυξάνει και το όρισμα $\varphi$.
Για το μέτρο ισχύει

$$\left|c(t)\right|=\mu(c)=\int_0^1\left|c'(t)\right|dt=\int_0^1\sqrt{12^2\pi^2\left(\sin^2(2\pi t)+\cos^2(2\pi t)\right)}\,dt=\int_0^1 12\pi\,dt=12\pi\ ,$$

αναμενόμενο αφού πρόκειται για κύκλο ακτίνας r=6.

**β)** Έστω $f(z)=e^{\pi iz}$, τότε είναι ολόμορφη στο εσωτερικό του κυκλικού δρόμου $c(t)=2+3i-6e^{-2i\pi t}$ και επειδή ο δρόμος είναι θετικά προσανατολισμένος και το σημείο $z_0=0$ είναι εσωτερικό του $c$, τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε:

$$f(0)=\frac{5!}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{5+1}}dz\Rightarrow\int_c\frac{f(z)}{z^{5+1}}dz=f(0)\frac{2\pi i}{5!}=\frac{2\pi i}{5!}\ ,$$

που δίνει το ζητούμενο ολοκλήρωμα.