

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μερικές Παράγωγοι

1. Η θερμοκρασία σε κάθε σημείο μιας μεταλλικής πλάκας δίνεται από τη συνάρτηση $T(x,y) = \cos y e^x + \cos x e^y$. **α)** Προς ποια κατεύθυνση αυξάνεται ταχύτερα η θερμοκρασία στο σημείο $(0,0)$; **β)** Προς ποια κατεύθυνση ελαττώνεται ταχύτερα στο ίδιο σημείο;

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = x \cos(y/x) + \tan(y/x)$ ικανοποιεί τη σχέση $x^2 \partial_{xx} z + 2xy \partial_{xy} z + y^2 \partial_{yy} z = 0$.

3. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο και τη κάθετη στην επιφάνεια $z = x^2 - xy - y^2$ στο σημείο $(1,1,-1)$.

4. Να βρεθούν οι δεύτερης τάξης παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ όπου

$$f(x, y) = e^x \ln(3 - y^2) \quad \text{και} \quad f(x, y) = e^x \sinh y + \cos(2x - 3y).$$

5. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z$ ικανοποιεί την εξίσωση (Laplace):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

6. Βρείτε τη παράγωγο της $f(x, y, z) = \cos(xy) + e^{yz} + \ln(zx)$ στο σημείο $P_0(1, 0, 1/2)$ στη διεύθυνση του διανύσματος $u = i + 2j + 2k$.

7. Δείξτε ότι η διαφορική μορφή $(x + e^{x/y}) dx + e^{x/y} (1 - \frac{x}{y}) dy$ είναι τέλειο διαφορικό και βρείτε εκείνη την συνάρτηση της οποίας το διαφορικό ισούται με αυτή τη μορφή.

8. Υπολογίστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

i) $z = x^2 + 2xy$

ii) $f(x, y) = x^4 + 16y^4 - 2(x - 2y)^2$.

9. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα καθώς και τα ολικά μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ στη κλειστή τριγωνική περιοχή που ορίζεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = 4$ και $y = x$.

10. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα καθώς και τα ολικά μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ στη παραλληλόγραμμη περιοχή $0 \leq x \leq 5$
 $-3 \leq y \leq 0$.