ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Άσκηση</u> 1. α) Ποια είναι η εκθετική μορφή του i ;

β) Να δείξετε ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$e^w = e^z \Leftrightarrow w \in \{z + 2k\pi i / k \in \mathbb{Z}\}$$

γ) δείξτε ότι η συνάρτηση $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, είναι αρμονική και βρείτε τη συζυγή αρμονική της $v = v(x,y)$.

<u>Απάντηση</u>.

α) Επειδή $|i| = 1$, και όρισμα $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$, τότε $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$.

β) Είναι $e^w = e^z \Leftrightarrow e^{w-z} = 1$ και είναι γνωστό τότε ότι

$$w - z \in \{2k\pi i / k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow w \in \{z + 2k\pi i / k \in \mathbb{Z}\}$$

γ) Για να είναι η $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$ αρμονική θα πρέπει να ικανοποιείται η σχεση (Laplace) δηλ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (το οποίο ισχύει εδώ-απλές παραγωγίσεις) και οι μερικές παράγωγοι $2^{ης}$ τάξης να είναι συνεχείς (ισχύει εδώ πάλι). Άρα είναι αρμονική η u(x, y).
Η συζυγής αρμονική v(x,y) της u θα πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις (Cauchy-Riehmann):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Έτσι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2 \Rightarrow v(x,y) = \int (2x+2)dy = 2xy + 2y + c(x),$$

Όπου $c(x)$ συνάρτηση του x. Ακόμη από τη σχεση

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\big(2xy + 2y + c(x)\big) = 2y \Rightarrow 2y + c'(x) = 2y \Rightarrow$$

$c(x) = c$

Άρα η συζυγής αρμονική v(x,y) της u είναι η

v(x,y)=2xy+2y+c, c=σταθ.

<u>**Άσκηση 2**</u> **α).** Είναι ο δρόμος $c(t)=3\cos t+2i\sin t:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ θετικά ή αρνητικά προσανατολισμένος;

β) Αν $c(t)=3\cos t+2i\sin t:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_c \frac{(z^4+1)\sin[\pi(z^3-1)]}{z+1}dz$, κατά μήκος του δρόμου *c*.

<u>**Απάντηση**</u>

α) Ο δρόμος $c(t)=3\cos t+2i\sin t:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ αποτελεί έλλειψη, η οποία είναι η $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Κάθε έλλειψη είναι αρνητικά προσανατολισμένος δρόμος αφού όσο αυξάνει το t μειώνεται η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα c(t) με τον οριζόντιο άξονα. Ισοδύναμα μπορεί κάποιος να πει ότι όσο αυξάνει το t μειώνεται το c(t), π.χ. c(0)=3, c(π/2)=2i, c(π)= -3 κλπ.

β) Έστω $f(z)=(z^4+1)\sin[\pi(z^3-1)]$ η οποία είναι ολόμορφη στο εσωτερικό του δρόμου c και έστω $z_0=-1$. Ο αντίθετος δρόμος c^- του δρόμου $c(t)=3\cos t+2i\sin t:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ είναι θετικά προσανατολισμένος (αφού από το (α) ο c είναι αρνητικά προς/νος) και επομένως ισχύει ο τύπος του Cauchy , δηλ $\int_{c^-}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\, f(z_0)\Rightarrow\int_c\frac{(z^4+1)\sin[\pi(z^3-1)]}{z+1}dz=-2\pi i\, f(-1)=0$, όπου το – (μπροστά) οφείλεται στο ότι αλλάζει ο δρόμος από c^- σε *c*.

<u>**Άσκηση 3**</u>. **α)** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_c\frac{dz}{z^2-8z+15}dz$ κατά μήκος του δρόμου $c(t)=1+e^{it}:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$.

β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_c\frac{\sin(\pi z/4)}{z^2-4}dz$ κατά μήκος του δρόμου $c(t)=1+2i+5e^{\pi it}:[1,2]\to\mathbb{C}$.

<u>**Απάντηση**</u>

α) Ο δρόμος $c(t)=1+e^{it}:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ είναι κύκλος και θετικά προσανατολισμένος και το $\frac{1}{z^2-8z+15}$ γράφεται:

$$\frac{1}{z^2-8z+15}=\frac{1/2}{z-5}-\frac{1/2}{z-3}$$

Οπότε

$$\int_c\frac{dz}{z^2-8z+15}dz\ \frac{1}{2}\int_c\frac{1}{z-5}dz-\frac{1}{2}\int_c\frac{1}{z-3}dz=\frac{1}{2}(2\pi i)-\frac{1}{2}(2\pi i)=0$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και αν κάποιος χρησιμοποιήσει το Θεωρ Cauchy επειδή ο δρόμος c είναι κλειστός (κύκλος) και λείος (δηλ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους και παραγωγίσιμες επίσης).

β) Έστω $f(z) = \sin(\pi z/4)$. Ο δρόμος $c(t) = 1 + 2i + 5e^{\pi it} : [1,2] \to \mathbb{C}$ είναι κύκλος (δηλ θετικά προς/νος). Ακόμη

$$\frac{1}{z^2-4} = \frac{1}{(z-2)(z+2)} = \frac{1/4}{z-2} - \frac{1/4}{z+2}$$

Οπότε

$$\int_c \frac{\sin(\pi z/4)}{z^2-4}dz = \frac{1}{4}\int_c \frac{\sin(\pi z/4)}{z-2}dz - \frac{1}{4}\int_c \frac{\sin(\pi z/4)}{z-2}dz =$$

$$= \frac{1}{4}2\pi i\, f(2) - \frac{1}{4}2\pi i\, f(-2) = \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{4} = \frac{\pi i}{2}.$$

<u>Άσκηση 4.</u> Ποιες είναι οι ρίζες της μιγαδικής συνάρτησης sinz ;

<u>Απάντηση</u>

Επειδή $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2ie^{iz}}(e^{2iz} - 1)$ τότε

$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow 2iz \in \{2k\pi i : k \in Z\} \Leftrightarrow z = k\pi,\ k \in Z$.

<u>Άσκηση 5</u>. Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = e^{-x}\left(x\sin y - y\cos y\right) + e^{x}\cos y + 3x$.

α) δείξτε ότι η *u* είναι αρμονική και βρείτε τη συζυγή αρμονική της $v = v(x,y)$.

β) Εκφράστε την συνάρτηση $f(x,y) = u(x,y) + v(x,y)$ σαν συνάρτηση του μιγαδικού z.

<u>Απάντηση</u>

α) Για να είναι η u(x, y) αρμονική θα πρέπει $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (το οποίο ισχύει εδώ) και οι μερικές παράγωγοι $2^{ης}$ τάξης να είναι συνεχείς (ισχύει εδώ πάλι). Άρα είναι αρμονική η u(x, y).

Η συζυγής αρμονική v(x,y) της u θα πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Επειδή

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x}\left(x\sin y-y\cos y\right)+e^{-x}(\sin y)+e^{x}\cos y+3\Rightarrow$$
$$v(x,y)=\int\left(e^{-x}\left(x\sin y-y\cos y\right)+e^{-x}(\sin y)+e^{x}\cos y+3\right)dy+c(x) \qquad (1)$$

Και η c(x) βρισκεται από το γεγονός ότι

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-x}(x\cos y-\cos y+y\sin y)-e^{x}\sin y \qquad (2)$$

Όπου στη θέση της v(x,y) το αποτέλεσμα της (1).Ολοκληρώνουμε στη συνέχεια και τα δύο μέλη της (2) ως προς x και βρισκουμε την c(x).

β) Αφου είναι γνωστές πλέον οι u(x, y) και v(x,y) (από το (α)) τις τοποθετούμε στη θέση της $f(x,y)=u(x,y)+v(x,y)$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στη τελευταία το x με z και τέλειωσε.

<u>Άσκηση 6</u>. α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $c(t)=z_0+a\cos t+i\,b\sin t:[0,2\pi]\to C$ είναι απλός, κλειστός και λείος δρόμος και ότι παριστάνει έλλειψη.

β) Είναι ο δρόμος θετικά ή αρνητικά προσανατολισμένος;

γ) Αν $z_0=0$ και $a=3, b=2$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_c \frac{e^{(i\pi\sin 2z)}}{z-2}dz$, κατά μήκος του δρόμου *c* όπως ορίστηκε στο (α).

<u>Απάντηση</u>

α) Η συνάρτηση $c(t)=z_0+a\cos t+i\,b\sin t:[0,2\pi]\to C$ είναι συνεχής συνάρτηση και το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, άρα και η c(t), οπότε είναι δρόμος. Ακόμη c(0)=c(π) είναι δηλαδή κλειστός δρόμος Αν $c(t)=x+iy$ και $z_0=x_0+iy_0$ τότε από την σχέση $c(t)=z_0+a\cos t+i\,b\sin t:[0,2\pi]\to C$ παίρνουμε:

$$c(t)=z_0+a\cos t+i\,b\sin t=x+iy\Rightarrow x-x_0+i(y-y_0)=a\cos t+i\,b\sin t\Rightarrow$$
$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{a}=\cos t\\ \dfrac{y-y_0}{b}=\sin t\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1 \qquad (3)$$

Η (3) παριστάνει έλλειψη.

β) Ο δρόμος $c(t)=z_0+a\cos t+i\,b\sin t:[0,2\pi]\to C$ είναι αρνητικά προσανατολισμένος γιατί όσο αυξάνει το t μειώνεται η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα c(t) με τον οριζόντιο άξονα. Ισοδύναμα μπορεί κάποιος να πει ότι όσο αυξάνει το t μειώνεται το c(t), π.χ.

$c(0) = z_0 + a,\ c(\frac{\pi}{2}) = z_0 - i,\ c(\pi) = z_0 - a$

Κινείται δηλ το διάνυσμα c(t) όπως και η φορά των δεικτών του ρολογιού, άρα αντίθετα από τη θετική φορά, για αυτό ο δρόμος είναι αρνητικά προσανατολισμένος.

γ) Ο δρόμος $c(t) = z_0 + a\cos t + i\,b\sin t : [0,\ 2\pi] \to C$ γίνεται τώρα

$c(t) = 3\cos t + 2i\sin t : [0,\ 2\pi] \to C$

Αν $f(z) = e^{(i\pi \sin 2z)}$ τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

για $z_0 = 2$, $c(t) = 3\cos t + 2i\sin t : [0,\ 2\pi] \to C$ έχουμε ότι

$$\int_c \frac{e^{(i\pi \sin 2z)}}{z-2}\,dz = 2\pi i f(2) = e^{i\pi \sin 4}.$$

<u>Άσκηση 7</u>. α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $c(t) = z_0 + a\cos t + i\,b\sin t : [0,\ 2\pi] \to C$ είναι απλός κλειστός δρόμος και ότι παριστάνει έλλειψη.

β) Να βρεθεί το $\int_c \frac{e^{\pi i z}}{z^6}\,dz$, αν $c(t) = 2 + 3i - 6e^{-2\pi i t}\ [0,1] \to \mathbb{C}$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) απαντήθηκε στην άσκ 6.

β) Έστω $f(z) = \pi i z$, και $c(t) = 2 + 3i - 6e^{-2\pi i t} : [0,1] \to \mathbb{C}$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το μιγαδικό (σημείο) z=2+3i και ακτίνα r=6, ο οποίος είναι ως γνωστό δρόμος θετικά προσανατολισμένος. Το z=0 είναι εσωτερικό σημείο του παραπάνω κύκλου και η συνάρτηση f είναι ολόμορφη στο εσωτερικό του δρόμου c. Χρησιμοποιούμε το γενικευμένο ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy και έχουμε

$$\int_c \frac{e^{\pi i z}}{z^6}\,dz = 2\pi i\,5!\left(e^{\pi i z}\right)^{(5)} = 240\pi i\left(\pi^5 i^5 e^{i\pi z}\right) = -240\pi^6\, e^{i\pi z}$$

όπου $\left(e^{\pi i z}\right)^{(5)}$ δηλώνει τη 5η παράγωγο.