27 Φεβρουαρίου 2009

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ & ΔΙΚΤΥΩΝ

Εξάμηνο: χειμερινό ακ. έτος 2008-09
Διδάσκων: Γ Χατζάρας & Κ. Αγάς

Εξετάσεις στο Μαθηματικό Λογισμό Ι

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1 **α)** Δίνεται η σειρά $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$. Να εξεταστεί αν συγκλίνει και να υπολογιστεί το άθροισμά της με ακρίβεια 6 δεκαδικών. (Μον. 0,75)

β) Να δειχθεί ότι e^{-ix} = συνx – i ημx. (Μον. 0,75)

ΘΕΜΑ 2. Να υπολογιστεί το μήκος τόξου της καμπύλης κ: $y = \ln(1-x^2)$, από το σημείο της O(0,0) έως το A(1/2 , ln3-ln4). (Μον. 0.75)

ΘΕΜΑ 3: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{x\,\tau o\xi \epsilon \varphi x}{(1+x^2)^2}\,dx$, (Μον. 0,75) **ii)** $\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$ (Μον. 1)

iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx$ (Μον. 0,75) **iv)** $\int \frac{3}{x^4-1}\,dx$ (Μον. 0,75)

ΛΥΣΗ

iv) Η ρητή συνάρτηση $\frac{3}{x^4-1}$ γράφεται σαν άθροισμα μερικών κλασμάτων

$$\frac{3}{x^4-1} = -\frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{3}{4(x-1)} - \frac{3}{4(x+1)}$$

και επομένως

$$\int \frac{3}{x^4-1}\,dx = \int -\frac{3}{2(x^2+1)}\,dx + \int \frac{3}{4(x-1)}\,dx - \int \frac{3}{4(x+1)}\,dx =$$

$$-\frac{3}{2}\tan^{-1} x + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\ln|x+1|$$

<u>ΘΕΜΑ 4</u> α) Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο $(0,1)$, όταν $x^y - y^x + 1 = 0$. (Μον. 0.75)

β) Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$ (Μον. 0,75).

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Είναι

$$\left(x^y\right)' = \left(e^{y\ln x}\right)' = x^y \left(y \ln x\right)' = x^y \left(y' \ln x + \frac{y}{x}\right) \text{ και}$$

$$\left(y^x\right)' = \left(e^{x\ln y}\right)' = y^x \left(x \ln y\right)' = y^x \left(\ln y + \frac{xy'}{y}\right)$$

οπότε

$$\left(x^y - y^x + 1\right)' = 0 \Rightarrow x^y \left(y' \ln x + \frac{y}{x}\right) - y^x \left(\ln y + \frac{xy'}{y}\right) = 0$$

απ' όπου υπολογίζουμε την y' συναρτήσει των *x* και *y*.

β) Επειδή $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ χρησιμοποιούμε το θεώρημα L' Hopital και έχουμε

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

χρησιμοποιούμε ξανάτο θεώρημα L' Hopital και έχουμε

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^x(\ln x + 1)^2 + x^x \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2$$

<u>ΘΕΜΑ 5</u> Να βρείτε τα όρια των επόμενων ακολουθιών:

α) $a_n = \dfrac{3^n}{n^n}$, (Μον. 1) **β)** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, (Μον 0.5) **γ)** $a_n = \dfrac{2^n + 3^n}{5^n + 4^n}$, (Μον 0.5)

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Η ακολουθία $a_n = \dfrac{3^n}{n^n}$ είναι μηδενική γιατί αν ελέγξουμε το $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ θα δούμε ότι είναι <1 και σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα η αρχική ακολουθία τείνει στο 0 (μηδενική ακολουθία).
Πράγματι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{3^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = 3\cdot 0\cdot\frac{1}{e} = 0 < 1$$

και έτσι η ακολουθία $a_n = \dfrac{3^n}{n^n}$ είναι μηδενική.

β) Η ακολουθία $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ έχει απολύτως μικρότερους όρους από την ακολουθία $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n}$, η οποία όμως είναι μηδενική ακολουθία και επομένως (ιδιότητα) η αρχική $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ είναι επίσης μηδενική.

γ) Για το όριο της ακολουθίας $a_n = \dfrac{2^n + 3^n}{5^n + 4^n}$ έχουμε (διαιρώντας με 5^n αριθμητή και παρονομαστή):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n+4^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\dfrac{4}{5}\right)^n} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

εφόσον είναι γνωστό ότι $\lim_{n\to\infty}\omega^n = 0,\ \alpha\nu\ |\omega| < 1$.

<u>ΘΕΜΑ 6</u> Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot n!}{(3n)!}$ (Μον 0,75) ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^5}{n!}$, (Μον 0,75)

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) Ελέγχουμε τη σύγκλιση με το κριτήριο του λόγου (D Alembert) :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^3(n+1)!}{(3n+3)!}}{\dfrac{n^3\cdot n!}{(3n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\frac{(n+1)!}{n!}\frac{(3n)!}{(3n+3)!} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 1\cdot 0 = 0 < 1$$

άρα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot n!}{(3n)!}$ συγκλίνει.

ii) Όμοια για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^5}{n!}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^5}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^n n^5}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^5}{(n+1)!\,n^5} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = 0\cdot 1 = 0 < 1$$

επομένως και η δοσμένη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^5}{n!}$ συγκλίνει.