Δικτυωτά

Μια **σχέση μερικής (ή ασθενούς) διάταξης** στο A είναι μια σχέση r στο A που ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες :

i) ανακλαστική : $(x, x) \in r \quad , \quad \forall\, x \in A$

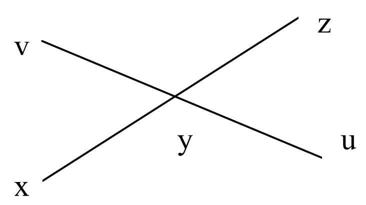
ii) αντισυμμετρική : $(x, y) \in r \;\wedge\; (y, x) \in r \;\Rightarrow\; x = y$

iii) μεταβατική : $(x, y) \in r \;,\; (y, z) \in r \;\Rightarrow\; (x, z) \in r$

Τότε το ζεύγος $(A, \leq)$ είναι ένα **μερικώς διατεταγμένο σύνολο** όταν

__**Παρατήρηση 1**__. Κάθε σχέση διάταξης «$<$» σ΄ένα σύνολο A «γεννά» μια σχέση «$\leq$» μερικής διάταξης στο A ως εξής : $x \leq y \Leftrightarrow x < y$ ή $x = y$. Και αντίστροφα, κάθε μερικής «$\leq$» σ΄ένα σύνολο A γεννά μια σχέση διάταξης στο A ως εξής: $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ και $x \neq y$

Έτσι, για παράδειγμα, αν στη σχέση διάταξης του διαγράμματος προσθέσουμε τα ζεύγη (x, x) , (z, z) , (u, u) , (v, v) δημιουργούμε μια μερική διάταξη στο σύνολο $\{x, y, z, u, v\}$.



Διάγραμμα 1

__Ορισμός__ __**1**__. Έστω $(A, <)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $B \subseteq A$. Ορίζουμε

i) $x =$ **άνω φράγμα** του $B \Leftrightarrow \forall\, y \in B,\; y \leq x$ (x : επόμενο όλων)

ii) x = **κάτω φράγμα** του $B \Leftrightarrow \forall\ y \in B,\ x \leq y$ (x : προηγούμενο όλων)

iii) x =**sup(**B**)** ή x=$\vee B \Leftrightarrow x$ = πρώτο στοιχείο του συνόλου των άνω φραγμάτων $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall y \in B,\ y \leq x \\ \forall z \in A,\ z = \text{ανω φραγμα} \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$

iv) x**=inf(**B**)** ή x=$\wedge B \Leftrightarrow x$=τελευταίο στοιχείο του συνόλου των κάτω φραγμάτων $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall y \in B,\ x \leq y \\ \forall z \in A,\ z = \text{κατω φραγμα} \Rightarrow z \leq x \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση 2</u>. Αν το sup(B) $\in B$ τότε είναι το τελευταίο (άρα και μέγιστο) στοιχείο του B. Επίσης, αν το inf(B)$\in B$, τότε είναι το πρώτο (άρα και ελάχιστο) στοιχείο του B.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Στο Διάγραμμα 1 έχουμε:

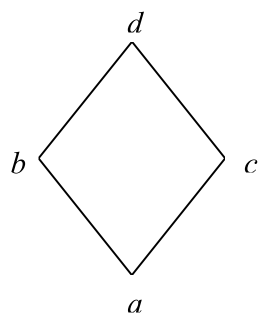
$$\nexists \inf\{x, s, u\}$$
$$\inf\{y, z, \omega\} = \mathrm{x}$$
$$\sup\{y, z, \omega\} = \omega$$

***<u>Ορισμός</u>* 2**. Κάθε μερικώς (ασθενώς) διατεταγμένο σύνολο (A , $\leq$) είναι **δικτυωτό** αν για οποιαδήποτε $x, y \in A$ υπάρχουν τα inf(x ,y)$= x \wedge y$ και sup{x,y}$= x \vee y$.

<u>Παρατήρηση 3.</u> Κάθε ολικά μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι δικτυωτό , όχι αντίστροφα .

Στο διάγραμμα 2, αν $X = \{a,b,c,d\}$ το ζεύγος $(X,<)$ αποτελεί δικτυωτό, αλλά δεν είναι ολικά μερικώς διατεταγμένο.

Για παράδειγμα, $b \wedge c = a$, $b \vee c = d$, $c \wedge a = a$, $b \vee d = d$.



Διάγραμμα 2

***Ορισμός* 3.** Κάθε δικτυωτό (a , $\leq$) λέγεται **πλήρες** , αν κάθε μη κενό υποσύνολο του έχει sup και inf .

Παράδειγμα 2. Το $(X,<)$ στο Διάγραμμα 2 αποτελεί ένα πλήρες δικτυωτό.

Παράδειγμα 3. Να δείξετε ότι το σύνολο F όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων ενός συνόλου X είναι δικτυωτό.

Απάντηση : Αν $A ,B \subseteq X$ τότε υπάρχει το $\inf\{A, B\} = A \cap B$ και υπάρχει το $\sup\{A, B\} = A \cup B$ καθώς τα $A \cap B$ και $A \cup B$ είναι πεπερασμένα.

Όμως το F δεν είναι πλήρες αφού για $A_i \in F$, η $\cup A_i$, οσωνδήποτε πεπερασμένων συνόλων, δεν είναι κατανάγκη πεπερασμένο σύνολο. Ενώ η $\cap A_i$, $A_i \in F$, είναι πεπερασμένο σύνολο και επομένως ορίζεται το $\inf\{ A_i / i \in I ,\ A_i \subset X \} = \cap A_i$.

Παράδειγμα 4. Κάθε πεπερασμένο δικτυωτό είναι πλήρες.

Απάντηση Πράγματι , έστω το πεπερασμένο δικτυωτό $X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}$ και $A = \left\{x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_s}\right\}$ ένα υποσύνολο του X, με x_{k_j} , , κάποια από τα στοιχεία του X.

Έστω ότι το σύνολο A δεν έχει π.χ. sup$A$, οπότε $\nexists\, y :\ x_{k_j} \leq y ,\ \forall\ 1 \leq j \leq s$.

Δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο $x_{k_\lambda} \in A$, $1 \leq \lambda \leq s$, του οποίου το sup με κάποιο άλλο στοιχείο του X δεν υπάρχει (γιατί τότε θα διαλέγαμε εκείνο ως sup$A$). Αυτό όμως αντιφάσκει στο γεγονός ότι το X αποτελεί δικτυωτό. Επομένως το υποσύνολο A του X έχει sup.
Όμοια θα μπορούσε να ελέγξει κάποιος και την ύπαρξη του inf$A$.

Και τελικά συμπεραίνουμε ότι κάθε πεπερασμένο δικτυωτό είναι πλήρες.

Παράδειγμα 5. Να δειχθεί ότι

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

Απάντηση . Θα δείξουμε αρχικά ότι $\sup\{\{a, b\}, c\} = \sup\{a, b, c\}$

Έστω x=sup$\{a, b\}$ και y= sup$\{x, c\}$, τότε

$$x \le y \quad \text{και} \quad c \le y$$

αλλά και

$$a \le x\ , \quad b \le x$$

δηλαδή y είναι ένα άνω φράγμα του {a, b, c}.

Αν z ένα άλλο άνω φράγμα του $\{a, b, c\}$ τότε z είναι άνω φράγμα του {α, b}. Επομένως, $x \le z$ και σαν άνω φράγμα του $\{a , b, c\}$ είναι $c \le z$. Άρα, $y \le z$, δηλαδή y=sup$\{a,b,c\}$.

Όμοια δείχνεται ότι sup$\{a$, sup$\{b ,c\}\}$ = sup $\{a, b, c\}$ και αποδεικνύεται έτσι το ζητούμενο.

<u>Παράδειγμα 6</u>. Να δειχθεί ότι

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad \text{και} \quad a \vee (a \wedge b) = a$$

<u>Απάντηση</u>. Ισχύει ότι $a \le a \vee b$ και $a \wedge b \le a$, οπότε $a \vee (a \wedge b) = a$. Επομένως προκύπτει το ζητούμενο.

***<u>Ορισμός</u>* 4.** Ένα δικτυωτό (A , ≤) ονομάζεται **επιμεριστικό** αν ισχύουν:

i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad \forall a,b,c \in A$ και

ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \qquad \forall a,b,c \in A$

<u>Πρόταση</u> : Οι συνθήκες (**i**) και (**ii**) του ορισμού 4 είναι ισοδύναμες .

Απόδειξη. Θα δείξουμε αρχικά ότι (i)$\Rightarrow$(ii). Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left[(a \vee b) \wedge (a \vee c)\right] = \left[(a \vee b) \wedge a\right] \vee \left[(a \vee b) \wedge c\right] = \left[a \wedge (a \vee b)\right] \vee \left[(a \vee b) \wedge c\right] = \\
&a \vee \left[(a \vee b) \wedge c\right] = a \vee \left[(a \wedge c) \vee (b \wedge c)\right] = a \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = \\
&\left[a \vee (a \wedge c)\right] \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι (ii)$\Rightarrow$(i). Έχουμε

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = \left[(a \wedge b) \vee a\right] \wedge \left[(a \wedge b) \vee c\right] =$$
$$\left[a \vee (a \wedge b)\right] \wedge \left[c \vee (a \wedge b)\right] = a \wedge \left[c \vee (a \wedge b)\right] =$$
$$a \wedge \left[(c \vee a) \wedge (c \vee b)\right] = \left[a \wedge (c \vee a)\right] \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee c)$$