<u>Ισοπληθή σύνολα</u>

<u>Ορισμός</u>. Το σύνολο A είναι ισοπληθές με το B αν υπάρχει μια συνάρτηση $f : A \to B$ η οποία είναι 1-1 και επί. Γράφουμε τότε $A \approx B$.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Ισχύει $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$

Πράγματι, υπάρχει η συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ όπου

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 2n, & n > 0 \\ -2n+1, & n < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση είναι **επί**, δηλαδή $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$, αφού $\forall x \in \mathbb{N}$ έχουμε:

αν $x=2n$ $\exists n \in \mathbb{Z} : f(n) = 2n = x$

αν $x=2n+1$ $\exists -n \in \mathbb{Z} : f(-n) = 2n+1 = x$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση.

<u>Παράδειγμα 2</u>. Ισχύει $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Πράγματι, υπάρχει η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, η οποία ορίζεται σαν $f(n) = (n,n)$.

Η συνάρτηση f είναι φανερό ότι είναι 1-1. Επίσης υπάρχει μια συνάρτηση

$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που ορίζεται σαν $g(m,n) = 2^n 3^m$.

Η συνάρτηση g είναι 1-1 γιατί αν

$$g(n,m) = g(s,t) \Rightarrow 2^n 3^m = 2^s 3^t \Rightarrow$$
$$2^{n-s} = 3^{t-m}$$

Αλλά τότε το αριστερό μέλος της ισότητας είναι αριθμός διαιρετός με 2 (άρτιος δηλαδή) και άρα και το δεξί μέλος αυτής, πράγμα άτοπο. Έτσι, η παραπάνω ισότητα ισχύει μόνο στη περίπτωση που οι εκθέτες είναι μηδενικοί, δηλαδή όταν $n = s$ και $t = m$. Άρα η συνάρτηση g είναι 1-1.

Σύμφωνα με το θεώρημα Cantor-Bernstein προκύπτει ότι $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 3. Ισχύει $A \times B \approx B \times A$

Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f : A \times B \to B \times A, \text{ όπου } (a,b) \to (b,a)$$

Αν $f(a,b) = f(c,d) \Leftrightarrow (b,a) = (d,c) \Leftrightarrow b = d$ και $a = c$

οπότε $f = 1-1$.

Ακόμη, $\forall (b,a) \in B \times A \ \exists (a,b) \in A \times B : f(a,b) = f(b,a)$

άρα *f*=επί και επομένως ισχύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 3. Ισχύει $\mathbb{N} \approx A$, όπου *A* το σύνολο των άρτιων φυσικών. Ανάλογα $\mathbb{N} \approx A,$, όπου *Π* οι περιττοί φυσικοί. (δείξτε το εσείς).

Παράδειγμα 4. Αν $(a,b) \subset \mathbb{R}$ διάστημα των πραγματικών αριθμών, τότε ισχύει $(a,b) \approx (0,1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (a,b) \to (0,1)$, όπου $f(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$.

Είναι $a < b \Rightarrow b - a > 0$ και για το τυχαίο *x*, $a < x < b$ ισχύει

$$0 < x - a < b - a \Rightarrow 0 < \frac{x-a}{b-a} < 1 .$$

Έστω $f(x) = f(y) \Rightarrow \dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{y-a}{b-a} \Rightarrow x = y$, άρα $f = 1-1$.

Έστω τώρα $y \in (0,1)$ και

$$\frac{x-a}{b-a} = y \Rightarrow x - a = y(b-a) \Rightarrow$$

$$x = y(b-a) + a$$

Δηλαδή $\forall y \in (0,1)$ υπάρχει

$$x = y(b-a) + a \text{ τέτοιο ώστε } f(x) = \frac{y(b-a)+a}{b-a} = y,$$

το οποίο σημαίνει ότι η *f* είναι επί συνάρτηση.

<u>Παράδειγμα 6</u>. Τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $(-1,1)$ είναι ισοπληθή, δηλαδή $\mathbb{R} \approx (-1,1)$

Πράγματι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f:(-1,1) \to \mathbb{R}, \text{ όπου } f(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

τότε η f είναι α) 1-1 και β) επί, γιατί:

α) Έστω $f(x) = f(y)$, για $x, y \in (-1,1)$. Τότε $\dfrac{x}{1-|x|} = \dfrac{y}{1-|y|}$ (1)

και επειδή $x, y \in (-1,1) \Rightarrow -1 < x, y < 1 \Rightarrow |x| < 1 < 1$ και $|y| < 1$

Έτσι οι παρονομαστές στην (1) είναι θετικοί, οπότε οι x,y είναι ομόσημοι.

Αν x,y>0 τότε

$$(1) \Rightarrow \frac{x}{1-|x|} = \frac{y}{1-|y|} \overset{\iota\delta\iota o\tau\eta\tau\alpha}{\Rightarrow} \frac{x+1-x}{1-x} = \frac{y+1-y}{1-y} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x = 1-y \Rightarrow x = y$$

Αν x,y < 0

$$(1) \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Rightarrow \frac{x-(1+x)}{1+x} = \frac{y-(1+y)}{1+y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{1+x} = \frac{-1}{1+y} \Rightarrow 1+x = 1+y \Rightarrow x = y.$$

Επομένως η ***f* είναι 1-1 συνάρτηση**

β) Έστω $y \in \mathbb{R}$ και y > 0. Τότε υπάρχει $x = \dfrac{y}{y+1} \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(x) = \dfrac{y/_{y+1}}{1-y/_{y+1}} = y$.

Όμοια ,αν $y \in \mathbb{R}$ και y<0, τότε υπάρχει $x = \dfrac{y}{1-y} \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε: $f(x) = \dfrac{\frac{y}{1-y}}{1-\frac{y}{1-y}} = y$.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση η ***f* είναι επί συνάρτηση**.

<u>Παράδειγμα 7</u>. Αν $A \approx X$ και $B \approx Y$ τότε είναι $A \times B \approx X \times Y$.

Πράγματι, αφού $A \approx X$ και $B \approx Y$, τότε

$$\exists \;\; f: A \to X, \text{ η οποία είναι 1-1 και επί}$$

$$\exists \;\; g: B \to Y, \text{ η οποία είναι 1-1 και επί}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: A\times B \to X\times Y$ που ορίζεται από τη σχέση

$$(a, b) \to (\, f(a) ,\, f(b)\,) \text{ η οποία είναι 1-1 και επί}$$

<u>Συμπεράσματα</u> : **α)** Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$. Σύμφωνα με το παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

και με τη βοήθεια του παραδείγματος 1.34 (σελ. 19) προκύπτει ότι

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{N}\times\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

β) Ισχύει $\mathbb{Q} \approx \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Πράγματι αν $x \in \mathbb{Q}$ τότε $x = \dfrac{p}{q}$, όπου p, q ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους και η συνάρτηση

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \text{ όπου } \frac{p}{q} \to (p,q)$$

(εύκολα αποδεικνύεται) είναι 1-1 και επί συνάρτηση. Άρα $\mathbb{Q} \approx \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Και τελικά έχουμε

$$\mathbb{Q} \approx \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}\times\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$$

<u>Παράδειγμα 8</u>. Για τα σύνολα A, B, C ισχύει : $((A\times B)\to C) \approx (A\to(B\to C))$

Θα ορίσουμε μια συνάρτηση $t:\big((A\times B)\to C\big)\to\big(A\to(B\to C)\big)$ η οποία να είναι τελικά 1-1 και επί ώστε να αποδειχθεί το ζητούμενο.

Έστω $t(f) = h$, όπου $f: A\times B \to C$ και $h: A \to (B\to C)$. Ορίζουμε την h ως εξής:

$$h(a) = g_a, \quad g_a : B \to C$$

για κάθε $a \in A$ και $g_a(b) = f(a,b)$, για το τυχαίο $b \in B$.

Η συνάρτηση h είναι καλά ορισμένη αφού αν $a_1=a_2$ τότε

$$g_{a_1}(b) = f(a_1,b) = f(a_2,b) = g_{a_2}(b)$$

δηλαδή $h(a_1) = h(a_2)$.

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση t είναι 1-1. Έστω $f_1, f_2 :(A\times B)\to C$ τέτοιες ώστε $t(f_1)=t(f_2)$ δηλαδή $t(f_1)=h_1=t(f_2)=h_2$, με $h_1,h_2 : A\to(B\to C)$. Τότε θα ισχύει

$$h_1(a)=h_2(a),\ \forall a\in A \Rightarrow g_a^1 = g_a^2,\ \forall a\in A \Rightarrow g_a^1(b)=g_a^2(b),\ \forall a\in A, \forall b\in B \Rightarrow$$

$$f_1(a,b)=f_2(a,b),\ \forall a\in A, \forall b\in B \Leftrightarrow f_1=f_2$$

Άρα η συνάρτηση t είναι 1-1.

Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση t είναι επί. Πράγματι για κάθε h: $A \to (B\to C)$ υπάρχει f: $A\times B\to C$, όπου $f(\alpha, b) = (h(a))(b) = g_a(b) = c\in C$

<u>Παράδειγμα 9</u>.Ισχύει $\mathbb{N} \approx \{ 10, 11, 12, ...\} = \{ n \in \mathbb{N} \ / \ n\geq 10 \} = X$

Πράγματι, έστω $\mathbb{N} \xrightarrow{f} X$ που ορίζεται ως εξής: $n\to n+10$,

η οποία είναι (εύκολα διαπιστώνεται) 1-1 και επί (αφού $\forall x\in X \ \exists\ x-10 \in\mathbb{N}$:
$f(x-10)=x$).