Αγάς Κωνσταντίνος
Διδάσκοντες :Χατζάρας Ιωάννης

Τμήμα Μηχ. Η./Υ. Τηλ/ων. & Δικτύων
Εξάμηνο Χειμερινό 2009-2010

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I
4η Σειρά-Ακολουθίες

1. Να δείξετε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. (*Υπόδ. : Χρησιμοποιήστε τους ορισμούς σύγκλισης και φραγμένης ακολουθίας*)

2. i) Το γινόμενο μηδενικής επί φραγμένη ακολουθία είναι μηδενική ακολουθία. (*Υπόδ.: Χρησιμοποιήστε τους ορισμούς σύγκλισης και φραγμένης ακολουθίας*)

ii) Δείξτε ότι ισχύει: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$. Ισχύει το αντίστροφο; (*Υποδ. Βρείτε ένα αντιπαράδειγμα*).

3. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό ορίου βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν) των ακολουθιών

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \quad , \quad b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

(*Υπόδ. ελέγξτε υπακολουθίες*)

4. Να υπολογισθούν τα όρια των επόμενων ακολουθιών:

α) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}\right)$, β) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n^2+n-1}{27n^2-4}}$, γ) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$,

δ) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1} - 2\cdot 10^{2n-1}}$, ε) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2}\cdot n^2 + n - 2}{2n^2 - n + 1}$.

5. i) Έστω η αναδρομική ακολουθία $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $a_1 = \sqrt{2}$. Να δείξετε ότι η (a_n) είναι μονότονη και φραγμένη και να υπολογίσετε το όριο της.

ii) Ομοίως για την ακολουθία $b_{n+1} = \dfrac{2b_n + 4}{3}$, $n \in \mathbb{N}$, με $b_1 = 0$.

6. Να υπολογισθούν τα όρια των επόμενων ακολουθιών:

α) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n$, β) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^n}{n!5^n}\right)$, γ) $\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{2}{n+2}\right)^n$

δ) $\lim_{n\to\infty} a_n$, όταν $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$ (*Υπόδ.:* $\dfrac{1}{x\cdot(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$).

7. Έστω οι ακολουθίες u_n, v_n που ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases} , \quad \forall n = 1,2,3,.... \text{ με αρχικές τιμές } \begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = 12 \end{cases}$$

α) Αν $w_n = v_n - u_n$, δείξτε ότι η ακολουθία w_n είναι μια γεωμετρική πρόοδος θετικών όρων και βρείτε το όριό της.

β) Δείξτε ότι η ακολουθία u_n είναι αύξουσα, η ακολουθία v_n φθίνουσα και ότι οι ακολουθίες u_n, v_n συγκλίνουν.

γ) Θέτοντας $t_n = 3u_n + 8v_n$, $n = 1,2,3,\ldots$, δείξτε ότι η ακολουθία t_n είναι σταθερή και υπολογίστε έτσι τα όρια των ακολουθιών u_n, v_n.

7. i) Βρείτε ένα άνω φράγμα για την ακολουθία με γενικό όρο

$$\alpha_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}_{n \text{ ριζικά}} = \sqrt{2+a_{n-1}}, \qquad a_1 = \sqrt{2}\,.$$

ii) Δείξτε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αύξουσα (επομένως συγκλίνει). Υπολογίστε το όριό της.