Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

$$Ax = b$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\qquad x = ?$

$x, b \in \mathbb{R}^n$

Πολυπλοκότητα υπολογισμού ορίζουσας ενός πίνακα $n \times n$ είναι $O(n!)$

Απόδειξη με επαγωγή.

- $n = 2$ $\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

  κόστος: $2 = O(2!)$

- Υποθέτουμε ότι ισχύει για n

  δηλ. αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow$ η πολυπλοκότητα υπολογισμού της $\det A$ είναι $n!$

Αν $M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \Rightarrow$

$$\det M = m_{11} \cdot \det M_{11} + m_{21} \det M_{21} + \dots$$

$$\dots + m_{n+1,1} \det M_{n+1,1} =$$

κόστος $n!$, $n+1$ στο πλήθος

άρα το κόστος είναι $(n+1)\, n! = (n+1)!$

Παρατηρούμε και χρησιμοποιούμε κατάλληλα τις ιδιότητες του πίνακα.

- αραιοί πίνακες (πολλά μηδενικά στοιχεία)

- πυκνοί πίνακες (ελάχιστα ή καθόλου μηδενικά στοιχεία)

- διαγώνιοι

- τριγωνικοί πίνακες

- συμμετρικοί πίνακες

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- $Ix = y \Rightarrow x = y$

- $Dx = y \Rightarrow x_i = \dfrac{y_i}{d_{ii}}$

Matlab:

x=D\y αν D πίνακας

x=y./d αν μόνο η διαγώνιος είναι αποθηκευμένη στο διάνυσμα d.

- $Lx = y$ όπου

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{aligned} l_{11}x_1 & & &= y_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 & & &= y_2 \\ \vdots & & & \;\;\vdots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + & \cdots & + l_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

Πλήθος πράξεων

$\ldots_{n1} x_1 + l_{n2} x_2 + \ldots + x_{nn} x_n = y_n$

Πλήθος πράξεων

$\Rightarrow x_1 = y_1 / l_{11}$ — 1

$x_2 = \dfrac{y_2 - l_{21} x_1}{l_{22}}$ — 3

$x_3 = \dfrac{y_3 - l_{31} x_1 - l_{32} x_2}{l_{33}}$ — 5

$\vdots$

$x_n = \dfrac{y_n - l_{n1} x_1 - l_{n2} x_2 - \cdots - l_{n,n-1} x_{n-1}}{l_{nn}}$ — $2(n-1)+1 = 2n-1$

$= \dfrac{y_n - \sum_{j=1}^{n-1} l_{nj} x_j}{l_{nn}}$

Αλγόριθμος λύσης κάτω τριγωνικού συστήματος:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{\%\% } l, y \text{ γνωστά} \\ x_1 = y_1 / l_{11} \\ \text{for } i = 2, \ldots, n \\ \quad x_i = \dfrac{y_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}} \\ \text{end} \end{array}}$$

Προς τα εμπρός αντικατάσταση (forward substitution)

Πλήθος στοιχείων του $L = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Πλήθος πράξεων:

$\sum^{n} (\ldots) \ldots \sum^{n} \ldots \frac{n(n+1)}{2} - n -$

Πλήθος πράξεων

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - n = 2\,\frac{n(n+1)}{2} - n =$$
$$= n^2+n-n=\underline{\underline{n^2}}$$

Αντίστοιχα επιλύω άνω τριγωνικό σύστημα, με τον αλγόριθμο
Προς τα πίσω αντικατάσταση
(backward substitution)

<u>Άσκηση</u>: Γράψτε τον αλγόριθμο αναλυτικά και υπολογίστε το κόστος του.

Μέθοδοι λύσης γραμμικών συστημάτων $Ax=b$

- Άμεσες $\Longrightarrow x$
- Επαναληπτικές $\Longrightarrow \underline{\underline{x^{(0)}}} \to x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots x^{(n)} \ldots$

$\uparrow$ αρχική προσέγγιση του x

<u>Άμεσες</u>: Gauss, LU παραγοντοποίηση

Ανάλυση Cholesky (για συμμετρικούς πίνακες)

Ανάλυση D,L,U ($A=L\cdot D\cdot U$)

Ιδέα στις Άμεσες Μεθόδους: $A = L \cdot U$

Έστω $A = L \cdot U$ ← άνω τριγωνικός

↑ κάτω τριγωνικός

Τότε $Ax = b \iff$

$\underbrace{L \cdot U \cdot x}_{}$ ... $L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{y} = b \implies$

$Ly = b \implies y = \ldots$ $\quad O(n^2)$

$Ux = y \implies x = \ldots$ $\quad +O(n^2)$

κόστος

$O(n^2)$

Ασκηση 1:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -m_{i1} & \vdots & & & 1 \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a_{21} a_{11}

a_{i*} a_{1*}

$$M_1 A^{(1)} = A^{(2)}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cancel{-m_{21} a_{11} + a_{21}} = 0 & -m_{21} a_{12} + a_{22} & \cdots & -m_{21} a_{1n} + a_{2n} \\ 0 & -m_{31} a_{12} + a_{32} & \cdots & -m_{31} a_{1n} + a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -m_{n1} a_{12} + a_{n2} & & -m_{n1} a_{1n} + a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ασκηση 2:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ m_{n1} & 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1} M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ m_{n1} & 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -m_{21} & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ -m_{n1} & 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} - m_{21} = 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ασκηση 3:

Λύση -:

1° Βήμα: $M_1^{-1} M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ m_{n1} & m_{n2} & & 1 \end{bmatrix}$

Όμοια και στα υπόλοιπα βήματα

$\Downarrow$

Η απαλοιφή του Gauss, γράφεται σαν γινόμενο πινάκων

$$\boxed{A = L \cdot U}$$

L: πολ/στές, U: $A^{(n)}$

$$b^{(n)} = M_n \cdots M_1 \cdot b$$

$$\underline{b = L \cdot b^{(n)}}$$

L·U παραγοντοποίηση του A

$A = L * U$

U:
- άνω τριγωνικός
- τα μη-μηδενικά στοιχεία προκύπτουν από τη διαδικασία της απαλοιφής (πίνακα)

L:
- κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο
- τα μη-μηδενικά στοιχεία είναι οι πολλαπλασιαστές από την απαλοιφή του Gauss.

Παράδειγμα:

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad L = ? \quad , \quad U = ?$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_{31} = \frac{2}{2} = 1$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - m_{21} \cdot a_{12}^{(1)} = 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - m_{21} a_{13}^{(1)} = 3 - 2 \cdot 0 = 3$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - m_{31} a_{12}^{(1)} = 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - m_{31} a_{13}^{(1)} = 6 - 1 \cdot 0 = 6$$

$m_{32} = 0$

$U = A^{(2)}$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{U}$$

Οπότε: αν έχω να λύσω

$Ax = b$, όπου $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}$

$x = ?$

$$Ax = b$$

$$(L \cdot U)x = b$$

$$L \cdot \underbrace{(Ux)}_{y} = b \quad , \quad Ux = y$$

Αρχικά λύνω το $Ly = b$

Αρχικά λύνω $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 3 \\ y_2 &= 12 - 2 \cdot y_1 = 12 - 2 \cdot 3 = 6 \\ y_3 &= 9 - y_1 = 9 - 3 = 6 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Έπειτα λύνω $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 6x_3 = 6 &\Longrightarrow x_3 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 = 6 &\Rightarrow x_2 = \frac{6 - 3 \cdot 1}{3} = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 &\Rightarrow x_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρήσεις:

- Αν γνωρίζουμε τη λύση, η διαδικασία επαληθεύεται άμεσα

⇒ Αν το x είναι άγνωστο, τότε υπολογίζουμε το υπόλοιπο για επαλήθευση δηλ.

$$\left.\begin{array}{l} Ly=b \\ Ux=y \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{x}$$

$$r = A\tilde{x} - b \underset{?}{=} \underline{\underline{0}}$$

<u>Οδήγηση:</u>

Μεταθέτω τις γραμμές (σταδιακά) του A ($A^{(1)}$, $A^{(2)}$ ...) ώστε οδηγός να είναι το μεγαλύτερο στη στήλη, στοιχείο

Άρα είναι σαν να κάνω L.U παραγοντοποίηση στον PA

↑ πίνακας μεταθέσεων.

$$P \cdot A = L \cdot U$$

Οπότε λύνω το αρχικό πρόβλημα $Ax=b$ ως εξής:

$$Ax = b \Longrightarrow \underbrace{P \cdot A}_{\substack{\shortparallel \\ L \cdot U}} x = \underbrace{P \cdot b}_{z} \Longrightarrow$$

$$L \cdot \underbrace{(U x)}_{y} = z$$

Λύνω $L \cdot y = z \Longrightarrow Ux = y \Rightarrow x$

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΌΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Υλοποίηση Gauss στον υπολογιστή.

Αποτελείται από 3 φωλιασμένα for-loop.

Για την αποθήκευση των νέων τιμών δεν χρειαζόμαστε επιπλέον θέσεις μνήμης.

Οι πολλαπλασιαστές αποθηκεύονται στο κάτω τριγωνικό κομμάτι του A (που η απαλοιφή το μετατρέπει σε 0).

Τα νέα στοιχεία του A στις αντίστοιχες θέσεις στο άνω τριγωνικό, αφού οι παλιότερες τιμές δεν χρειάζονται στα επόμενα βήματα.

$\text{for } k = 1, \ldots, n-1$ ← βήματα

$\quad \text{for } i = k+1, \ldots, n$ ← γραμμές κάτω από τον οδηγό

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$\quad\quad \text{for } j = k+1, \ldots, n$ ← στήλες δεξιά από τον οδηγό

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}$$

$\quad\quad \text{end}$

$\quad \text{end}$

end

Απαλοιφή Gauss.

- Οπισθοδρόμηση: Επίλυση (ισοδύναμου) άνω τριγωνικού συστήματος (βλ. διαφάνεια 13).
- Πολυπλοκότητα Αλγόριθμου - Πλήθος πράξεων:
  - Τριγωνοποίηση:

υπολογισμός στοιχείων υποπινάκων

υπολογισμός πολλαπλασιαστών

υπολογισμός δεξιού μέρους

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left\{(n-i)^2+(n-i)\right\}&=\frac{n^3-n}{3}\\(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1&=\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}\right\}\quad \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}=\frac{n^3}{3}+O(n^2)$$

  - Οπισθοδρόμηση: $1+2+\ldots+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
  - Σύνολο: $\dfrac{n^3+3n^2-n}{3}=\dfrac{n^3}{3}+O(n^2)$

LU παραγοντοποίηση.

Κατά την απαλοιφή Gauss η τριγωνοποίηση του *A* μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{(2)} = M_1 A, \quad b^{(2)} = M_1 b \ \ldots$$

$$\ldots \ A^{(n)} = M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A \quad \Rightarrow \quad A = M_1^{-1} \cdots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} A^{(n)}$$

$$\ldots \ b^{(n)} = M_{n-1} \cdots M_2 M_1 b \quad \Rightarrow \quad b = M_1^{-1} \cdots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} b^{(n)}$$

LU παραγοντοποίηση (συνέχεια) .

☺ Αποδεικνύεται (αφήνεται ως άσκηση) ότι:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = M_1^{-1} \cdots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} \quad \Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{n-1n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(n)} = U \Rightarrow A = LU$$

LU παραγοντοποίηση.

Αλγόριθμος για τον υπολογισμό των στοιχείων των πινάκων L και U:

$$
\begin{aligned}
&\text{for } \ i = 1, \ldots, n \\
&\qquad \text{for } \ j = 1, \ldots, i-1 \\
&\qquad\qquad L_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}}{U_{jj}} \\
&\qquad \text{end} \\
&\qquad L_{ii} = 1 \\
&\qquad \text{for } \ j = i, \ldots, n \\
&\qquad\qquad U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj} \\
&\qquad \text{end} \\
&\text{end}
\end{aligned}
$$

LU παραγοντοποίηση.

Αν κατά την απαλοιφή Gauss χρειαστεί να κάνουμε μερική οδήγηση τότε η τριγωνοποίηση του A μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων:

$$PA = LU$$

όπου P ο πίνακας μεταθέσεων.

Πίνακες μεταθέσεων.

1. Ένας πίνακας *P* λέγεται πίνακας μεταθέσεων ανν προκύπτει από τον μοναδιαίο με εναλλαγή γραμμών ή στηλών.

$$P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & \text{i στήλη} & & \text{j στήλη} & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{i σειρά} \\ \\ \leftarrow \text{j σειρά} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

2. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά ένα πίνακα, του μεταθέτει τις γραμμές.

3. Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά ένα πίνακα του μεταθέτει τις στήλες.

$$P_{ij}A = \begin{bmatrix} & \ddots & \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ & \ddots & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ & \ddots & \end{bmatrix}, \quad AP_{ij} = \begin{bmatrix} & a_{1j} & & a_{1i} & \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ & a_{nj} & & a_{ni} & \end{bmatrix}$$

Απαλοιφή Gauss & Πεπερασμένη Αριθμητική.

- Πρόβλημα:

$$\left.\begin{aligned} 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}, \quad x_1 = \frac{10000}{9999} = 1.0001..... \qquad x_2 = \frac{9998}{9999} = 0.9998.....$$

- Απαλοιφή Gauss σε υπολογιστή με β =10, t = 3, U = -L = 20:

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 10^4$$

$$a_{22}^{(2)} = fl\left(a_{22}^{(1)} - m_{21}a_{12}^{(1)}\right) = fl(1-10^4) = fl(-9999) = -.100\times 10^5 = -10^4$$

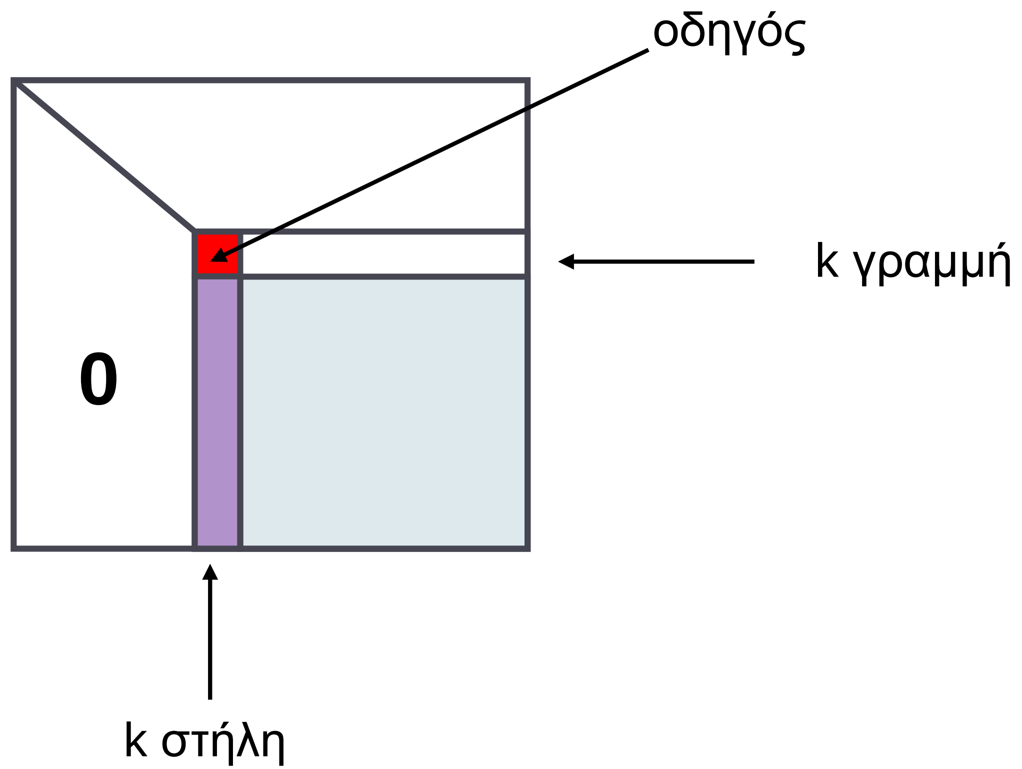
$$b_2^{(2)} = fl\left(b_2^{(1)} - m_{21}b_1^{(1)}\right) = fl(2-10^4) = -10^4$$

- δηλαδή λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \\ -10^4 x_2 &= -10^4 \end{aligned}\right\}, \quad x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$$

Απαλοιφή Gauss.

- Τριγωνοποίηση στο k βήμα:
  - Ο οδηγός πρέπει να είναι μεγάλος αριθμός



Απαλοιφή Gauss - Οδήγηση.

Το πρόβλημα υπήρξε πριν γιατί ο πολλαπλασιαστής ήταν πολύ μεγάλος σε σύγκριση με τα στοιχεία της δεύτερης σειράς, δηλαδή ο οδηγός a_{22} ήταν πολύ μικρός σε σχέση με τα στοιχεία της δεύτερης σειράς.

Απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση ή οδήγηση κατά γραμμές:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 10^{-4} x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_2 &= -1 \end{aligned}\right\} \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 1$$

αφού

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 10^{-4}$$

$$a_{22}^{(2)} = fl\left(a_{22}^{(1)} - m_{21} a_{12}^{(1)}\right) = fl(1 - 1 \cdot 10^{-4}) = fl(-.9999) = -1$$

$$b_2^{(2)} = fl\left(b_2^{(1)} - m_{21} b_1^{(1)}\right) = fl(1 - 2 \cdot 10^{-4}) = fl(-.9998) = -1$$

Απαλοιφή Gauss - Οδήγηση.

Στην απαλοιφή Gauss με *μερική οδήγηση*, όταν απαλείφουμε τον k άγνωστο, δηλαδή στο k βήμα, ανταλλάσσουμε την k γραμμή με αυτήν που έχει το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο στην k στήλη.

Το επιπλέον κόστος είναι:

1ος άγνωστος: n-1 πράξεις για τις συγκρίσεις

2ος άγνωστος: n-2 πράξεις

...

(n-1)ος άγνωστος: 1 πράξη

άρα συνολικά

$$\sum_{i=1}^{n-1} n-i = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2) < \text{κόστος της τριγωνοποίησης}$$

(Απαλοιφή Gauss με *μερική οδήγηση με στάθμιση ή ολική οδήγηση*, όπου οδηγός γίνεται το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του υποπίνακα προς επεξεργασία. Αυτό επιτυγχάνεται με εναλλαγή γραμμών και στηλών του πίνακα.)

Νόρμες διανυσμάτων.

Ορισμός: Μία απεικόνιση ||.||: X→R λέγεται νόρμα, αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$x \in X \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\forall \lambda \in R, \forall x \in X \quad \|\lambda \ x\| = |\lambda| \ \|x\|$$

$$\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$$

Παραδείγματα:

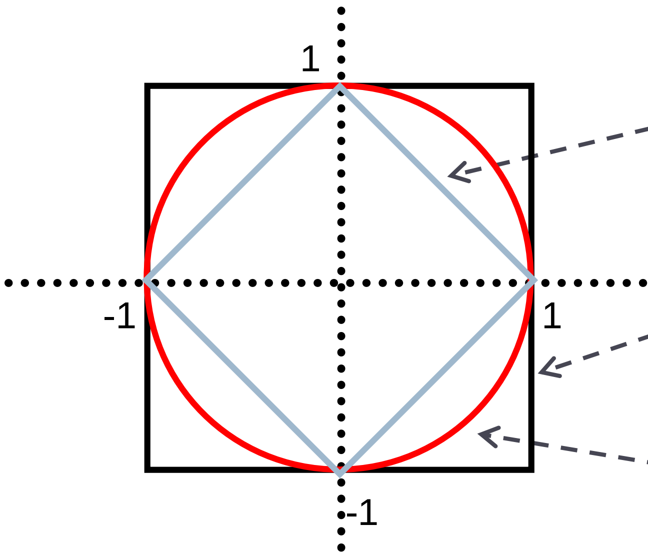
$$\ell_1 : \ (R^n, \|.\|_1), \ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\ell_\infty : \ (R^n, \|.\|_\infty), \ \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

$$\ell_2 : \ (R^n, \|.\|_2), \ \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

Νόρμες διανυσμάτων.

Ο μοναδιαίος κύκλος σε κάθε νόρμα:



$$\ell_1 : \ (R^n, \|.\|_1), \ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\ell_\infty : \ (R^n, \|.\|_\infty), \ \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

$$\ell_2 : \ (R^n, \|.\|_2), \ \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

Νόρμες διανυσμάτων.

<u>Ορισμός:</u> Δύο νόρμες,||.|| και ||.||' , λέγονται ***ισοδύναμες*** αν υπάρχουν σταθερές *m* και *M* τ.ω.:

$$\forall x \in X \quad \mathrm{m}\|x\| \le \|x\|' \le M\|x\|$$

<u>Πρόταση:</u> Όλες οι νόρμες στον R^n είναι ισοδύναμες.

<u>Ορισμός:</u> Έστω ||.||, μια νόρμα στον R^n , τότε η απεικόνιση:

$$\|.\| : R^{nxn} \to R, \quad \|A\| = \sup_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

λέγεται ***φυσική νόρμα πινάκων*** ή νόρμα πινάκων παραγόμενη από την ||.||.

Νόρμες πινάκων.

☺ <u>Παραδείγματα:</u> Αποδείξτε τις εκφράσεις για κάθε νόρμα.

$$\ell_1: \ (R^n, \|.\|_1) \to (R^{nxn}, \|.\|_1), \ \ \|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\ell_\infty: \ (R^n, \|.\|_\infty) \to (R^{nxn}, \|.\|_\infty), \ \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\ell_2: \ (R^n, \|.\|_2) \to (R^{nxn}, \|.\|_2), \ \|A\|_2 = \left(\rho(AA^T)\right)^{1/2}$$

Δείκτης κατάστασης πίνακα.

Ορισμός: Γενικά αν A αντιστρέψιμος τότε ο δείκτης κατάστασης το A ως προς τη νόρμα ||.|| ορίζεται:

$$cond(A) = \frac{\max\limits_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\min\limits_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

Πρόταση: Αν η ||.|| είναι φυσική νόρμα πινάκων, τότε ισχύει:

$$cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Επίσης ισχύουν:

1. $cond(A) \geq 1$, για κάθε πίνακα A.
2. $cond(I) = 1$, I ο μοναδιαίος πίνακας.
3. $cond(\gamma A) = cond(A)$, όπου γ σταθερά.
4. $cond(D) = \max(|d_i|)/\min(|d_i|)$, όπου $D = diag(d_i)$.