Linear Equations -
Direct Methods
Πέμπτη, 21 Μαΐου 2015 10:18 πμ

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

$$Ax = b$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\qquad x = ?$
$x, b \in \mathbb{R}^n$

Πολυπλοκότητα υπολογισμού ορίζουσας ενός πίνακα $n \times n$ είναι $O(\underline{\underline{n!}})$

Απόδειξη με επαγωγή.

- $n=2$ $\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
  κόστος: $2 = O(2!)$

- Υποθέτουμε ότι ισχύει για n
  δηλ. αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow$ η πολυπλοκότητα υπολογισμού της $\det A$ είναι $n!$

Αν $M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \Rightarrow$

$$\det M = m_{11} \det M_{11} + m_{21} \det M_{21} + \dots$$
$$\dots + m_{n+1,1} \det M_{n+1,1} =$$

κόστος $n!$, $n+1$ στο πλήθος

άρα το κόστος είναι $(n+1)\,n! = (n+1)!$

Παρατηρούμε και χρησιμοποιούμε κατάλληλα τις ιδιότητες του πίνακα.

- αραιοί πίνακες (πολλά μηδενικά στοιχεία)

- πυκνοί πίνακες (ελάχιστα ή καθόλου μηδενικά στοιχεία)
- διαγώνιοι
- τριγωνικοί πίνακες

- συμμετρικοί πίνακες

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

- $Ix = y \Rightarrow x = y$
- $Dx = y \Rightarrow x_i = \dfrac{y_i}{d_{ii}}$

Matlab:

x=D\y αν D πίνακας

x=y./d αν μόνο η διαγώνιος είναι αποθηκευμένη στο διάνυσμα d.

- $Lx = y$ όπου

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{aligned} l_{11}x_1 & & &= y_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 & & &= y_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + & \dots & + l_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

Πλήθος πράξεων

$$l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \dots + l_{nn}x_n = y_n$$

Πλήθος πράξεων

$$\Rightarrow \quad x_1 = y_1 / l_{11} \qquad 1$$

$$x_2 = \frac{y_2 - l_{21}x_1}{l_{22}} \qquad 3$$

$$x_3 = \frac{y_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}} \qquad 5$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{y_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 - \dots - l_{n,n-1}x_{n-1}}{l_{nn}} \qquad 2(n-1)+1 = 2n-1$$

$$= \frac{y_n - \sum_{j=1}^{n-1} l_{nj}x_j}{l_{nn}}$$

Αλγόριθμος λύσης κάτω τριγωνικού συστήματος:

$$\boxed{\begin{array}{l} \%\%\ l, y \text{ γνωστά} \\ x_1 = y_1/l_{11} \\ \text{for } i = 2, \dots, n \\ \quad x_i = \dfrac{y_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}} \\ \text{end} \end{array}}$$

Προς τα εμπρός αντικατάσταση (forward substitution)

Πλήθος στοιχείων του $L = \frac{n(n+1)}{2}$

Πλήθος πράξεων:

$$\sum^{n} (\dots) \quad 2\sum^{n} \dots \quad 2\,\frac{n(n+1)}{2} - n - \dots$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - n = 2\frac{n(n+1)}{2} - n =$$
$$= n^2 + n - n = \underline{\underline{n^2}}$$

Αντίστοιχα επιλύω άνω τριγωνικό σύστημα, με τον αλγόριθμο Προς τα πίσω αντικατάσταση (backward substitution)

<u>Άσκηση</u>: Γράψτε τον αλγόριθμο αναλυτικά και υπολογίστε το κόστος του.

Μέθοδοι λύσης γραμμικών συστημάτων $Ax=b$

- Άμεσες $\Longrightarrow x$
- Επαναληπτικές $\Longrightarrow \underline{\underline{x^{(0)}}} \to x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots x^{(n)} \dots$

αρχική προσέγγιση του x

<u>Άμεσες</u>: Gauss, LU παραγοντοποίηση

Ανάλυση Cholesky (για συμμετρικούς πίνακες)

Ανάλυση D, L, U $(A = L \cdot D \cdot U)$

Ιδέα στις Άμεσες Μεθόδους: $A = L \cdot U$

Έστω $A = L \cdot U$ ← άνω τριγωνικός

↑ κάτω τριγωνικός

Τότε $Ax = b \iff$

$L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{y} = b \implies$ $Ly = b \implies y = \ldots$ $O(n^2)$

$Ux = y \implies x = \ldots$ $+O(n^2)$

κόστος

$O(n^2)$

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Γραμμικά συστήματα, πίνακες, διανύσματα.

- Διακριτοποίηση συνεχών προβλημάτων (διαφορικών εξισώσεων) → συστήματα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους.
- Τετραγωνικά συστήματα ($n=m$) σε μορφή πίνακα: $Ax=b$, A nxn πίνακας, b,x διανύσματα n στοιχείων.
- Γραμμική Άλγεβρα: ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης.
- Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα:
  - Αλγόριθμοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων.
  - Κόστος επίλυσης (πολυπλοκότητα αλγορίθμων).
  - Ευστάθεια μεθόδων.
  - Κατάσταση συστημάτων.

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

σε μορφή πίνακα

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

$$
Ax = b
$$

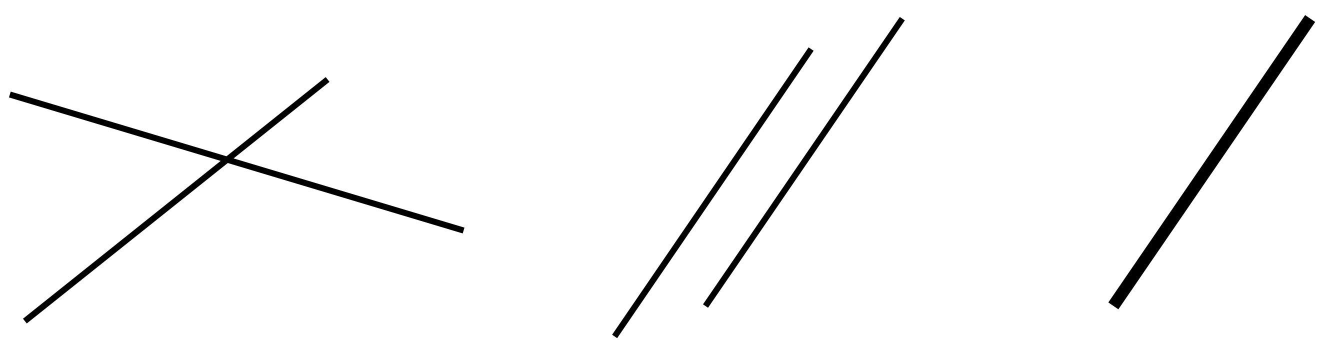
Γραμμική Άλγεβρα

- Το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση ανν:
  - Ο A είναι αντιστρέψιμος
  - det$A$ μη-μηδενική
  - Το ομογενές σύστημα, $Ax=0$, έχει μοναδική λύση τη μηδενική
  - Οι στήλες ή οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- Λύση συστήματος:
  - Κανόνας του Cramer
  - Υπολογισμός του *αντιστρόφου*

Γεωμετρική Ερμηνεία για τα Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων.

Η λύση ενός συστήματος δυο γραμμικών εξισώσεων με 2 αγνώστους, είναι η τομή των δύο ευθειών που αναπαριστούν οι εξισώσεις:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$



1 σημείο | κανένα σημείο | μία ευθεία

Γεωμετρική Ερμηνεία για τα Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων.

Η λύση ενός συστήματος τριών γραμμικών εξισώσεων με 3 αγνώστους, είναι η τομή των τριών επιπέδων που αναπαριστούν οι εξισώσεις:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

Η τομή μπορεί να είναι:

κανένα σημείο (παράλληλα επίπεδα)

1 σημείο

1 ευθεία (άπειρα σημεία)

1 επίπεδο (άπειρα σημεία)

Γραμμική Άλγεβρα.

- Κανόνας του Cramer:

$$A = (a^1, a^2, \ldots a^n), \qquad A_i = (a^1, a^2, \ldots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \ldots a^n)$$

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

☹ Κόστος:

- Ασύμφορος!! Απαιτεί τον υπολογισμό n+1 οριζουσών nxn. Το κόστος είναι O((n+1)!).

Γραμμική Άλγεβρα.

- Χρήση αντιστρόφου:

$$x = A^{-1}b,$$

$$Au^i = e^i, \quad i = 1,2,\ldots,n \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \left(u^1, u^2, \ldots, u^n\right)$$

☹ Κόστος:

- Ασύμφορος! Για να υπολογίσουμε κάθε στήλη του αρκεί να υπολογίσουμε από ένα σύστημα:

  $A\ x^j = e^j$, $j=1,\ldots,n$, $e^j = [0\ldots0\ 1\ 0\ldots0\ ]^T$
- Υπολογισμός αντιστρόφου είναι ισοδύναμο με λύσεις n συστημάτων!!

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα.

- Γραμμικά συστήματα, πίνακες, διανύσματα.
- Απαλοιφή Gauss-LU παραγοντοποίηση.
- Μερική / ολική οδήγηση.
- Ανάλυση Cholesky.
- Νόρμες διανυσμάτων / πινάκων.
- Πολυπλοκότητα μεθόδων απαλοιφής.
- Αξιολόγηση σφάλματος.

Κατηγορίες πινάκων

- Πυκνοί ή αποθηκεύσιμοι:
  - $a_{ij} \neq 0$, $i,j=1,2,\ldots,n$
  - n^2 απαιτούμενες θέσεις μνήμης.
  - $n \leq 1000$ (μικρά συστήματα), $1000 \leq n \leq 10^6$ (μέτρια συστήματα), $10^6 \leq n$ (μεγάλα συστήματα).
  - Χρησιμοποιούμε άμεσες μεθόδους για την λύση συστημάτων με τέτοιους πίνακες.

Κατηγορίες πινάκων (συνέχεια)

- **Αραιοί ή σποραδικοί:**
  - $a_{ij} = 0$ για τα περισσότερα στοιχεία τους.
  - Συνήθως έχουν συγκεκριμένη δομή (διαγώνιοι, τριδιαγώνιοι κλπ.).
  - *Συνήθως* απαιτούνται *O*(n) θέσεις μνήμης.
  - Μερικές φορές δεν αποθηκεύονται, αλλά υπολογίζουμε τα στοιχεία τους όποτε τα χρειαζόμαστε.
  - Χρησιμοποιούμε επαναληπτικές μεθόδους για την λύση συστημάτων με τέτοιους πίνακες.

Κατηγορίες πινάκων (συνέχεια)

- Τριγωνικοί πίνακες(Άνω ή Κάτω Τριγωνικοί):
  - Καλές ιδιότητες.
  - Προκύπτουν από γνωστές μεθόδους ανάλυσης / επεξεργασίας πινάκων (απαλοιφή Gauss).
  - Είναι πολύ εύκολο να λύσουμε συστήματα εξισώσεων που ο πίνακας τους είναι τριγωνικός.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

άνω τριγωνικός

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

κάτω τριγωνικός

Λύση τριγωνικών συστημάτων.

- Άνω τριγωνικός πίνακας / σύστημα:

$$Ux = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n &= b_1 \\ u_{22}x_2 + \ldots + u_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ u_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα άνω τριγωνικού συστήματος.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -17.5x_3 &= -35 \end{aligned}$$

$$-17.5x_3 = -35 \quad \Leftrightarrow x_3 = 2$$

$$x_2 + 2x_3 = 3 \quad \Leftrightarrow x_2 = 3 - 2 \bullet 2 \quad \Leftrightarrow x_2 = -1$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \Leftrightarrow 2x_1 = 6 - (-2 \bullet (-1) + 2) \quad \Leftrightarrow x_1 = 1$$

Λύση άνω τριγωνικών συστημάτων.

- Λύση:

$$u_{nn}x_n = b_n \Leftrightarrow x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \Leftrightarrow u_{n-1,n-1}x_{n-1} = b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n \Leftrightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

$$\vdots$$

$$u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n = b_1 \Leftrightarrow u_{11}x_1 = b_1 - (u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n) \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n)}{u_{11}}$$

Λύση άνω τριγωνικών συστημάτων.

- Αλγόριθμος λύσης:

$$x_n = b_n / u_{nn}$$

$$\text{για } \; k = n-1, n-2, \ldots, 1$$

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j}{u_{kk}}$$

Λύση τριγωνικών συστημάτων.

- Κάτω τριγωνικός πίνακας / σύστημα:

$$Lx = b \Leftrightarrow \begin{aligned} & l_{11}x_1 = b_1 \\ & l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = b_2 \\ & \vdots \\ & l_{n-11}x_1 + \ldots + l_{n-1,n-1}x_{n-1} = b_{n-1} \\ & l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \ldots + l_{n,n-1}x_{n-1} + l_{nn}x_n = b_n \end{aligned}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Λύση κάτω τριγωνικών συστημάτων.

- Λύση:

$$l_{11}x_1 = b_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = b_2 \Leftrightarrow l_{22}x_2 = b_2 - l_{21}x_1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}}$$

$$\vdots$$

$$l_{nn}x_1 + l_{n2}x_2 + \ldots + l_{nn}x_n = b_n \Leftrightarrow l_{nn}x_n = b_n - (l_{nn}x_1 + l_{n2}x_2 + \ldots + l_{n,n-1}x_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{b_n - (l_{nn}x_1 + l_{n2}x_2 + \ldots + l_{n,n-1}x_{n-1})}{l_{nn}}$$

Λύση κάτω τριγωνικών συστημάτων.

- Αλγόριθμος λύσης:

$$x_1 = b_1 / l_{11}$$

$$\text{για } \; k = 2,3,\ldots,n$$

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} x_j}{l_{kk}}$$

Απαλοιφή Gauss.

- ☹ Πως θα λύσουμε γενικά συστήματα $Ax = b$;
- ☺ Αν τα αναγάγουμε σε τριγωνικά θα λυθούν εύκολα!
- ☺ Gauss:
  - ☺ Τριγωνοποίηση: Επεξεργαζόμαστε τον A και το b ώστε να προκύψει ένας άνω τριγωνικός U και ένα c, τ.ω. το $Ux = c$ να είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα.
  - ☺ Οπισθοδρόμηση: Λύνουμε το $Ux = c$, όπως πριν.

Απαλοιφή Gauss - παράδειγμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

Εξίσωση 3 ← Εξίσωση 3 – (5/2)*Εξίσωση 1

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -11 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

Εξίσωση 3 ← Εξίσωση 3 – (8)*Εξίσωση 2

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -17.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -35 \end{bmatrix}$$

Απαλοιφή Gauss.

- Τριγωνοποίηση: $A \to U$ - 1ο βήμα

  (απαλοιφή του πρώτου αγνώστου)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

πολλαπλασιαστές

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - m_{21}a_{12} & \dots & a_{2n} - m_{21}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} - m_{n1}a_{12} & \dots & a_{nn} - m_{n1}a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - m_{21}b_1 \\ \vdots \\ b_n - m_{n1}b_1 \end{bmatrix}, \quad m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, \dots, n$$

Απαλοιφή Gauss.

- Είναι φανερό από την παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - m_{21}a_{12} & \cdots & a_{2n} - m_{21}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} - m_{n1}a_{12} & \cdots & a_{nn} - m_{n1}a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - m_{21}b_1 \\ \vdots \\ b_n - m_{n1}b_1 \end{bmatrix}, \qquad m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, \ldots, n$$

ότι $E\xi_i \leftarrow E\xi_i - (a_{i1} / a_{11}) * E\xi_1$

<u>Άσκηση:</u> Γιατί δεν χρησιμοποιούμε τον επόμενο μετασχηματισμό;

$$E\xi_i \leftarrow E\xi_1 - (a_{11} / a_{i1}) * E\xi_i$$

Απαλοιφή Gauss.

- Τριγωνοποίηση: $A \to U$ - 2ο βήμα

  (απαλοιφή του δεύτερου αγνώστου)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

πολλαπλασιαστές

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} - m_{32}a'_{23} & \cdots & a'_{3n} - m_{32}a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a'_{n3} - m_{n2}a'_{23} & \cdots & a'_{nn} - m_{n2}a'_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 - m_{32}b'_2 \\ \vdots \\ b'_n - m_{n2}b'_2 \end{bmatrix}, \qquad m_{i2} = \frac{a'_{i2}}{a'_{22}}, \quad i = 3, \dots, n$$

Απαλοιφή Gauss.

- Τριγωνοποίηση: $A \rightarrow U$, n βήματα…

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad b^{(n)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix},$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \qquad i, j = k+1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}, \qquad i = k+1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad i = k+1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Υλοποίηση Gauss στον υπολογιστή.

Αποτελείται από 3 φωλιασμένα for-loop.

Για την αποθήκευση των νέων τιμών δεν χρειαζόμαστε επιπλέον θέσεις μνήμης.

Οι πολλαπλασιαστές αποθηκεύονται στο κάτω τριγωνικό κομμάτι του A (που η απαλοιφή το μετατρέπει σε 0).

Τα νέα στοιχεία του A στις αντίστοιχες θέσεις στο άνω τριγωνικό, αφού οι παλιότερες τιμές δεν χρειάζονται στα επόμενα βήματα.

βήματα

$\text{for } k = 1,\ldots, n-1$

γραμμές κάτω από τον οδηγό

$\quad \text{for } i = k+1,\ldots, n$

$$\qquad m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

στήλες δεξιά από τον οδηγό

$\qquad \text{for } j = k+1,\ldots, n$

$$\qquad\quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}$$

$\qquad \text{end}$

$\quad \text{end}$

end

Απαλοιφή Gauss.

- Οπισθοδρόμηση: Επίλυση (ισοδύναμου) άνω τριγωνικού συστήματος (βλ. διαφάνεια 13).
- Πολυπλοκότητα Αλγόριθμου - Πλήθος πράξεων:
  - Τριγωνοποίηση:

υπολογισμός στοιχείων υποπινάκων

υπολογισμός πολλαπλασιαστών

υπολογισμός δεξιού μέρους

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left\{(n-i)^2+(n-i)\right\}=\frac{n^3-n}{3} \\ \displaystyle (n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}=\frac{n^3}{3}+O(n^2)$$

  - Οπισθοδρόμηση: $1+2+\ldots+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

  - Σύνολο: $\dfrac{n^3+3n^2-n}{3}=\dfrac{n^3}{3}+O(n^2)$

LU παραγοντοποίηση.

Κατά την απαλοιφή Gauss η τριγωνοποίηση του A μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad A^{(2)} = M_1 A, \quad b^{(2)} = M_1 b \ \ldots$$

$$\ldots\ A^{(n)} = M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A \quad \Rightarrow \quad A = M_1^{-1} \cdots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} A^{(n)}$$

$$\ldots\ b^{(n)} = M_{n-1} \cdots M_2 M_1 b \quad \Rightarrow \quad b = M_1^{-1} \cdots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} b^{(n)}$$

LU παραγοντοποίηση (συνέχεια) .

☺ Αποδεικνύεται (αφήνεται ως άσκηση) ότι:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = M_1^{-1} \cdots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} \quad \Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{n-1n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(n)} = U \Rightarrow A = LU$$

LU παραγοντοποίηση.

Αλγόριθμος για τον υπολογισμό των στοιχείων των πινάκων L και U:

$$\text{for } \; i = 1, \ldots, n$$

$$\quad \text{for } \; j = 1, \ldots, i-1$$

$$\qquad L_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}}{U_{jj}}$$

$$\quad \text{end}$$

$$\quad L_{ii} = 1$$

$$\quad \text{for } \; j = i, \ldots, n$$

$$\qquad U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}$$

$$\quad \text{end}$$

$$\text{end}$$