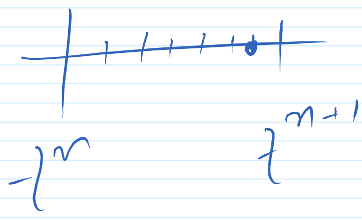
$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ & & & \tau_2 \\ & & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

Runge-Kutta:

$$? \quad y^{n+1} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} b_j \underbrace{f(t^{n,j}, y^{n,j})}$$

$$y^{n,i} = y^n + \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q$$

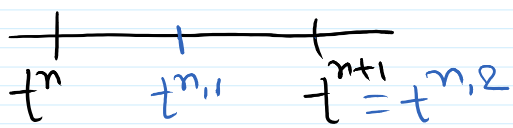
$$t^{n,i} = t^n + \tau_i h \qquad i = 1, \dots, q$$



Π.χ.

$q = 2 \qquad \tau = [\,1/2,\ 1\,]$

$$\begin{array}{cc|cl} 1/4 & 1/3 & 1/2 & \tau_1 \\ 1/2 & 1 & 1 & \tau_2 \\ \hline 1/3 & 2/3 & & \\ b_1 & b_2 & & \end{array}$$



$$t^{n,1} = t^n + \tau_1 \cdot h = t^n + \frac{h}{2}$$

$$t^{n,2} = t^n + t_2 h = t^n + h = t^{n+1}$$

$$y^{n,1} = y^n + h \sum_{j=1}^{2} a_{1j} f(y^{n,j}, t^{n,j}) =$$

$$= y^n + h\left(\frac{1}{4} f(y^{n,1}, t^{n,1}) + \frac{1}{3} f(y^{n,2}, t^{n,2})\right)$$

$$y^{n,2} = y^n + h\left(\frac{1}{2} f(y^{n,1}, t^{n,1}) + 1 f(y^{n,2}, t^{n,2})\right)$$

Παράδειγμα: αν $y' = f(y,t) = y(t) + 2t$

Το παραπάνω σύστημα μετατρέπεται σε:

$$y^{n,1} = y^n + h\left[\frac{1}{4}\left(y^{n,1}+2t^{n,1}\right) + \frac{1}{3}\left(y^{n,2}+2t^{n,2}\right)\right]$$

$$= y^n + h\left[\frac{1}{4} y^{n,1} + \frac{1}{2}\left(t^n+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3} y^{n,2} + 2t^{n+1}\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(1-\frac{h}{4}\right) y^{n,1} - \frac{h}{3} y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2}\left(t^n+\frac{h}{2}\right) + 2ht^{n+1}} \qquad 1^{η}$$

Όμοια

$$y^{n,2} = y^n + h\sum_{j=1}^{2} a_{2j} f\left(y^{n,j}, t^{n,j}\right) =$$

$$= y^n + h\left(\frac{1}{2} f\left(y^{n,1}, t^{n,1}\right) + 1 f\left(y^{n,2}, t^{n,2}\right)\right)$$

$$= y^n + h\left(\frac{1}{2}\left(y^{n,1} + 2t^{n,1}\right) + y^{n,2} + 2t^{n,2}\right) =$$

$$= y^n + h\left(\frac{1}{2}\left(y^{n,1} + 2\left(t^n+\frac{h}{2}\right)\right) + y^{n,2} + 2t^{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(1-\frac{h}{2}\right) y^{n,1} - h\, y^{n,2} = y^n + h\left(t^n+\frac{h}{2}\right) + 2ht^{n+1}} \qquad 2^{η}$$

Λύνοντας $1^{η} + 2^{η} \Rightarrow y^{n,1}, y^{n,2}$

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Διακριτοποίηση παραγώγου...

Ένας άλλος τρόπος να δούμε την διακριτοποίηση της παραγώγου είναι μέσα από ολοκλήρωση:

$$\mathrm{y'(t)} = f(t, y), \quad t \in (a, b)$$

αφού $t^n, t^{n+1} \in (a, b)$

μπορώ να ολοκληρώσω: $$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y)dt$$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y)dt$$

Ο τρόπος που θα προσεγγίσω το ολοκλήρωμα θα μου δώσει διαφορετικές μεθόδους με διαφορετική τάξη ακρίβειας:

- Αριστερή ορθογωνίου → άμεση Euler (γιατί;;;;)
- Δεξιά ορθογωνίου → πεπλεγμένη Euler (γιατί;;;;)
- Τραπεζίου
- Simpson(βλ. παρακάτω σε μεθόδους Runge-Kutta)

Σφάλματα

Τύποι σφαλμάτων:

1. σφάλμα διακριτοποίησης (διακριτή αριθμητική)
   1. Εξαρτάται από τη μέθοδο
   2. Τοπικό σφάλμα: $d_n=y_{n+1}-u_n(t_{n+1})$
   3. Ολικό σφάλμα: $e_n=y_n-y(t_n)$

2. σφάλμα στρογγύλευσης (πεπερασμένη αριθμητική)
   1. Εξαρτάται από τον υπολογιστή και το πρόγραμμα που υλοποιεί την μέθοδο.

Μέθοδοι Επίλυσης

- Μέθοδοι σειρών Taylor
- Μέθοδοι Runge-Kutta
- Πολυβηματικές μέθοδοι
- Μέθοδοι πρόβλεψης/διόρθωσης

Μέθοδος σειρών Taylor

- Αν η y(t) είναι ομαλή τότε:

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \dots$$

- Euler=Taylor με τους δύο πρώτους όρους (τάξης 1)
- Μέθοδος τάξης p

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \dots + \frac{h^p}{p!} y_n^{(p)}$$

$$y'(t) = f(y(t), t)$$

$$y''(t) = f_y y' + f_t \quad \dots$$

- Πολύ αποδοτικές / περιορισμένης εφαρμογής.

Μέθοδοι Runge-Kutta

Βάση των Runge-Kutta οι μέθοδοι Taylor.

Αποφεύγουν να υπολογίσουν παραγώγους τάξης μεγαλύτερης του 1.

Οι μέθοδοι Euler είναι ειδική περίπτωση των μεθόδων Runge-Kutta.

<u>Γενική μορφή:</u>

Έχει q ενδιάμεσα στάδια για να υπολογίσει το y_{n+1} έχοντας υπολογίσει το y_n.

$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

με b_j δεδομένες σταθερές και

$$\left.\begin{aligned} y^{n,i} &= y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \\ t^{n,i} &= t^n + \tau_i\, h \end{aligned}\right\} \quad 1 \le i \le q$$

και a_{ij} , τ_i δεδομένες σταθερές.

Μέθοδοι Runge-Kutta (συνέχεια)

Οι σταθερές συγκεντρώνονται σε έναν πίνακα

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array} = \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

Αν ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός τότε οι μέθοδοι είναι άμεσοι

Άμεση Euler, τάξης 1, $q=1$, $a_{11}=\tau_1=0$, $b_1=1$.

$$\begin{array}{c|c} a_{11} & \tau_1 \\ \hline b_1 & \end{array} = \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j}) = y^n + hf(t^n, y^n)$$

$$y^{n,1} = y^n, \qquad t^{n,j} = t^n$$

Μέθοδοι Runge-Kutta (συνέχεια)

Οι σταθερές συγκεντρώνονται σε έναν πίνακα

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array} = \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

Αν υπάρχουν $a_{ij} \neq 0$, $i \le j$, τότε η μέθοδος είναι πεπλεγμένη

Πεπλεγμένη Euler, τάξης 1, $q=1$, $a_{11}=\tau_1=b_1=1$.

$$\begin{array}{c|c} a_{11} & \tau_1 \\ \hline b_1 & \end{array} = \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j}) = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$$

$$t^{n,j} = t^n + 1h = t^{n+1}$$

$$y^{n,1} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j}) = y^{n+1}$$

Μέθοδοι Runge-Kutta (συνέχεια)

Οι σταθερές συγκεντρώνονται σε έναν πίνακα

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array} = \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

Η πιο γνωστή Runge-Kutta είναι 4ης τάξης

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & \end{array}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3\right), \\ k_0 = hf\left(y_n, t_n\right), \\ k_1 = hf\left(y_n + \frac{1}{2}k_0, t_n + \frac{h}{2}\right), \\ k_2 = hf\left(y_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}\right), \\ k_3 = hf\left(y_n + k_2, t_n + h\right). \end{cases}$$

Αν f συνάρτηση μόνο του t τότε η μέθοδος συμπίπτει με την μέθοδο του Simpson.

Πολυβηματικές Μέθοδοι

- Βασική ιδέα:
  - Το y^{n+1} υπολογίζεται από τα $y^n, y^{n-1},\dots,y^{n-k+1}$ και τα $f(y^n,t^n), f(y^{n-1},t^{n-1}),\dots,f(y^{n-k+1}, t^{n-k+1})$

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_{n+1-i} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+1-i}$$

  - Γενική γραμμική k-βηματική μέθοδο
  - $\beta_0 = 0 \rightarrow$ άμεση
  - $\beta_0 \neq 0 \rightarrow$ πεπλεγμένη

Πολυβηματικές Μέθοδοι - Παράδειγμα

- Μια 2-βηματική μέθοδος:

$$\begin{cases} y^0 = y_0, & 1 \ \text{δεδομένο} \\ y^{n+1} = y^{n-1} + 2hf(t^n, y^n), & n = 1,\dots,N-1 \end{cases}$$

- Οι μέθοδοι Euler θεωρούνται μονοβηματικές.
- Η μέθοδος του Simpson θεωρείται και ως 2-βηματική μέθοδο.
- Γενικά οι πολυβηματικές μέθοδοι είναι πιο ευσταθής από τις Runge-Kutta.

Μέθοδοι Πρόβλεψης-Διόρθωσης

- **Βασική ιδέα:**
  1. Χρήση δύο πολυβηματικών μεθόδων συγχρόνως.
  2. Μια άμεση μέθοδο για *πρόβλεψη*.
  3. Μια πεπλεγμένη για *διόρθωση*.
  4. Κλασσικό παράδειγμα η μέθοδος του Adams 4ης τάξης.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

- **Αλγόριθμος:**
  1. Υπολόγισε την $y^{(0)}_{n+1}$ με την πρόβλεψη
  2. Θέσε $f^{(i)}_{n+1} = f(y^{(i)}_{n+1}, t_{n+1})$
  3. Υπολόγισε την $y^{(i+1)}_{n+1}$ με τη διόρθωση
  4. Αν $| y^{(i+1)}_{n+1} - y^{(i)}_{n+1} | > \varepsilon$ τότε πήγαινε στο βήμα 2, αλλιώς $y_{n+1} = y^{(i)}_{n+1}$

Άκαμπτες εξισώσεις

Ορισμός:

Χρονική σταθερά μιας λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης είναι ο χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί η λύση κατά ένα παράγοντα 1/e.

Ορισμός:

Μια ευσταθής διαφορική εξίσωση λέγεται άκαμπτη αν έχει μια φθίνουσα εκθετική λύση με χρονική σταθερά πολύ μικρή συγκρινόμενη με το διάστημα ολοκλήρωσης.

Ειδικές μέθοδοι για άκαμπτες εξισώσεις

- πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$y^{n+1} = y^n + hf(y^{n+1}, t^{n+1})$$