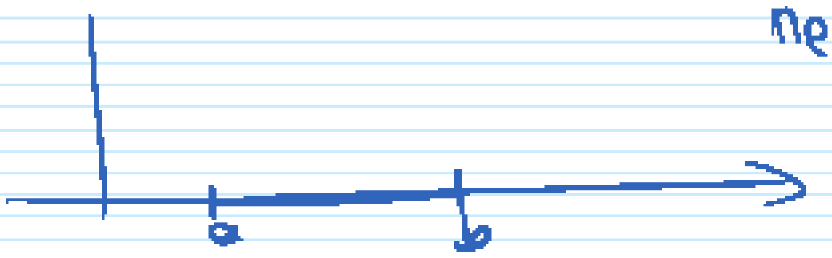
$y' = f(y,t)$ $\quad t \in [a,b]$ χωρίο για Δ.Ε.

$y(a) = y_0$

συνεχές πρόβλημα

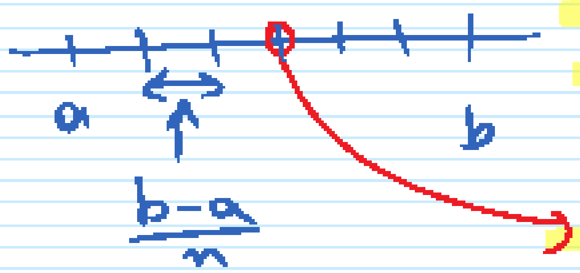


Συνεχές ⟶ Διακριτό πρόβλημα

$y(t)$? $\forall t \in [a,b]$ $\qquad y(t_i)$ $\quad t_i \in [a,b]$, $i = 0, \dots, n$

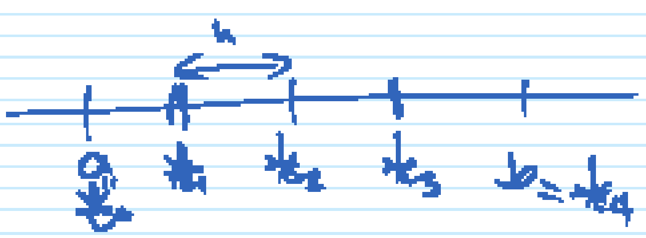
1ο βήμα: Διακριτοποίηση χωρίου (δηλ. $[a,b]$)

– Ομοιόμορφη διαμέριση του $[a,b]$



Χωρίζω το $[a,b]$ σε n διαστήματα ίσου μήκους $\frac{b-a}{n} = h$

$t_i = a + i \cdot h \quad i = 0, \dots, n$



$\frac{b-a}{4} = h$

$t_0 = a$

$t_1 = a + h$

$t_2 = t_1 + h = a + 2h$

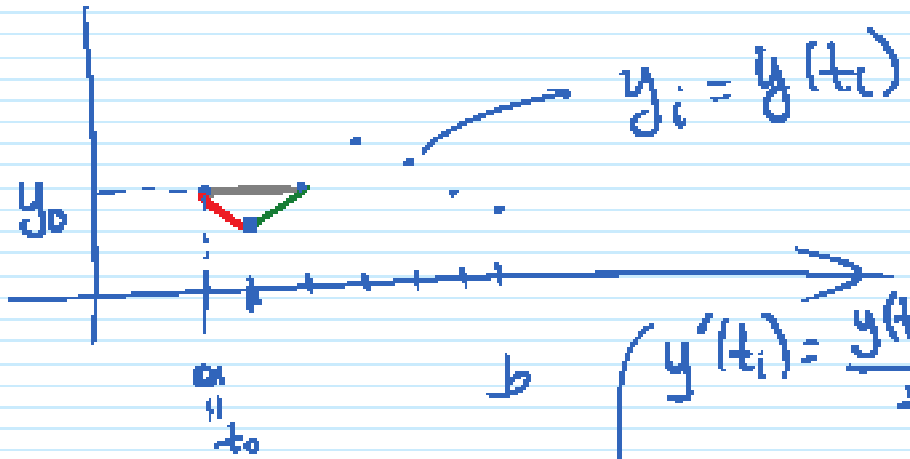
$t_3 = t_2 + h = a + 3h$

$t_4 = t_3 + h = a + 4h$

Τώρα έχω το εξής πρόβλημα:

$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \quad i = 0, 1, \dots, n$

$y(t_0) = y_0$



Πεπερασμένες διαφορές

$$\begin{cases} y'(t_i) = \dfrac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} & (\text{Ε.Ε.}) \\[2ex] y'(t_i) = \dfrac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} & (\text{Α.Ε.}) \\[2ex] y'(t_i) = \dfrac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} \end{cases}$$

Αν $y'(t_i) = \dfrac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$

Οι εξισώσεις μετατρέπονται σε:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(y_i, t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$y(a) = y(t_0) = y_0$$

$i=0 \rightarrow \dfrac{y_1 - y_0}{h} = f(y_0, t_0) \Rightarrow y_1 = y_0 + h f(y_0, t_0)$

$i=1 \Rightarrow \dfrac{y_2 - y_1}{h} = f(y_1, t_1) \Rightarrow y_2 = y_1 + h f(y_1, t_1)$

$$\boxed{\begin{array}{c} i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad y_{i+1} = y_i + h f(y_i, t_i) \\ y_0 = y(a) \end{array}}$$

Άμεση Euler

Π.χ.

$$\left.\begin{array}{l} y'(t) = \lambda y(t) \quad t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y(t) = e^{\lambda t} \cdot c \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y(t_0) = e^{\lambda t_0} \cdot c = y_0 \\ c = y_0 \cdot e^{-\lambda t_0} = y_0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{\lambda t}} \quad t \in [0, T]$$

$y(0) = y_0$ $\qquad\qquad$ $y(t_0) = y_0$

$C = y_0 \cdot e^{-\lambda 0} = y_0$

$\boxed{y(t) = y_0 e^{\lambda t}}$ $\quad t \in [0,T]$

$\boxed{y(T) = y_0 e^{\lambda T}}$

• Διακριτοποίηση χωρίου $\quad t_i = i h \quad i = 0, \dots, n$

$$h = \frac{T}{n}$$

• Διακριτοποίηση παραγώγων με Α.Ε.

$$y_{i+1} = y_i + h f(y_i, t_i) = y_i + h \cdot \lambda \cdot y_i$$
$$= (1 + h\lambda) y_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

y_0

$y_1 = (1+h\lambda) y_0$

$y_2 = (1+h\lambda) y_1 = (1+h\lambda)^2 y_0$

$y_3 = (1+h\lambda) y_2 = (1+h\lambda)^3 y_0$

$\vdots$

$y_{i+1} = (1+h\lambda) y_i = (1+\lambda h)^{i+1} y_0 \quad i = 0, \dots, n-1$

$\vdots$

$$y_n = (1+\lambda h)^n y_0 = \left(1 + \lambda \frac{T}{n}\right)^n y_0 \xrightarrow{n \to \infty} \underline{e^{\lambda T} y_0}$$

$\Updownarrow$

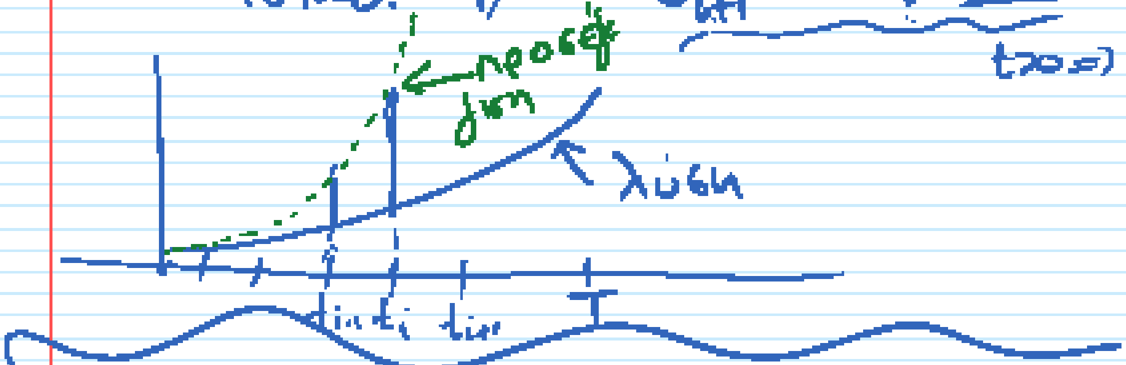
$y(t_n) = y(T)$ $\qquad\qquad$ $a_n = \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^c$

Θεωρητικά: <u>OK!</u>

Η Δ.Ε. με την Α.Ε. $\Longrightarrow$ ασταθές πρόβλημα

(σελ. 9) $\quad \varepsilon_{i+1} \approx \varepsilon_i \, \underline{e^{t_i}}$

$t > 0 \Rightarrow e^{t_n} > 1$



- Διακριτοποίηση του προβλήματος:

$$y'(t_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$ Έμμεση Euler

$$\Rightarrow \quad \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(y_i, t_i), \quad i = 1, 2, \dots n$$

$$y_i - h f(y_i, t_i) = y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Παράδειγμα: $y' = \lambda y \quad t \in [0, T]$

$y(0) = y_0$

Με Ε.Ε.:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = \lambda y_i \Leftrightarrow y_i - \lambda h y_i = y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots n$$

$$y_i (1 - \lambda h) = y_{i-1} \Rightarrow y_i = \frac{1}{1 - \lambda h} y_{i-1}$$

$i=1$, $\quad y_1 = \frac{1}{1-\lambda h} y_0$

$i=2$ $\quad y_2 = \frac{1}{1-\lambda h} y_1 = \frac{1}{(1-\lambda h)^2} y_0$

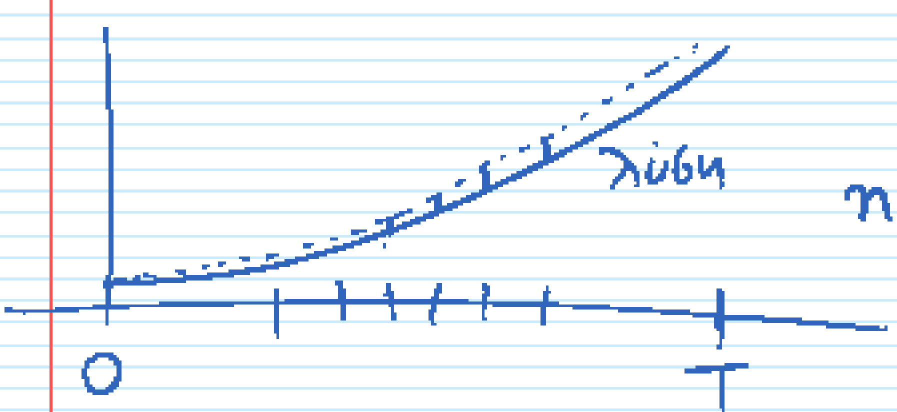
$\vdots$

$$y_i = \frac{1}{(1-\lambda h)^i} y_0 \quad i = 1, 2, \dots n$$

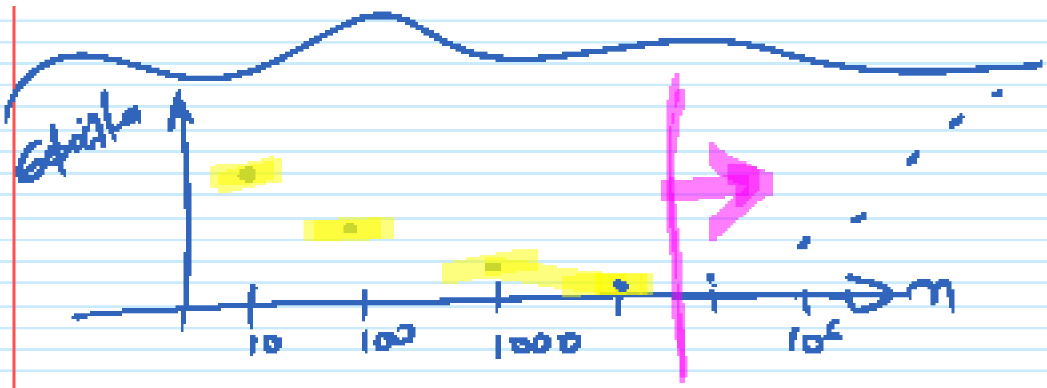
$$y_n = \frac{1}{(1-\lambda h)^n} y_0 = (1-\lambda h)^{-n} y_0$$

$$= \left(1 - \lambda \frac{T}{n}\right)^{-n} y_0$$

$$a_n = \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{+c}$$



n σταθερό



Σφάλμα
10
100
1000
10^6
n

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Βασικά σημεία

- Βασικό πρόβλημα: επίλυση διαφορικής εξίσωσης (Δ.Ε.)
- Αριθμητικές λύσεις.
- Σφάλματα.
- Μέθοδοι.
- Άκαμπτες εξισώσεις.
- Προβλήματα συνοριακών συνθηκών.
- Λογισμικό MATLAB.
- Βιβλιοθήκες FORTRAN.

Βασικό Πρόβλημα -
Επίλυση διαφορικής εξίσωσης

- **Διαφορική εξίσωση 1ης τάξης:**

$$y' = f(y,t), \qquad a \le t \le b$$
$$y(a) = y_0$$

- **Απλό παράδειγμα:**

$$f(y,t) = y \rightarrow y(t) = Ce^t$$

όπου το C προσδιορίζεται από την (δεδομένη) αρχική τιμή $y(t_0)$.

Πρόβλημα αρχικών τιμών (εξαρτάται από το $y(t_0)$)

Βασικό Πρόβλημα -
Επίλυση συστήματος διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ)

- **Σύστημα διαφορικών εξισώσεων:**

$$\begin{cases} y' = f(y,z,t) \\ z' = g(y,z,t) \end{cases},$$

με αρχικές τιμές:

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Βασικό Πρόβλημα - Επίλυση διαφορικής εξίσωσης

- **Ένα ειδικό παράδειγμα:**

$$\begin{cases} y'(t) = p(t)y(t) + q(t), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

αν p, q συνεχής συναρτήσεις τότε το πρόβλημα έχει μια και μοναδική λύση:

$$y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds} \left\{ y_0 + \int_a^t q(s) e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau} ds \right\}, \qquad a \le t \le b$$

Βασικό Πρόβλημα: Επίλυση διαφορικής εξίσωσης

☹ **Δεν υπάρχει πάντα «μια και μοναδική» λύση στο πρόβλημα.**

- **Παράδειγμα:** $\begin{cases} y' = y^2, & 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Αν $0 \le t < 1$ **τότε η λύση είναι η**

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

$t \to 1^-$ **τότε** $y(t) \to \infty$ **και άρα δεν υπάρχει λύση σε όλο το διάστημα** $[0, 2]$.

Βασικό Πρόβλημα: Επίλυση διαφορικής εξίσωσης

☹ **Δεν υπάρχει πάντα «μια και μοναδική» λύση στο πρόβλημα.**

- **Παράδειγμα:** $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Έχει πολλές λύσεις, π.χ.:

$$y(t) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

και

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{(t - 1/2)^2}{4} & , \quad \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

Θεωρία

☺ *Αν f:[a, b]xR^m → R^m, συνεχής, Lipschitz ως προς y και ως προς μια νόρμα ισχύει:*

$$\exists L \in R \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall\, y_1, y_2 \in R^m$$

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

τότε το *πρόβλημα αρχικών τιμών* **λύνεται** *μονοσήμαντα!!!!!*

(δηλαδή υπάρχει λύση και είναι μοναδική)

Αριθμητικές Λύσεις

- **Ελάχιστες διαφορικές εξισώσεις μπορούν να λυθούν ακριβώς → Αριθμητική επίλυση.**
- **Χαρακτηριστικά μεθόδων:**
  - Μέγεθος αποδεκτού σφάλματος(ανοχή)
  - Κόστος λύσης
- **Μεθόδοι διαφορών**
  - Μονοβηματικές (Euler)
  - Πολυβηματικές
- **Ασταθής Δ.Ε.:** $y'=y \rightarrow \varepsilon_{n+1} \sim e^{tn}\,\varepsilon_n$
- **Ευσταθής Δ.Ε.:** $y'=-y \rightarrow \varepsilon_{n+1} \sim e^{-tn}\,\varepsilon_n$

Πρώτα βήματα στην αριθμητική επίλυση

Γενικά: Όλα τα προβλήματα διαφορικών εξισώσεων είναι συνεχή προβλήματα.

Για να λυθούν σε υπολογιστή πρέπει να μετατραπούν σε διακριτά προβλήματα.

1ο βήμα: διακριτοποίηση χωρίου εξίσωσης

2ο βήμα: διακριτοποίηση παραγώγων (πεπερασμένες διαφορές, πεπερασμένα στοιχεία, πεπερασμένοι όγκοι)

Πρώτα βήματα στην αριθμητική επίλυση

Ειδικά: Για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'=f(y,t),\ t \in [\alpha, \beta], \quad y(\alpha)= y_0$$

Διακριτοποίηση του χωρίου, ώστε να υπολογίσουμε τη λύση σε N+1 ισαπέχοντα σημεία

$$h=\frac{\beta-a}{N}, \qquad t^i = a+ih, \qquad i=0,1,2\ldots N$$

Το πρόβλημα τώρα γράφεται ως

$$y'(t^i)=f(y(t^i),t^i), \qquad i=0,1,2\ldots N$$
$$y(t^0)=y^0$$

Διακριτοποίηση παραγώγων:

$$y'(t^i)\approx \frac{y(t^{i+1})-y(t^i)}{h}=\frac{y^{i+1}-y^i}{h}, \qquad i=0,1,2\ldots N$$

ή

$$y'(t^i)\approx \frac{y(t^i)-y(t^{i-1})}{h}=\frac{y^i-y^{i-1}}{h}, \qquad i=1,2\ldots N$$

Μέθοδος Euler (απλή - άμεση)

Για τη διακριτοποίηση της παραγώγου επιλέγουμε την:

$$y'(t^i) \approx \frac{y(t^{i+1}) - y(t^i)}{h} = \frac{y^{i+1} - y^i}{h}, \qquad i = 0,1,2\ldots N-1$$

Οπότε παράγουμε την ακολουθία προσεγγίσεων $y^n \sim y(t^n)$:

$$y^{i+1} = y^i + h\, f(y^i, t^i), \qquad i = 0,1,2\ldots N-1$$

ή $y^1 = y^0 + h\ f(y^0, t^0)$

$y^2 = y^1 + h\ f(y^1, t^1)$

....

$y^N = y^{N-1} + h\ f(y^{N-1}, t^{N-1})$

Παράδειγμα

Για το πρόβλημα $y'=\lambda y,\ t\in[0,T]$ **με αρχική τιμή** $y(0)=y_0$, **από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η λύση είναι** $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$.

Με την Άμεση Euler παίρνουμε την ακολουθία:

$$y^{i+1} = y^i + h\,f(y^i, t^i) = y^i + h\lambda\, y^i, \quad i = 0,1,2\ldots N-1$$

$$\Leftrightarrow \quad y^{i+1} = (1+h\lambda)\, y^i, \quad i = 0,1,2\ldots N-1$$

το οποίο σημαίνει ότι:

$$y^i = (1+h\lambda)\, y^{i-1} = (1+h\lambda)^2\, y^{i-2} = \cdots = \left(1+\frac{\lambda T}{N}\right)^i y^0, \quad i = 1,2,\ldots,N$$

$$y^N = (1+h\lambda)\, y^{N-1} = (1+h\lambda)^2\, y^{N-2} = \cdots = \left(1+\frac{\lambda T}{N}\right)^N y^0$$

$$y^N = \left(1+\frac{\lambda T}{N}\right)^N y^0 \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{\lambda T} y^0$$

Μέθοδος Euler
(πεπλεγμένη - έμμεση)

Για τη διακριτοποίηση της παραγώγου επιλέγουμε την:

$$y'(t^i) \approx \frac{y(t^i) - y(t^{i-1})}{h} = \frac{y^i - y^{i-1}}{h}, \qquad i = 1,2\ldots N$$

Οπότε παράγουμε την ακολουθία προσεγγίσεων $y^n \sim y(t^n)$:

$$y^i - h\, f(y^i, t^i) = y^{i-1}, \qquad i = 1,2\ldots N$$

ή $\quad y^1 - h\, f(y^1, t^1) = y^0$

$\quad\quad y^2 - h\, f(y^2, t^2) = y^1$

....

$\quad\quad y^N - h\, f(y^N, t^N) = y^{N-1}$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Με την Έμμεση Euler παίρνουμε την ακολουθία:

$$y^{i+1} = y^i + h\,f(y^{i+1}, t^{i+1}) = y^i + h\,\lambda\, y^{i+1}, \quad i = 0,1,2\ldots N-1$$

$$\Leftrightarrow \quad y^{i+1} = (1 - h\lambda)^{-1} y^i, \quad i = 0,1,2\ldots N-1$$

το οποίο σημαίνει ότι:

$$y^i = (1 - h\lambda)^{-1}\, y^{i-1} = (1 - h\lambda)^{-2}\, y^{i-2} = \cdots = \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^{-i} y^0, \quad i = 1,2,\ldots,N$$

$$y^N = (1 - h\lambda)^{-1}\, y^{N-1} = (1 - h\lambda)^{-2}\, y^{N-2} = \cdots = \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^{-N} y^0$$

$$y^N = \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^{-N} y^0 \xrightarrow[N\to\infty]{} \left(e^{-\lambda T}\right)^{-1} y^0 = e^{\lambda T} y^0$$