Θέμα 1

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Ελάχιστο / Μέγιστο

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \end{bmatrix} \overset{?}{=} 0$$

Newton σε πολλές διαστάσεις.

$$J_\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} \partial \varphi_1/\partial x & \partial \varphi_1/\partial y \\ \partial \varphi_2/\partial x & \partial \varphi_2/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial f/\partial x \partial y \\ \partial f/\partial x \partial y & \partial^2 f/\partial y^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^{(n+1)} \\ y^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{bmatrix} - s^{(n)}$$

$$J_\varphi(x^{(n)}, y^{(n)}) * \underline{s^{(n)}} = \varphi(x^{(n)}, y^{(n)})$$

Θέμα 1 (A)

$$f(x,y) = \cos(x) - x^2 - y^2$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(x) - 2x \\ -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix}$$

$$J_\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} \partial \varphi_1/\partial x & \partial \varphi_1/\partial y \\ \partial \varphi_2/\partial x & \partial \varphi_2/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(x) - 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ \\ \ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$J_\varphi(x^{(0)}, y^{(0)}) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$J_\varphi(x^{(0)}, y^{(0)})\, S^{(0)} = \varphi(x^{(0)}, y^{(0)}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} S^{(0)} = -\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} + S^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Θέμα 3 (A)

x	1	2	4	6
y	5	11	?	?

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x \in [1,2] \\ -2x^2 + 14x - 9 & x \in [2,4] \\ bx^2 + cx + 5 & x \in [4,6] \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & x \in [1,2] \\ -4x + 14 & x \in [2,4] \\ 2bx + c & x \in [4,6] \end{cases}$$

a) a?

$$f_-(2) = f_+(2) \Leftrightarrow 2a - 1 = \underbrace{-2(4) + 28 - 9}_{=11} =$$

$$\boxed{a = 6}$$

$$f_-'(2) = f_+'(2) \Leftrightarrow 6 = (-4x + 14)_{x=2}$$

$$= (-8 + 14) = 6 \checkmark$$

b) b, c?

$$f_-(4) = f_+(4) \Rightarrow -2(4^2) + 14 \cdot 4 - 9 = b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + 5$$

$$\boxed{16b + 4c = -5 - 9 - 32 + 56}$$

$f_-(4)= f_+(4) \Rightarrow$

$$\boxed{16b+4c=-5-9-32+56}$$

$$f'_-(4)=f'_+(4) \Rightarrow -4(4)+14=2b\cdot 4+c$$

$$\boxed{8b+c=-2}$$

$b=$

$c=$

γ) Η προσέγγιση είναι το $f(5)=b5^2+c5+5$

Θέμα 3(Β):

X	1	2	3
Y	?	5	4

$p(x)=-11+14x-3x^2$

Newton: $b_0+b_1(x-1)+b_2(x-1)(x-2)$

α) $\underline{\underline{b_2=-3}}$ (είναι συντελεστής του x^2)

β) Lagrange

$$p(x)=y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x)$$

$$y_0=p(x_0)=p(1)=-11+14-3=0$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}=\frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}=\frac{(x-1)(x-3)}{-1}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{2}$$

γ) b_0, b_1 (?)

x	y		
1	0	b_0	
2	5	$\frac{5-0}{2-1} = \frac{5}{1} = 5$ (b_1)	$\frac{-1-5}{3-1} = \frac{-6}{2} = -3$ (b_2)
3	4	$\frac{4-5}{3-2} = \frac{-1}{1} = -1$	

$b_0 = 0$

$b_1 = 5$

x	y			
1	0	b_0		
2	5	$5-0/2-1 = 5$ (b_1)		
0	0	$\frac{0-5}{0-2} = 5/2$	$\frac{5/2-5}{0-1} = 5/2$ (b_2)	$\frac{0-5/2}{3-1} = b_3$
3	4	$\frac{4-0}{3-0} = 4/3$	$\frac{4/3-5/2}{3-2} = 0$	

$p(x) = c_0 + c_1\Pi_1(x) + c_2\Pi_2(x) + \cdots$
$+ c_i\Pi_i(x) \cdots$

$\Pi_i(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})$

$\Pi_3(x) = (x-1)(x-2)x$

$x \leftarrow (x-0) \leftarrow x_2 = 0$

Ou

x	y			
1	0			
2	5	5		
3	4	-1	-3	
0	0	$\frac{0-4}{0-3} = 4/3$	$\frac{4/3+1}{0-2} = \frac{7/3}{-2} = \frac{-7}{6}$	$\frac{-7/6+3}{0-1} = \frac{11/6}{-1} = \frac{-11}{6} = c_3$

$p(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)(x-2) +$
$c_3(x-1)(x-2)(x-3) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)(x-2) +$

$$c_3(x-1)(x-2)(x-3) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)(x-2) + c_3(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\pi_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Θέμα 4 (A):

$$y = a + bx^2$$

$$y_i = a + bx_i^2 \quad i = 0, \dots, 3$$

$$M \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = Y$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$M^T M \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} = M^T Y$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma 1 & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix} = M^T M$$

$$M^T Y = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \end{bmatrix} \dots\dots$$

Θέμα 4 (B)

$$y = a + b\cos(x)$$

$$y_i = a + b\cos(x_i) \qquad i = 0, \dots, 3$$

$\Downarrow$ μορφή πίνακα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cos(x_0) \\ 1 & \cos(x_1) \\ 1 & \cos(x_2) \\ 1 & \cos(x_3) \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{y}$$

$$M^T M \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M^T y$$

$$M^T M = \begin{bmatrix} \sum 1 & \sum_i \cos(x_i) \\ \sum_i \cos(x_i) & \sum_i \cos^2(x_i) \end{bmatrix}$$

$$M^T y = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \cdot \cos(x_i) \end{bmatrix}$$

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΙΝΗΤΗΣ ΥΠΟΔΙΑΣΤΟΛΗΣ

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Επιστημονικοί Υπολογισμοί

Τι είναι Επιστημονικοί Υπολογισμοί;

- **Ο σχεδιασμός και η ανάλυση αλγορίθμων για την αριθμητική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.**
- **Θεωρητικό υπόβαθρο: Αριθμητική Ανάλυση.**
- **Διαφέρει από άλλες περιοχές της Επιστήμης Υπολογιστών:**
  - Χειρίζεται συνεχείς ποσότητες/συναρτήσεις.
  - Μελετά τις συνέπειες και τα σφάλματα των προσεγγίσεων που χρησιμοποιεί για τους υπολογισμούς.

Ένα Απλό Παράδειγμα

- **Υπολογισμός της επιφάνειας της γής με χρήση του τύπου $A = 4\pi r^2$.**
- **Ο παραπάνω υπολογισμός περιέχει αρκετές προσεγγίσεις:**
  - Η Γη θεωρείται σφαίρα με λεία επιφάνεια.
  - Η τιμή της ακτίνας ($r = 6370$km) είναι υπολογισμένη από εμπειρικές μετρήσεις και υπολογισμούς.
  - Η τιμή του άρρητου π δίδεται από περιορισμένα ψηφία.
  - Ο υπολογισμός σε υπολογιστή (προσωπικό ή χειρός) περιέχει στρογγυλοποιήσεις τόσο στα δεδομένα εισόδου, όσο και στο αποτέλεσμα του υπολογισμού.

Συστήματα για την Αναπαράσταση Αριθμών

Σύστημα	Βάση	Ψηφία
Δεκαδικό	10	0,1,...,9
Δυαδικό	2	0,1
Οκταδικό	8	0,1,...,7
Δεκαεξαδικό	16	0,1,...,9, a, b, c, d, e, f

Αναπαράσταση Αριθμών

Ο αριθμός $a_N a_{N-1} \ldots a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots$ στο δεκαδικό σύστημα είναι:

$$a_N 10^N + a_{N-1} 10^{N-1} + \ldots + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \ldots$$

Το ακέραιο μέρος υπολογίζεται σαν πολυώνυμο:

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_0, \qquad x = 10$$

Το κλασματικό σαν δυναμοσειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} x^k, \quad x = \frac{1}{10}$$

Αναπαράσταση Αριθμών
(συνέχεια)

Στην καθημερινή ζωή χρησιμοποιούμε το δεκαδικό σύστημα.

Ο υπολογιστής χρησιμοποιεί διαφορετικό σύστημα (δυαδικό, οκταδικό ή δεκαεξαδικό).

Τα εισερχόμενα στον υπολογιστή και εξερχόμενα δεδομένα είναι στο δεκαδικό.

Η μετατροπή των αριθμών και η επεξεργασία τους στο σύστημα του υπολογιστή γίνεται εσωτερικά.

Μετατροπή Αριθμών σε Διαφορετικά Συστήματα Αναπαράστασης

Μετατροπή ακεραίου από σύστημα με βάση το β στο δεκαδικό:

- Υπολογισμός πολυωνύμου(πολλαπλασιασμός).
- Με υπολογισμό δυνάμεων:

$$(53473)_8 = 5\cdot 8^4 + 3\cdot 8^3 + 4\cdot 8^2 + 7\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 = (22331)_{10}$$

- Με σχήμα Horner:

$$(53473)_8 = (((5\cdot 8+3)\cdot 8+4)\cdot 8+7)\cdot 8+3 = (22331)_{10}$$

- Ο αλγόριθμος Horner για τον υπολογισμό του

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_0$$

είναι:

$y \leftarrow a_N$
  για i=1,...,N
    $y \leftarrow y\cdot x + a_{N-i}$

Μετατροπή Αριθμών σε Διαφορετικά Συστήματα Αναπαράστασης (συνέχεια)

Μετατροπή κλασματικού αριθμού από σύστημα με βάση το β στο δεκαδικό :

- Υπολογισμός δυναμοσειράς(πολλαπλασιασμός).

$$(.101)_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = (.625)_{10}$$

Μετατροπή ακέραιου αριθμού από το δεκαδικό σε σύστημα με βάση το β :

- Βασική πράξη η διαίρεση, στην κατάλληλη χρήση του υπόλοιπου και του πηλίκου.
- Ο αριθμός $\delta_N\delta_{N-1}\ldots\delta_0$ στο δεκαδικό θα παρίσταται με $a_M a_{M-1}\ldots a_0$ στο οκταδικό δηλαδή: $\delta_N\delta_{N-1}\ldots\delta_0 = a_0 + 8\cdot(a_1 + 8\cdot(\ldots))$. Δηλαδή το a_0 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του δεκαδικού με το 8. Το a_1 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του προηγούμενου πηλίκου με το 8, κοκ.
- $(24)_{10} = (30)_8 = 0 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^1$

Μετατροπή Αριθμών σε Διαφορετικά Συστήματα Αναπαράστασης (συνέχεια)

Μετατροπή κλασματικού από το δεκαδικό σε σύστημα με βάση το β :

- Βασίζεται στον πολλαπλασιασμό:
- Αν x ένας κλασματικός αριθμός στο δεκαδικό και $.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\alpha_{-3}\ldots$ η αναπαράσταση του στο β-δικό σύστημα τότε:

  $\beta \cdot x = \alpha_{-1}.\alpha_{-2}\alpha_{-3}\ldots$

  Δηλαδή το α_{-1} είναι ακέραιο μέρος του πολλαπλασιασμού με β.
- $(.372)_{10} = (.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\alpha_{-3}\ldots)_2$

$2 \cdot x = 0.744 \rightarrow \alpha_{-1} = 0$, $\upsilon_1 = 0.744$

$2 \cdot \upsilon_1 = 1.488 \rightarrow \alpha_{-2} = 1$, $\upsilon_2 = 0.488$

$2 \cdot \upsilon_2 = 0.976 \rightarrow \alpha_{-3} = 0$, $\upsilon_3 = 0.976$

$2 \cdot \upsilon_3 = 1.952 \rightarrow \alpha_{-4} = 1$, $\upsilon_3 = 0.952$

$2 \cdot \upsilon_4 = 1.904 \rightarrow \alpha_{-4} = 1$, $\upsilon_3 = 0.904$

...

$(.372)_{10} = (.01011\ldots\ldots)_2$

Μετατροπή Αριθμών σε Διαφορετικά Συστήματα Αναπαράστασης (συνέχεια)

- ☺ Οι ακέραιοι αριθμοί παραμένουν ακέραιοι με την μετατροπή σε διαφορετικό σύστημα.

- ☺ Οι κλασματικοί αριθμοί παραμένουν κλασματικοί σε οποιοδήποτε σύστημα.

- ☹ Το πλήθος των ψηφίων μετά την υποδιαστολή μπορεί από πεπερασμένο να γίνει άπειρο ή και το αντίθετο: π.χ. $(.1)_{10} = (.0001100110011....)_2$

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής

- Μορφή κινητής υποδιαστολής σε σύστημα με βάση το β, $x = \pm(.d_1 d_2 d_3 \ldots)\beta^e$, $d1 \neq 0$.
  $-(3021.7867)_{10} = -(.30217867) \times 10^4$
  $(.000456)_8 = (.456) \times 8^{-3}$

- Τα ψηφία που χρησιμοποιεί ένας υπολογιστής είναι πεπερασμένα
  (→ πεπερασμένη αριθμητική).

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

- Οι αριθμοί στον υπολογιστή είναι ένα διακριτό (όχι συνεχές) σύνολο αριθμών → σύνολο αριθμών μηχανής.

- Το παραπάνω σύνολο περιγράφεται από:
  - β, τη βάση του συστήματος
  - t, την ακρίβεια = το πλήθος των ψηφίων του κλάσματος των αριθμών
  - L, U το κάτω και άνω φράγμα του εκθέτη e του β. (συνήθως $L \approx -U$)
- **Αν x αριθμός μηχανής τότε** $x = \pm(.d_1 d_2 d_3 \ldots d_t)\,\beta^e$

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

- ☺ Ο μικρότερος, κατά απόλυτη τιμή, αριθμός μηχανής είναι ο $(.1000...0)\ \beta^L$. Γιατί δεν είναι ο $(.0100...0)\ \beta^L$ ή ο $(.0000...1)\ \beta^L$;
- ☺ Ο μέγιστος, κατά απόλυτη τιμή, αριθμός μηχανής είναι ο $(.dddd...d)\ \beta^U$, όπου $d = \beta-1$.
- ☹ Το άθροισμα δύο αριθμών μηχανής δεν είναι απαραίτητα αριθμός μηχανής.

  Π.χ.: $(.dddd...d)\ \beta^U + (.dddd...d)\ \beta^U$ δεν είναι αριθμός μηχανής. Γιατί;
- ☹ Το γινόμενο δύο αριθμών μηχανής δεν είναι απαραίτητα αριθμός μηχανής.

  Π.χ.: $(.1000...0)\ \beta^L /2$ δεν είναι αριθμός μηχανής. Γιατί;

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

- ☺ **Το «έψιλον» της μηχανής, ε, ο μικρότερος αριθμός τ.ω.** fl(1+ε) != 1.

- ☺ **Άσκηση: Υπολογίστε το ε της μηχανής χρησιμοποιώντας** Matlab, **με και χωρίς την αντίστοιχη εντολή.**

- ☹ Δεν ισχύουν ορισμένες ιδιότητες των πράξεων:
  πρόσθεση – προσεταιριστική: a+(b+c) != (a+b)+c. Γιατί;

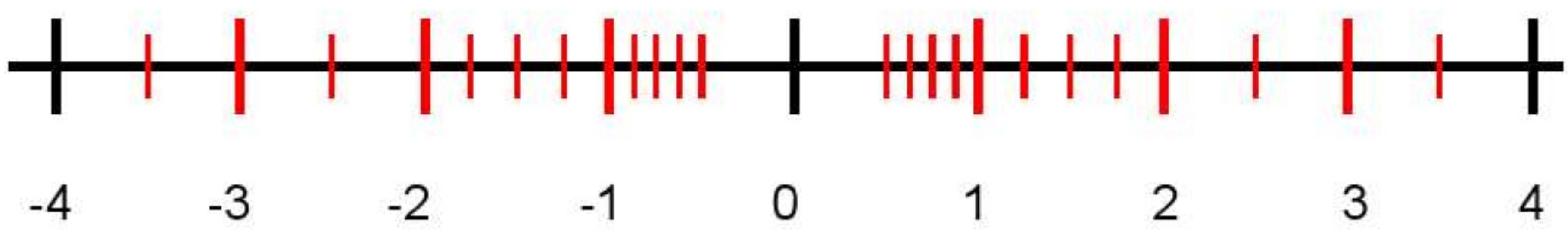
Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

Σύστημα	β	t	L	U
IEEE(απλή ακρίβεια)	2	24	-125	128
IEEE(διπλή ακρίβεια)	2	53	-1021	1024
Cray	2	48	-16381	16384
HP(χειρός)	10	10	-98	100
IBM(απλή ακρίβεια)	16	6	-64	63

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

Αν $\beta = 2$, $t = 3$, $L = 0$, $U = 2$ τότε:

- ο μέγιστος αριθμός σε αυτό τον υπολογιστή είναι: $(.111)_2 \times 2^2 = (3.5)_{10}$
- Ο ελάχιστος αριθμός είναι: $(.100)_2 \times 2^0 = (.5)_{10}$
- Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται το σύνολο των αριθμών της μηχανής(με το κόκκινο χρώμα).



Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Αριθμοί μηχανής (συνέχεια)

- **Αν** x' **αριθμός μηχανής,** $x' = (.d_1d_2d_3\ldots d_t)\ \beta^k$ **, και τότε ο επόμενος του είναι ο** $x'' = (.d_1d_2d_3\ldots d_t + .000\ldots1)\ \beta^k = x' + \beta^{k-t}$
- **Στους υπολογιστές τα άπειρα ψηφία του κλασματικού αριθμού, x, πρέπει να αναπαρασταθούν με πεπερασμένα, πλήθους t.**
- **Η αναπαράσταση,** $fl(x)$ **, αυτή γίνεται με δύο τρόπους με στρογγύλευση και με αποκοπή.**

- ***Στρογγύλευση:*** **αν** $x = (.d_1d_2d_3\ldots d_t\ d_{t+1}d_{t+2}d_{t+3}\ldots)\ \beta^k$
  - Αν $d_{t+1} \geq \beta/2 \Rightarrow fl(x) = (.d_1d_2d_3\ldots d_t + .000\ldots1)\ \beta^k$
  - Αν $d_{t+1} < \beta/2 \Rightarrow fl(x) = (.d_1d_2d_3\ldots d_t)\ \beta^k$

- ***Αποκοπή:*** **αν** $x = (.d_1d_2d_3\ldots d_t\ d_{t+1}d_{t+2}d_{t+3}\ldots)\ \beta^k \Rightarrow fl(x) = (.d_1d_2d_3\ldots d_t)\ \beta^k$

Υπολογισμός σφάλματος προσέγγισης αριθμού με αποκοπή

- **Αν** $x = (.d_1 d_2 d_3 \ldots d_t\, d_{t+1} d_{t+2} d_{t+3} \ldots)\, \beta^k$
- **τότε** $x' = (.d_1 d_2 d_3 \ldots d_t)\, \beta^k$ **και** $x'' = (.d_1 d_2 d_3 \ldots d_t + .000\ldots1)\, \beta^k$ **οι δύο διαδιχικοί αριθμοί μηχανής όπου** $x' \leq x \leq x''$
  - $fl(x) = x'$
  - $|fl(x) - x| < |x'' - x'| = \beta^{k-t}$
  - $d_1 \geq 1 \rightarrow \beta^{-1} \leq .d_1 \leq .d_1 d_2 d_3 \ldots d_t\, d_{t+1} d_{t+2} d_{t+3} \ldots < 1 \rightarrow |x| = (.d_1 d_2 d_3 \ldots d_t\, d_{t+1} d_{t+2} d_{t+3} \ldots)\, \beta^k \geq \beta^{-1} \beta^k = \beta^{k-1}$
  - $$\frac{|fl(x) - x|}{|x|} \leq \beta^{k-t} \beta^{1-k} = \beta^{1-t}$$ μοναδιαίο σφάλμα αποκοπής

Υπολογισμός σφάλματος προσέγγισης αριθμού με στρογγύλευση

- Αν $x = (.d_1 d_2 d_3 \ldots\ d_t\ d_{t+1} d_{t+2} d_{t+3} \ldots)\ \beta^k$
- τότε $x' = (.d_1 d_2 d_3 \ldots\ d_t)\ \beta^k$ και $x'' = (.d_1 d_2 d_3 \ldots\ d_t + .000\ldots1)\ \beta^k$ οι δύο διαδοχικοί αριθμοί μηχανής όπου $x' \le x \le x''$
  - $fl(x) = x'$ ή $fl(x) = x''$
  - $|fl(x) - x| \le |x'' - x'| / 2 = \beta^{k-t} / 2$
  - $d_1 \ge 1 \rightarrow \beta^{-1} \le .d_1 \le .d_1 d_2 d_3 \ldots\ d_t\ d_{t+1} d_{t+2} d_{t+3} \ldots < 1 \rightarrow |x| = (.d_1 d_2 d_3 \ldots\ d_t\ d_{t+1} d_{t+2} d_{t+3} \ldots)\ \beta^k \ge \beta^{-1}\ \beta^k = \beta^{k-1}$
  - $\dfrac{|fl(x) - x|}{|x|} \le \dfrac{\beta^{k-t}}{2} \beta^{1-k} = \dfrac{1}{2} \beta^{1-t}$, μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης

Αν και πιο δύσκολη, η στρογγύλευση χρησιμοποιείται παντού...

Τύποι σφαλμάτων στις προσεγγίσεις

Αν x ένας αριθμός και y η προσέγγιση του τότε:

- $|y-x| = \varepsilon$ απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης, $x=y+\varepsilon$
- $\dfrac{|y-x|}{|x|}$ = σχετικό σφάλμα της προσέγγισης.
- Επειδή συχνά το x μας είναι άγνωστο, υπολογίζουμε το σχετικό σφάλμα με βάση την προσέγγιση, δηλαδή

  $$\frac{|y-x|}{|y|}$$

Επιρροή σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς

- **Αν x,y δύο αριθμοί και ♦ μία πράξη (π.χ. πρόσθεση, πολλαπλασιασμός) τότε ο x ♦ y αναπαρίσται στον υπολογιστή σαν fl(fl(x) ♦ fl(y))**
- **Γενικά fl(x ♦ y) ≠ fl(fl(x) ♦ fl(y))**
- **Παράδειγμα:**
  - $\beta = 10$, $t = 5$, $U = -L = 10$, fl(.) από στρογγύλευση, ♦ πρόσθεση
  - $x = 5891.26$, $y = .0773414$
  - $fl(x) = .58913 \times 10^4$, $fl(y) = .77341 \times 10^{-1}$
  - $fl(x) + fl(y) = .5891377341 \times 10^4$
  - ☹ $fl(\, fl(x) + fl(y)\,) = .58914 \times 10^4$ ← αποτέλεσμα του υπολογιστή
  - ☺ $x + y = 5891.3373414$
  - ☹ $fl(x+y) = .58913 \times 10^4$

Επιρροή σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς (συνέχεια)

Αποδεικνύεται ότι:

- Πρόσθεση/Αφαίρεση: εδώ το σφάλμα εξαρτάται ισχυρά από τους αριθμούς!!!!!

$$\frac{|fl(fl(x)+fl(y)) - (x+y)|}{|x+y|} \le \frac{2u(|x|+|y|)}{|x+y|}$$

- Πολλαπλασιασμός:

$$\frac{|fl(fl(x)\cdot fl(y)) - (x\cdot y)|}{|x\cdot y|} \le 3u + 4u^2$$

- Διαίρεση:

$$\frac{\left| fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right) - \frac{x}{y} \right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} \le 3u + O(u^2)$$

u = το μοναδιαίο σφάλμα της στρογγυλοποίησης

Χαρακτηριστικό παράδειγμα (1)

- ☺ $\beta=10$, $t=5$, $U = -L = 10$, $x = .45142708$, $y = -.45135944$
- ☺ **Ακριβές αποτέλεσμα :**

  $x+y = .6764 \times 10^{-4}$
- ☺ **Προσέγγιση:**

  $z = fl(\, fl(x) + fl(y)\,) = fl(\,.45143 - .45136) = .00007 = .70000 \times 10^{-4}$
- ☺ **Σχετικό σφάλμα:** $\left|\dfrac{z-(x+y)}{x+y}\right| = \dfrac{.233\times 10^{-5}}{.6764\times 10^{-4}} \cong .34\times 10^{-1}$!!!!!!!!!

Χαρακτηριστικό παράδειγμα (2)

β=10, t =10 **στον HP33 και** x = 7892, y = 7891, **τότε** $\sqrt{x}-\sqrt{y}=?$

$$\sqrt{7892}=.8883692926\times 10^{2}$$

$$\sqrt{7891}=.8883130079\times 10^{2}$$

$$\sqrt{7892}-\sqrt{7891}=.5628\underline{470000}\times 10^{-2}$$

$$\sqrt{7892}-\sqrt{7891}=\frac{7892-7891}{\sqrt{7892}+\sqrt{7891}}=\frac{1}{\sqrt{7892}+\sqrt{7891}}=\frac{1}{.1776682300\times 10^{3}}=.5628\underline{468294}\times 10^{-2}$$

Σφάλματα στον υπολογισμό των αθροισμάτων

- Πολλές βασικές συναρτήσεις μέσα στον υπολογιστή υπολογίζονται με αθροίσματα/σειρές (π.χ., sin, cos, exp, κλπ.)

- Αρκετοί δικοί μας υπολογισμοί περιέχουν αθροίσματα (π.χ., προσέγγιση ολοκληρωμάτων, μέσης τιμής, διασποράς κλπ.)

Ένα Απλό Παράδειγμα

- Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα:

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k}$$

- Επειδή ισχύει $a_k = \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ έχουμε:

$$S_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$$

όπου παίρνουμε αρκετά καλές προσεγγίσεις:

$S_9 = 1.9$, $S_{99} = 1.99$, $S_{999} = 1.999$, $S_{9999} = 1.9999$

Ένα Απλό Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αν χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση που μας δίνει τα Sn ως:

  $S_0 = 1$, $S_k = S_{k-1} + 1/(k(k+1))$ τότε

- Αν ξεκινήσουμε το άθροισμα από το τέλος δηλαδή:

$$T_0 = \frac{1}{n^2 + n}$$

$$T_k = T_{k-1} + \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}, k = 1, \ldots, n-1$$

$$T_n = T_{n-1} + 1$$

n	$\check{S}_n$	$\check{T}_n$
9	1.900000000	
99	1.990000003	
999	1.999000003	
9999	1.999899972	

Ένα Απλό Παράδειγμα
(συνέχεια)

- Αυτό συμβαίνει γιατί τα σφάλματα συσσωρεύονται στους μεγάλους όρους του αθροίσματος.

  π.χ.: $\check{S}_4 = S_4 + 3\delta_1 a_1 + 3\delta_1 a_2 + 2\delta_2 a_3 + \delta_3 a_4$ με $|\delta_i| \leq u$, $i=1,2,3$ και $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.

- Το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση των αθροισμάτων T_n, εκεί το σφάλμα συσσωρεύεται στους μικρότερους όρους του αθροίσματος, δηλ. $\check{T}_4 = T_4 + 3\delta_1 a_N + 3\delta_1 a_{N-1} + 2\delta_2 a_{N-2} + \delta_3 a_{N-3}$ όπου $a_N < a_{N-1} < a_{N-2} < a_{N-3}$

Παράδειγμα αναίρεσης

- Οι όροι στο άθροισμα αλλάζουν πρόσημο και να αυξάνονται κατά απόλυτη τιμή, δηλαδή $a_i = (-1)^i a_i$, $a_i < a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$
- Εδώ ο ένας όρος αναιρεί τον προηγούμενο.
- Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο υπολογισμός της εκθετικής συνάρτησης με χρήση του αναπτύγματος Taylor, σε αρνητικά σημεία:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \qquad s_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \xrightarrow{N \to \infty} \quad e^{-x}$$

όπου ενώ για $x=100$, $e^{-100} \approx 0$

οι πρώτες προσεγγίσεις........

n	S_n
1	1.
2	-99
3	4901
4	-161766

- Ένας καλύτερος τρόπος είναι $e^{-x} = 1/e^{x}$ και να υπολογίσουμε το e^{x} με ανάπτυγμα Taylor.

Ευστάθεια αλγορίθμων.

- ☹ Ένας αλγόριθμος λέγεται ασταθής, αν μικρά σφάλματα στην αναπαράσταση των αριθμών επιφέρουν μεγάλες μεταβολές στο τελικό αποτέλεσμα.

- ☺ Ένας αλγόριθμος λέγεται ευσταθής αν τα τελικά αποτελέσματα δεν επηρεάζονται από τα σφάλματα στρογγύλευσης.

Υπολογισμός του $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$

- **Με ολοκλήρωση κατά μέλη βλέπουμε ότι ισχύει:**

  $I_1 = 1/e$, $I_n = 1-nI_{n-1}$, n=2,3,... **αλλά και** $I_{n-1} = (1-I_n)/n$

- **Ισχύει ότι** $I_k > I_{k+1}$, k=1,2,3,...

- **Αν υπολογίσουμε τα αθροίσματα με αύξουσα σειρά τότε:**

  $\hat{I}_1=I_1+\varepsilon_1$, $\hat{I}_n = 1- n\,\hat{I}_{n-1}$, n=1,2,... **όπου το σφάλμα της προσέγγισης**

$$\varepsilon_n = I_n - \hat{I}_n$$

$$\varepsilon_n = (-1)^{n-1} n!\, \varepsilon_1$$

n	$\hat{I}_n$
1	.367879
2	.264242
3	.207274
4	.170904
5	.145480
6	.127120
7	.110160
8	.118720
9	-.068480
10	1.68480
11	-17.53280
12	211.39360
13	-2747.11680
14	38460.63520
15	-576908.52800

Υπολογισμός του $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$

- **Αν τα υπολογίσουμε με φθίνουσα σειρά:**

  $\hat{I}_m = I_m + \varepsilon_m$, $\hat{I}_{n-1} = (1 - \hat{I}_n)/n$,

  $n = m, \ldots, k+1$

  ε_m το σφάλμα της προσέγγισης για το οποίο ισχύει

$$\varepsilon_{n\text{-}1} = -\varepsilon_n / n$$

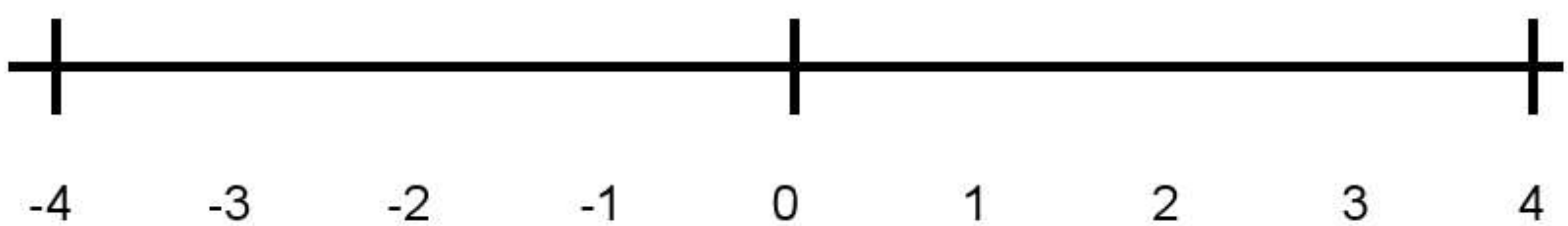
$$\varepsilon_k = (-1)^{m-k} \frac{1}{k+1} \frac{1}{k+2} \frac{1}{k+3} \cdots \frac{1}{m} \varepsilon_m$$

n	$\hat{I}_n$
20	.0000000
19	.0500000
18	.0500000
17	.0527778
16	.0557190
15	.0590176
14	.0627322
13	.0669477
12	.0717733
11	.0773522
10	.0838771
9	.0916123

ΑΣΚΗΣΗ

Αν β = 2, t = 2, L = -1, U = 1 τότε:

- Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός σε αυτό τον υπολογιστή; ……
- Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ; …….
- Ποιο είναι το ε της μηχανής; …….
- Κάντε ένα διάγραμμα φαίνεται με το σύνολο των αριθμών της μηχανής.
- …………………………………………



Βιβλιογραφία

- **Αριθμητικές Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Επιστήμη και τη Μηχανική** (C.Pozrikidis)
- Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση (Γ. Ακρίβη, Β. Δουγαλή)
- Αριθμητική Ανάλυση I (Μ. Βραχάτης)
- Scientific Computing, An Introductory Survey (M. Heath)

Ερωτήσεις

- Ιστοσελίδα μαθήματος:
  http://eclass.uth.gr/
  http://inf-server.inf.uth.gr/courses/CE213/index.html

- E-mail λίστα του μαθήματος:
  ce213@inf-server.inf.uth.gr
  http://eclass.uth.gr/

- Π. Τσομπανοπούλου, Ε3-12, yota@uth.gr