Πίνακας από αναπαράσταση Newton

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & & & \\ m_{21} & m_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

κάτω τριγωνικός

$$Mx = y \iff$$

$$m_{11}x_1 = y_1$$

$$m_{21}x_1 + m_{22}x_2 = y_2$$

$$\vdots$$

$$m_{n1}x_1 + m_{n2}x_2 + \cdots m_{nn}x_n = y_n$$

$$m_{11}x_1 = y_1 \iff x_1 = \frac{y_1}{m_{11}}$$

$$m_{21}x_1 + m_{22}x_2 = y_2 \iff$$

$$x_2 = \frac{y_2 - m_{21}x_1}{m_{22}}$$

$$\vdots$$

$$m_{n1}x_1 + m_{n2}x_2 + \cdots m_{nn}x_n = y_n \iff$$

$$x_n = \frac{y_n - m_{n1}x_1 - m_{n2}x_2 \cdots - m_{nn-1}x_{n-1}}{m_{nn}}$$

Κόστος λύσης κάτω τριγωνικού συστήματος

1° Βήμα : 1 διαιρ.

2° " : 1 διαιρ. + 2 πράξεις στον αρ.

3° Βήμα : 1 " + 4 πράξεις

$\vdots$

n° Βήμα : 1 " + 2(n-1) πράξεις αριθμητή

$$= 1+3+5+\cdots+(2n-1) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 2\sum_{k=1}^{n} k - n$$

$$= \cancel{2}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n = n^2+n-n =$$

$$= n^2$$

Επιστροφή στη Newton αναπαράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \pi_k(x)$$

$$\pi_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)$$

Υπολογισμός γ_k : $O(n^2)$

Υπολογισμός $p(x)$ $\quad x \neq x_i$

		Πλήθος πράξεων
$p(x) = \gamma_0 \cdot \pi_0(x) +$	$\pi_0(x) = 1$	0
$\gamma_1 \cdot \pi_1(x) +$	$\pi_1(x) = x - x_0$	1
$\gamma_2 \cdot \pi_2(x) +$	$\pi_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)$	$+2$
$\vdots$	$\vdots$	$+2$
$\gamma_n \cdot \pi_n(x)$	$\pi_n(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$	$+2$
		$2(n-1)+1 = 2n-1$

$(2n-1) + n + n - 1 = 4n - 2$

Υπολογισμός τιμής πολυωνύμου p : $O(n)$

Διαιρεμένες Διαφορές

	$\Delta^{(0)}(i)$	$\Delta^{(1)}(x_i, x_{i+1})$	$\Delta^{(2)}(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$\Delta^{(3)}(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
x_0	y_0 (γ_0)			
x_1	y_1	$\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \Delta^{(1)}(x_0, x_1)$ (γ_1)		
x_2	y_2	$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \Delta^{(1)}(x_1, x_2)$	$\dfrac{\Delta^{(1)}(x_1,x_2) - \Delta^{(1)}(x_0,x_1)}{x_2 - x_0} = \Delta^{(2)}(x_0,x_1,x_2)$ (γ_2)	
x_3	y_3	$\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \Delta^{(1)}(x_2, x_3)$	$\dfrac{\Delta^{(1)}(x_2,x_3) - \Delta^{(1)}(x_1,x_2)}{x_3 - x_1} = \Delta^{(2)}(x_1,x_2,x_3)$	$\dfrac{\Delta^{(2)}(x_1,x_2,x_3) - \Delta^{(2)}(x_0,x_1,x_2)}{x_3 - x_0} = \Delta^{3}(x_0,x_1,x_2,x_3)$ (γ_3)

$$p(x) = \gamma_0 \overset{1}{\cancel{\pi_0(x)}} + \gamma_1 \pi_1(x) + \gamma_2 \pi_2(x) + \gamma_3 \pi_3(x) =$$

$$= \Delta^{(0)}(x_0) + \Delta^{(1)}(x_0, x_1)\pi_1(x) + \Delta^{(2)}(x_0, x_1, x_2)\pi_2(x) +$$

$$+ \Delta^{(3)}(x_0, x_1, x_2, x_3)\pi_3(x)$$

x	$y = \Delta^{(0)}$	$\Delta^{(1)}$ ...
x_0	y_0 (γ_0)	o (γ_1)
$\vdots$	$\vdots$	o ... o (γ_n)
x_n	y_n	
x_{n+1}	y_{n+1}	o ...
x_m	y_m	... o (γ_m)

$$P_n(x) = \underbrace{y_0 + \gamma_1 \pi_1(x) + \cdots \gamma_n \pi_n(x)}$$

$$P_m(x) = y_0 + \gamma_1 \pi_1(x) + \cdots + \gamma_n \pi_n(x) +$$
$$\gamma_{n+1} \pi_{n+1}(x) + \cdots + \gamma_m \pi_m(x)$$

Πως προκύπτουν οι διαφορές:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & (x_1-x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (x_2-x_0) & (x_2-x_0)(x_2-x_1) & 0 \cdots & 0 \\ & & & & 0 \\ 1 & (x_n-x_0) & (x_n-x_0)(x_n-x_1) & \cdots & \prod_{k=0}^{n-1}(x_n-x_k) \end{bmatrix}$$

$= M$

$$M\gamma = y$$

1η εξίσωση: $1\cdot\gamma_0 = y_0 \Rightarrow \gamma_0 = y_0 = \Delta^{(0)}(x_0)$

2η εξίσωση: $1\gamma_0 + (x_1-x_0)\gamma_1 = y_1 \Rightarrow$

$$\gamma_1 = \frac{y_1-\gamma_0}{x_1-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \Delta^{(1)}(x_0,x_1)$$

3η εξίσωση $1\cdot\gamma_0 + (x_2-x_0)\gamma_1 + (x_2-x_0)(x_2-x_1)\gamma_2 = y_2$

$$\gamma_2 = \frac{y_2-\gamma_0-(x_2-x_0)\gamma_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= \frac{(y_2-y_0)-(x_2-x_0)\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{\overbrace{\frac{(y_2-y_0)(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{(x_2-x_0)(y_1-y_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}}^{=A}}{x_2-x_0} = \frac{\Delta^{(1)}(x_1,x_2) - \Delta^{(1)}(x_0,x_1)}{x_2-x_0} = \Delta^{(2)}(x_0,x_1,x_2)$$

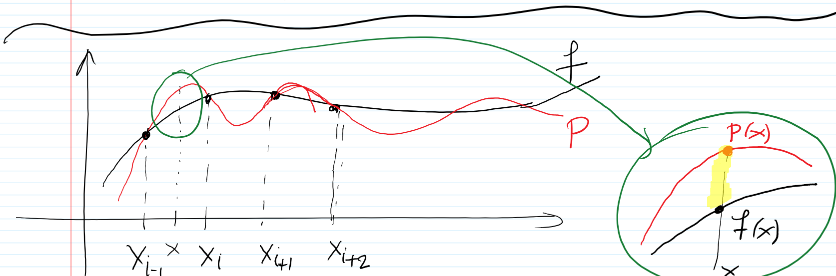
$$A = \frac{y_2x_1 - y_2x_0 - y_0x_1 + \cancel{y_0x_0} - y_1x_2 + y_1x_0 + y_0x_2 - \cancel{y_0x_0} - y_1x_1 + y_1x_1}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= \frac{y_2x_1 - y_2x_0 + y_1x_0 - y_1x_1 - y_0x_1 - y_1x_2 + y_0x_2 + y_1x_1}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= \frac{y_2(x_1-x_0) - y_1(x_1-x_0) + y_0(x_2-x_1) - y_1(x_2-x_1)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{(y_2-y_1)(x_1-x_0) - (y_1-y_0)(x_2-x_1)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \Delta^{(1)}(x_1,x_2) - \Delta^{(1)}(x_0,x_1)$$

Όμοια και για τα υπόλοιπα βήματα και γ_k.



Αν p πολυώνυμο παρεμβολής στα σημεία $(x_i, f(x_i))$
και $f \in C^n(I)$, I = κλειστό διάστημα που ορίζουν τα $x_i = [\min_i\{x_i\}, \max\{x_i\}]$

$f^{(n+1)}$

και $f \in C^n(I)$, I = κλειστό διάστημα που ορίζουν τα $x_i = [\min_i\{x_i\}, \max\{x_i\}]$

Τότε

$$f(x) - p(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

σφάλμα στο σημείο x.

(ξ_x εξαρτάται από το x)
και βρίσκεται στο διάστημα $[x_0, \dots x_n]$

$$\|f - p\|_\infty \leq \max_x \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \cdot \max_z \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}$$

$$\|f-p\|_\infty = \max_x |f(x) - p(x)|$$

- Ειδική περίπτωση: f πολυώνυμο n βαθμού (το πολύ!)
  $\Rightarrow f^{(n+1)}(z) = 0 \quad \forall z \Rightarrow f = P$!!!

- Παρατηρώ ότι το σφάλμα εξαρτάται από τα σημεία (κόμβους της παρεμβολής) και τη συνάρτηση.

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ
& ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ TAYLOR

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Παρεμβολή – Παράσταση σε μορφή Newton

Για δεδομένα σημεία (x_i, y_i), $i=0,\ldots,n$, οι συναρτήσεις βάσεις Newton ορίζονται ως:

$$\pi_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1}(x - x_k), \qquad j = 0,\ldots,n$$

όπου το π_0 είναι ίσο με μονάδα παντού. Τα πολυώνυμα παρεμβολής κατά Newton έχουν την μορφή:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$c_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Επειδή για $i<j$, $\pi_j(x_i)=0$, ο πίνακας A (στο σύστημα $Ac=y$) είναι κάτω τριγωνικός αφού $a_{ij} = \pi_{j-1}(x_{i-1})$.

Παρεμβολή – Παράσταση σε μορφή Newton

Για δεδομένα σημεία (-2, -27), (0, -1), (1, 0), το πολυώνυμο Newton δευτέρου βαθμού που παρεμβάλλεται στα παραπάνω σημεία ορίζεται σαν λύση του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad c = \begin{bmatrix} -27 \\ 13 \\ -4 \end{bmatrix}$$

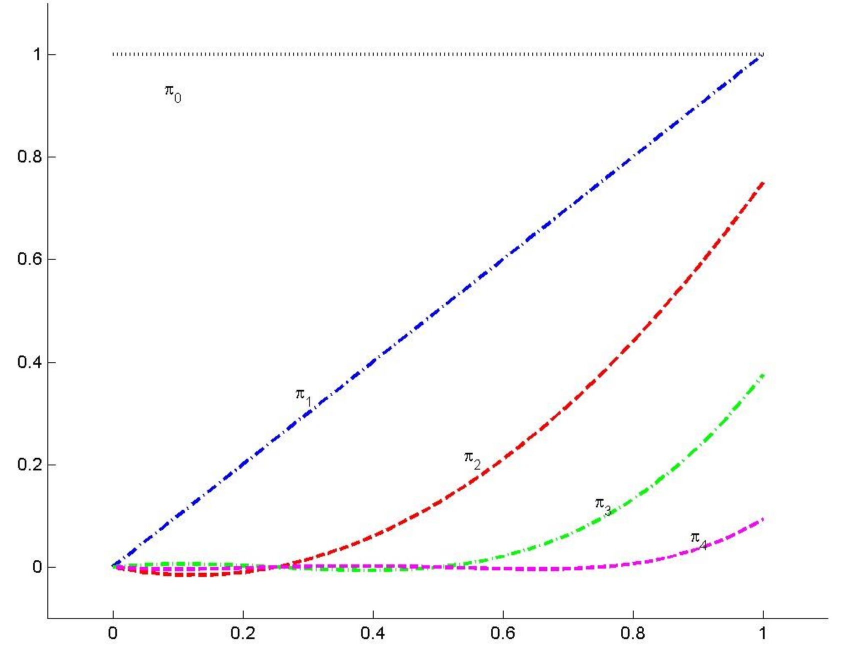
οπότε το πολυώνυμο γράφεται σαν:

$$p(x) = -27 + 13(x+2) - 4(x+2)x$$

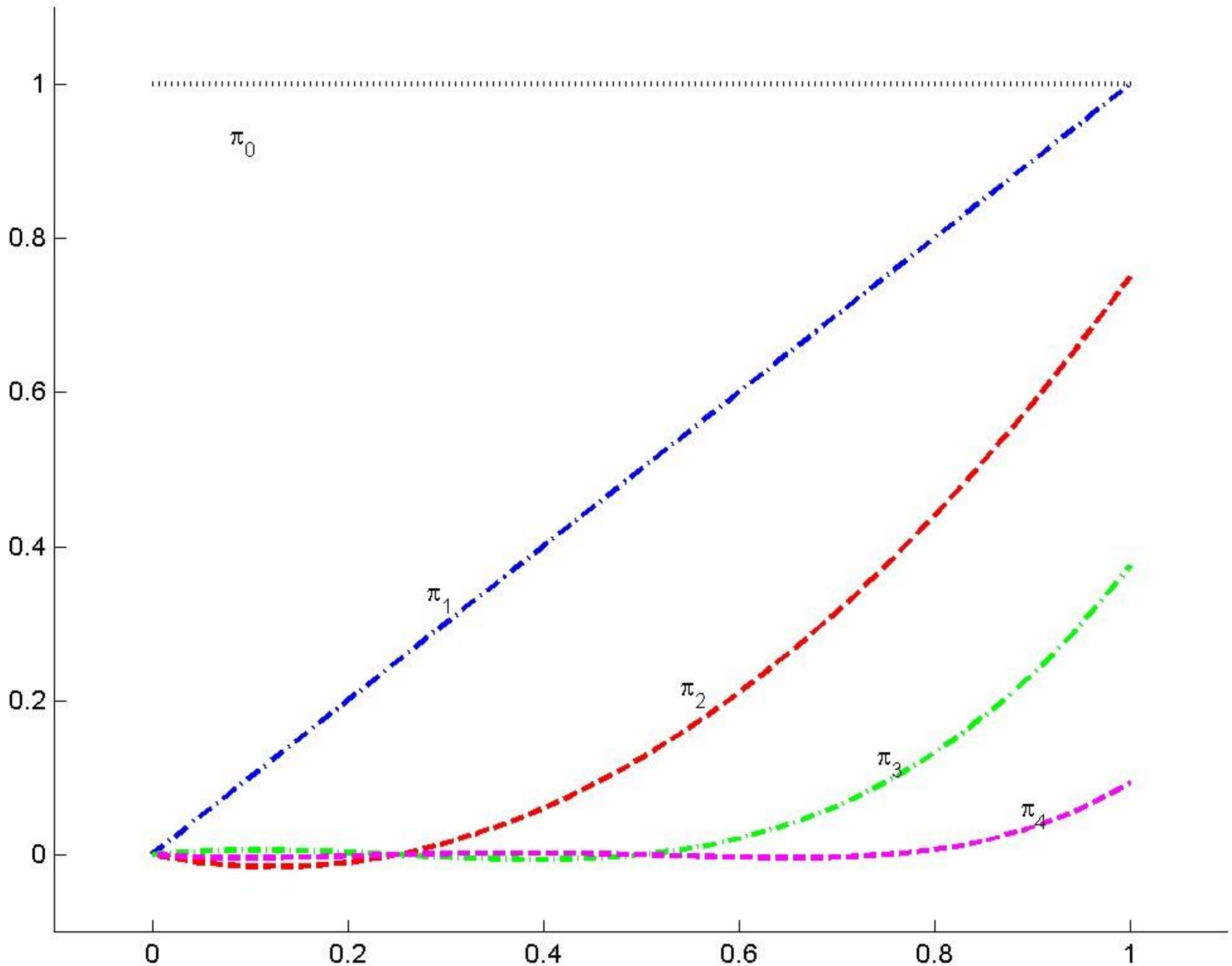
yota@inf.uth.gr

Παρεμβολή – Παράσταση σε μορφή Newton

- Τα 5 πολυώνυμα βάσης Newton για τα σημεία 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.



- Η παρεμβάλλουσα κατά Newton υπολογίζεται σε $O(n^2)$ πράξεις (προς τα εμπρός αντικατάσταση).
- Η παρεμβάλλουσα μπορεί υπολογισθεί εύκολα σε διάφορα άλλα σημεία(με σχήμα Horner).
- Ισχύει:
  - $\pi_{j+1}(x)= \pi_j(x)(x-x_i)$
  - $p_{j+1}(x)=p_j(x)+c_{j+1}\pi_{j+1}(x)$
- Το κόστος μεταξύ υπολογισμού των συντελεστών της παρεμβάλλουσας και υπολογισμού των τιμών της σε διάφορα σημεία είναι ίδιας τάξης.



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
π_0
π_1
π_2
π_3
π_4

Παρεμβολή - Διαιρεμένες Διαφορές

Έστω $f \in C[a,b]$, και $x_i \in [a,b]$, $i=0,1,\ldots$, με $x_i \neq x_j$ με $i \neq j$. Τότε ορίζουμε επαγωγικά ως προς i :

$$\Delta^0(x_i)(f) := f(x_i), \quad \mathrm{i} = 0,1,\ldots$$

$$\Delta^i(x_0,\ldots,x_i)(f) := \frac{\Delta^{i-1}(x_1,\ldots,x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0,\ldots,x_{i-1})(f)}{x_i - x_0}, \quad i = 1,2,\ldots$$

Ο αριθμός $\Delta^i(x_0,\ldots,x_i)$ λέγεται διαιρεμένη διαφορά τάξης i της f ώς προς τα σημεία $x_0,\ldots,x_i$.

<u>Πρόταση:</u> Τα c_i στο πολυώνυμο παρεμβολής κατά Newton είναι ίσα με τη διαιρεμένη διαφορά τάξης i της f, δηλαδή:

$$p_n(x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0) +$$

$$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)(x-x_0)(x-x_1) + \ldots +$$

$$\Delta^{n+1}(x_0,\ldots,x_{n+1})(f)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Υπολογισμός Διαιρεμένων Διαφορών

$$
\begin{array}{cccccc}
 & n = 0 & & 1 & & 2 \quad \cdots \\
x_0 & \boxed{\Delta^0(x_0)(f)} & \searrow & & & \\
x_1 & \Delta^0(x_1)(f) & \rightarrow & \boxed{\Delta^1(x_0, x_1)(f)} & \searrow & \\
 & & \searrow & & & \\
x_2 & \Delta^0(x_1)(f) & \rightarrow & \Delta^1(x_1, x_2)(f) & \rightarrow & \boxed{\Delta^2(x_0, x_1, x_2)(f)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Υπολογισμός Διαιρεμένων Διαφορών - Παράδειγμα

Για τα δεδομένα σημεία (-2, -27), (0, -1), (1, 0), το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που παρεμβάλλεται σε αυτά είναι:

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & n=0 & & 1 & & 2 & \cdots \\
x_0=-2 & \boxed{-27} & \searrow & & & & \\
x_1=0 & -1 & \rightarrow & \boxed{13} & \searrow & & \\
 & & \searrow & & & & \\
x_2=1 & 0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & \boxed{-4} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

$$p(x) = -27 + 13(x+2) - 4(x+2)x$$

Μειονεκτήματα παρεμβολής με πολυώνυμα

- Το σφάλμα της παρεμβολής είναι :

$$\forall x \in [a,b] \;\; \exists \xi \in (a,b) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$\Rightarrow$$

$$\| f - p \|_\infty = \max_{a \le x \le b} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \frac{\| f^{(n+1)} \|_\infty}{(n+1)!}$$

- Πολλά σημεία παρεμβολής → μεγάλο βαθμό πολυωνύμου → πολλές πράξεις → μεγάλα σφάλματα στρογγύλευσης.
- Αν η συνάρτηση έχει παραγώγους που μεταβάλλονται έντονα → μεγάλο σφάλμα προσέγγισης (π.χ. συνάρτηση Runge)

Μειονεκτήματα παρεμβολής με πολυώνυμα

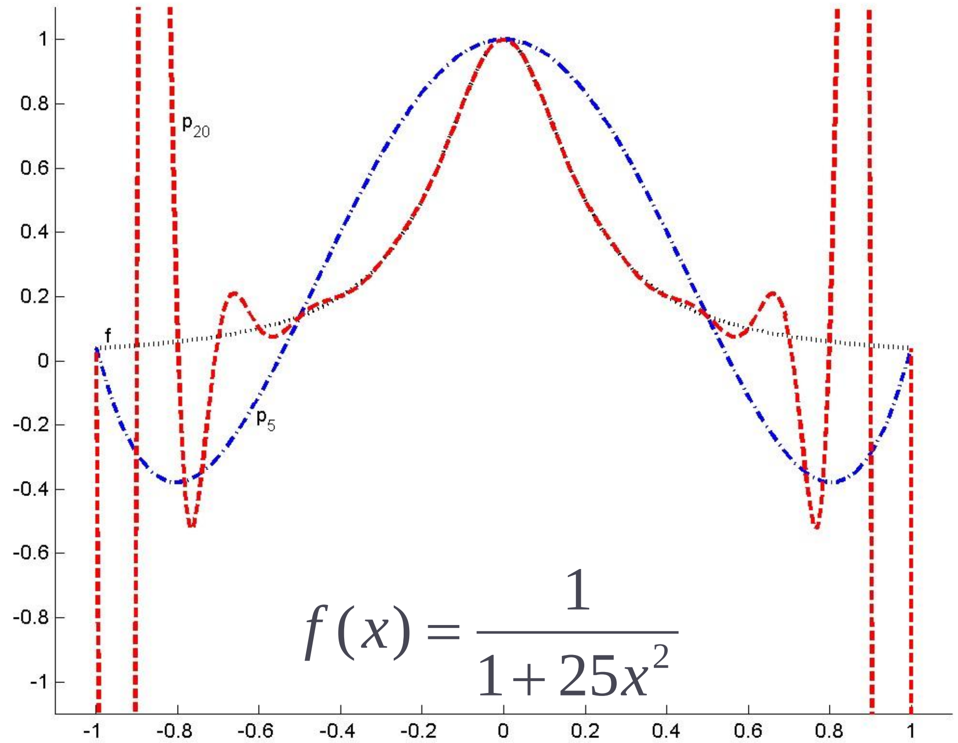
- Το σφάλμα της παρεμβολής είναι μεγάλο για μεγάλου βαθμού πολυώνυμα, π.χ. για n=20 με ομοιόμορφη διαμέριση το σφάλμα φράσσεται:

$$\left\| f - p_n \right\|_\infty \le \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty$$

γιατί

$$\max_{a \le x \le b} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \le \frac{n!}{4} h^{n+1},$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$



Συνάρτηση Runge