ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

Μέθοδος μονωνύμων απαιτεί

(i) υπολογισμός πίνακα $(n+1 \times n+1)$
(ii) λύση γραμμικού συστήματος $\Big\}$ ⇒ υπολογισμός συντελεστών πολυωνύμου

(iii) υπολογισμοί τιμών του πολυωνύμου

Υπολογισμός κόστους (αναλυτικά)

(i)
$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμοί ανά στήλη

Πλήθος στηλών

$0 \quad 0 \quad n+1 \;\cdots\; n+1$
πολ/μοί … πολ/μοί $= (n+1)(n-1) =$
$= n^2 - 1$ πολ/μοί

(ii) Λύση γραμμικού συστήματος (μεγέθους $(n+1)\times(n+1)$)
με LU παραγοντοποίηση: $O\left(\frac{(n+1)^3}{3}\right) \approx O\left(\frac{n^3}{3}\right)$

(iii) Υπολογισμός τιμής πολυωνύμου:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Χείριστος τρόπος: για τον i-στό όρο $a_i x^i$

$i-1$ πολ/μοί

1 πολ/μός

i πολ/μοί.

Συνολικά: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i + n$

↑ προσθέσεις

↑ πολ/μοί

$$= \sum_{i=0}^{n} i + n = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{2n+n^2+n}{2} =$$

Πολ/μοί.

$$= \sum_{i=1}^{n} i + n = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{2n+n^2+n}{2} =$$

$$= \frac{n^2+3n}{2} = O(n^2)$$

Σχήμα Horner:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n =$$

$$= a_0 + x\Big(a_1 + x\big(\dots + x(\underbrace{a_{n-1} + a_n x}_{2\text{ πράξεις}})\dots\big)\Big)$$

n παρενθέσεις

= 2n πράξεις

Δημιουργία πίνακα	Λύση συστήματος	Υπολογισμός τιμής πολυωνύμου
n^2-1	$O\left(\frac{n^3}{3}\right)$	$2n$

} Συνοψίζοντας

Συνολικά: $O(n^3)$

Lagrange αναπαράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής: $p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$

με $L_k(x) = \dfrac{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}$

- Δημιουργία Πίνακα = μοναδιαίος!!
- Λύση γρ. σ. "

} ⇒ 0 πράξεις για υπολογισμό συντελεστών πολυωνύμου!

- υπολογισμός τιμής πολυωνύμου

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x-x_j)}{\prod (x_k - x_j)}$$

Αριθμητής: n-1 πολλ/μοί, n προσθέσεις

Παρονομαστής: n-1 πολλ/μοί, n προσθέσεις

$$\underbrace{(2n-1)}_{\text{Παρονομαστής}} + \underbrace{2n-1}_{\text{Αριθμητής}} + \underbrace{1}_{\text{κλάσμα}}$$

$$= 4n-1 \text{ πράξεις} \quad \boxed{O(n)}$$

$$\underbrace{p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \underbrace{L_k(x)}_{O(n)}}_{O(n^2)}$$

Δημιουργία πίνακα	Λύση συστήματος	Υπολογισμός p(x)
0	0	$O(n^2)$

Σύνολο: $O(n^2)$

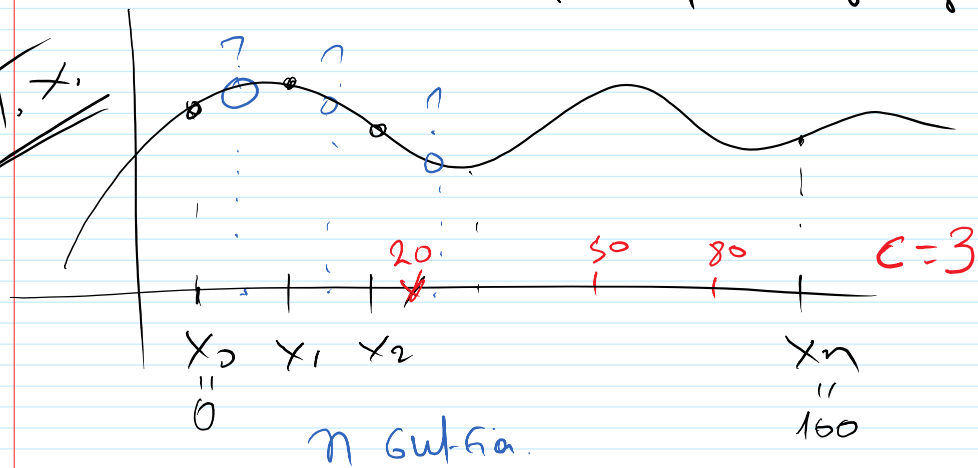
Σύγκριση:

- Για δημιουργία του P υπερτερεί η Lagrange
- Για υπολογισμό τιμών:
  - σε c σημεία → { $O(cn)$ μονώνυμα, $O(cn^2)$ Lagrange }
    (c δεν εξαρτάται από n) σταθερό
  - n σημεία → { $(O(n^2))$ μονώνυμα

σταθερό

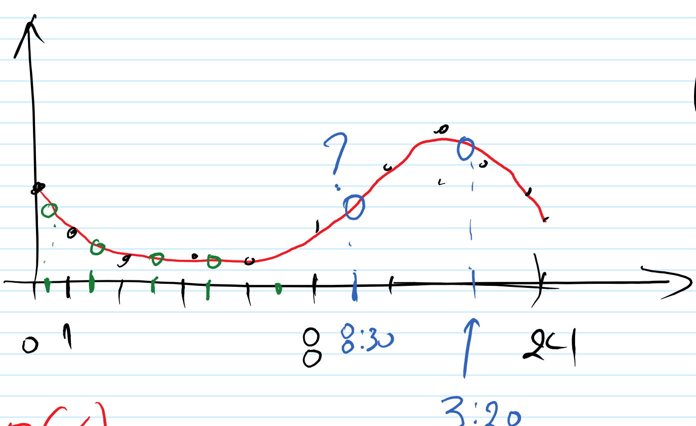
- n σημεία → { $(O(n^2))$ μονώνυμα ; $O(n^3)$ Lagrange }

Π.χ.



Ποσοτικά : οι 2 μέθοδοι είναι ισοδύναμες

Ποιοτικά : υπερτερεί η Lagrange (ο Vandermonde έχει κακή κατάσταση)



(x_0, y_0)
(x_1, y_1)
(x_i, y_i)
$i = 0, \ldots, 23$
$n = 23$

$p(x)$

Πολυώνυμο παρεμβολής

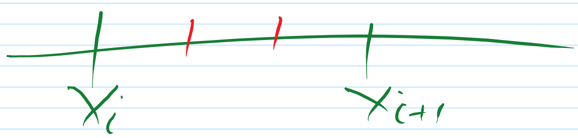
- $x = 8{:}30$
  $x = 3{:}20$
  (2 τιμές) $c = 2$

- $x_i = i \qquad i = 0, \dots 23 (= n)$

$z_i = x_i + \frac{1}{2} \rightarrow [0{:}30,\ 1{:}30 \dots\ 23{:}30]$

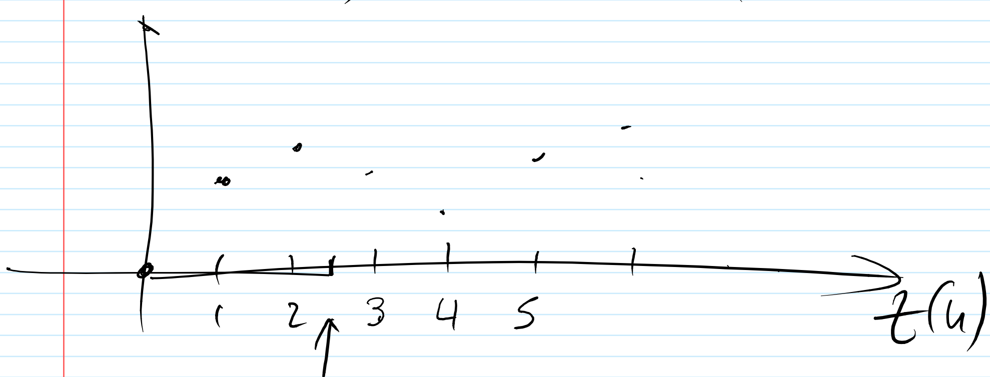
$i = 0, \dots, 23 (= n)$

Τάξης ποιότητα για επιπλέον υπολογισμούς!



$(x_i, y_i) \qquad i = 0, \dots, 23$

$x_i = i \ , \qquad y_i = \sin(x_i)$



$2{:}30 = 2{,}5$

$$L_k(x) = \frac{\prod_i (x - x_i)}{\prod_i (x_k - x_i)} = \frac{\prod_{i=0, i \neq k}^{n} (x - i)}{\prod_{i=0, i \neq k}^{n} (k - i)}$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sin(k) \frac{\prod (x - i)}{\prod (k - i)}$$

$$\prod (2{,}5 - i)$$

$$p(2,5) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k) \frac{\prod (2,5-i)}{\prod_i (k-i)}$$

Αναπαράσταση Newton / Διαιρεμένες Διαφορές

(x_i, y_i) $i=0,1,\dots,n$

Βάση $\pi_i(x)$ $i=0,\dots,n$ όπου:

$\pi_0(x)=1$

$\pi_1(x) = x - x_0$

$\pi_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)$

$\pi_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$\vdots$

$\pi_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})$

$k=0,\dots,n$

Το πολυώνυμο παρεμβολής:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \pi_k(x)$$

$\gamma_k = ?$

Θέλω $p(x_i) = y_i$! $i=0,\dots n$

Θέλω $\underset{\parallel}{P}(x_i) = y_i$! $i=0,\dots n$

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \Pi_k(x_i) = y_i \qquad i=0,\dots n$$

$i=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \underline{\Pi_k(x_0)} = y_0$

$\Pi_k(x_0) = ?$ $\quad k=0,\dots n$

$\Pi_0(x_0) = 1$

$\Pi_1(x_0) = x_0 - x_0 = 0$

$\Pi_2(x_0) = (x_0 - x_0)(x_0 - x_1) = 0$

$\vdots$

$\Pi_k(x_0) = (x_0 - x_0)(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_{k-1}) = 0$

$\vdots$

$\sum \gamma_k \Pi_k(x_0) = y_0 \Leftrightarrow \gamma_0 \cdot 1 = y_0$

$i=1$, $\sum \gamma_k \Pi_k(x_1) = y_1$

$\Pi_k(x_1) = ?$ $\quad k=0,1\dots n$

$\Pi_0(x_1) = 1$

$\Pi_1(x_1) = x_1 - x_0$

$\Pi_2(x_1) = (x_1 - x_0)\,(\cancel{x_1 - x_1})^{\to 0} = 0$

$$\Pi_2(x_1) = (x_1 - x_0)\cancel{(x_1 - x_1)} = 0$$

$\vdots$

$$\Pi_n(x_1) = (x_1 - x_0)\cancel{(x_1 - x_1)}^{\to 0} \cdots (x_1 - x_{n-1}) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \Pi_k(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 (x_1 - x_0) = y_1$$

Γενικά παρατηρώ ότι

$$\Pi_k(x_j) = 0 \quad j < k, \text{ αφού } \Pi_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 \cdot 1 &&= y_0 \\
&\gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 (x_1 - x_0) &&= y_1 \\
&\gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 (x_2 - x_0) + \gamma_2 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &&= y_2 \\
&\vdots \\
&\gamma_0 + \gamma_1 (x_n - x_0) + \gamma_2 (x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots \\
&\quad + \gamma_n (x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) &&= y_n
\end{aligned}$$

σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & & 0 \\
1 & x_1 - x_0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & \prod^{n-1} x_n - x_i
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots & & & & \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \cdots & \left(\prod_{k=0}^{n-1} x_n - x_k\right) \end{bmatrix}$$

$$\|$$

$$M$$

$$M \cdot \gamma = y$$

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ
& ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ TAYLOR

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Παρεμβολή - Παράσταση σε μορφή Newton

Για δεδομένα σημεία (x_i, y_i), i=0,...,n, οι συναρτήσεις βάσεις Newton ορίζονται ως:

$$\pi_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1}(x - x_k), \qquad j = 0,\ldots,n$$

όπου το π_0 είναι ίσο με μονάδα παντού. Τα πολυώνυμα παρεμβολής κατά Newton έχουν την μορφή:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Επειδή για $i<j$, $\pi_j(x_i)=0$, ο πίνακας A(στο σύστημα $Ac=y$) είναι κάτω τριγωνικός αφού $a_{ij} = \pi_{j-1}(x_{i-1})$.

Παρεμβολή – Παράσταση σε μορφή Newton

Για δεδομένα σημεία (-2, -27), (0, -1), (1, 0), το πολυώνυμο Newton δευτέρου βαθμού που παρεμβάλλεται στα παραπάνω σημεία ορίζεται σαν λύση του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

δηλαδή

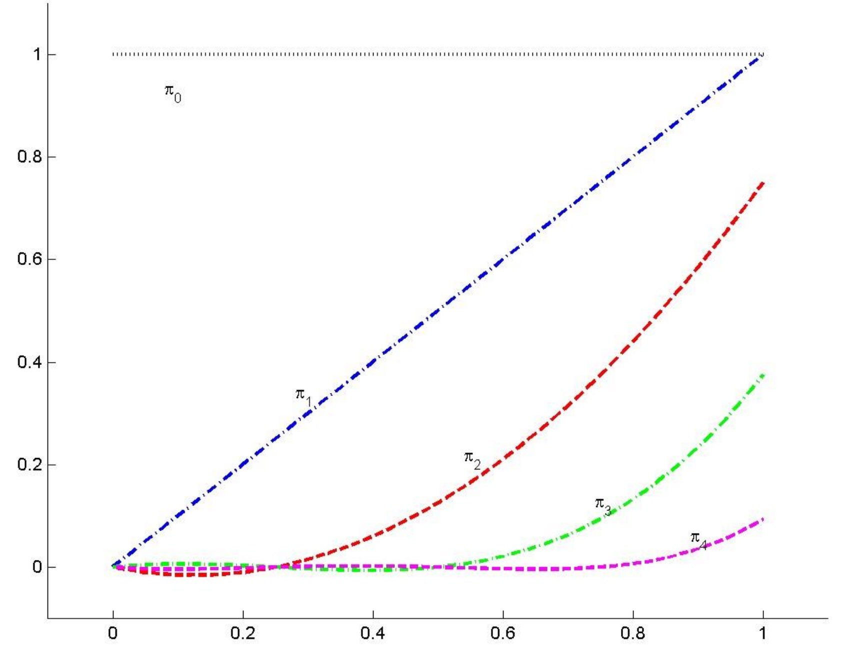
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad c = \begin{bmatrix} -27 \\ 13 \\ -4 \end{bmatrix}$$

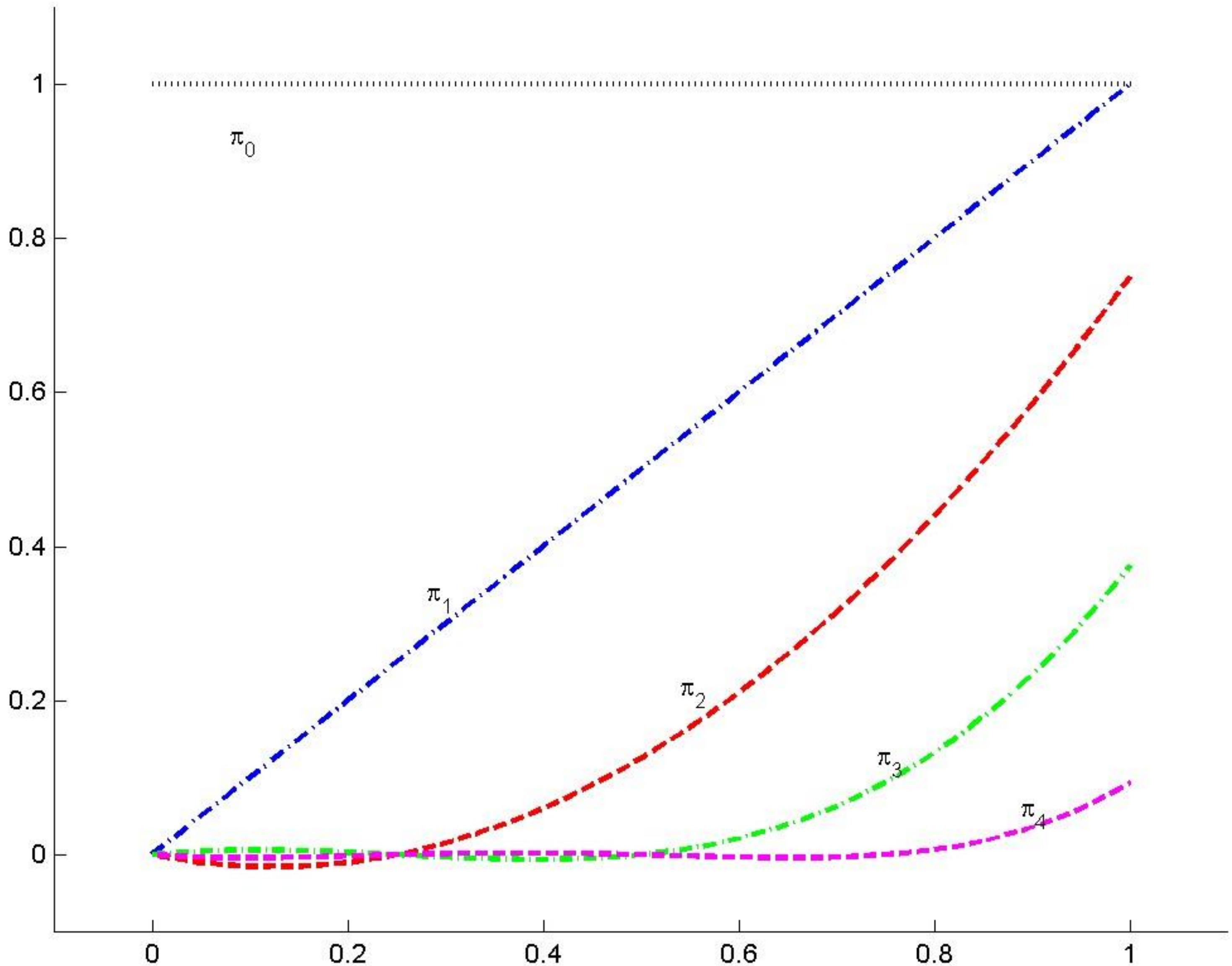
οπότε το πολυώνυμο γράφεται σαν:

$$p(x) = -27 + 13(x+2) - 4(x+2)x$$

Παρεμβολή – Παράσταση σε μορφή Newton

- Τα 5 πολυώνυμα βάσης Newton για τα σημεία 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.
- Η παρεμβάλλουσα κατά Newton υπολογίζεται σε $O(n^2)$ πράξεις (προς τα εμπρός αντικατάσταση).
- Η παρεμβάλλουσα μπορεί υπολογισθεί εύκολα σε διάφορα άλλα σημεία(με σχήμα Horner).
- Ισχύει:
  - $\pi_{j+1}(x)= \pi_j(x)(x-x_i)$
  - $p_{j+1}(x)=p_j(x)+c_{j+1}\pi_{j+1}(x)$
- Το κόστος μεταξύ υπολογισμού των συντελεστών της παρεμβάλλουσας και υπολογισμού των τιμών της σε διάφορα σημεία είναι ίδιας τάξης.




1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
π_0
π_1
π_2
π_3
π_4

Παρεμβολή – Διαιρεμένες Διαφορές

Έστω $f \in C[a,b]$, και $x_i \in [a,b]$, $i=0,1,\ldots$, με $x_i \neq x_j$ με $i \neq j$. Τότε ορίζουμε επαγωγικά ως προς i :

$$\Delta^0(x_i)(f) := f(x_i), \quad \mathrm{i} = 0,1,\ldots$$

$$\Delta^i(x_0,\ldots,x_i)(f) := \frac{\Delta^{i-1}(x_1,\ldots,x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0,\ldots,x_{i-1})(f)}{x_i - x_0}, \quad i = 1,2,\ldots$$

Ο αριθμός $\Delta^i(x_0,\ldots,x_i)$ λέγεται διαιρεμένη διαφορά τάξης i της f ώς προς τα σημεία $x_0,\ldots,x_i$.

<u>**Πρόταση:**</u> Τα c_i στο πολυώνυμο παρεμβολής κατά Newton είναι ίσα με τη διαιρεμένη διαφορά τάξης i της f, δηλαδή:

$$\begin{aligned} p_n(x) = {} & \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0) + \\ & \Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \\ & \Delta^{n+1}(x_0,\ldots,x_{n+1})(f)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \end{aligned}$$

Υπολογισμός Διαιρεμένων Διαφορών

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & n=0 & & 1 & & 2 & \cdots \\
x_0 & \boxed{\Delta^0(x_0)(f)} & \searrow & & & & \\
x_1 & \Delta^0(x_1)(f) & \substack{\rightarrow \\ \searrow} & \boxed{\Delta^1(x_0,x_1)(f)} & \searrow & & \\
x_2 & \Delta^0(x_1)(f) & \rightarrow & \Delta^1(x_1,x_2)(f) & \rightarrow & \boxed{\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Υπολογισμός Διαιρεμένων Διαφορών - Παράδειγμα

Για τα δεδομένα σημεία (-2, -27), (0, -1), (1, 0), το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που παρεμβάλλεται σε αυτά είναι:

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & n=0 & & 1 & & 2 & \cdots \\
x_0=-2 & \boxed{-27} & \searrow & & & & \\
x_1=0 & -1 & \rightarrow & \boxed{13} & \searrow & & \\
 & & \searrow & & & & \\
x_2=1 & 0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & \boxed{-4} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

$$p(x) = -27 + 13(x+2) - 4(x+2)x$$