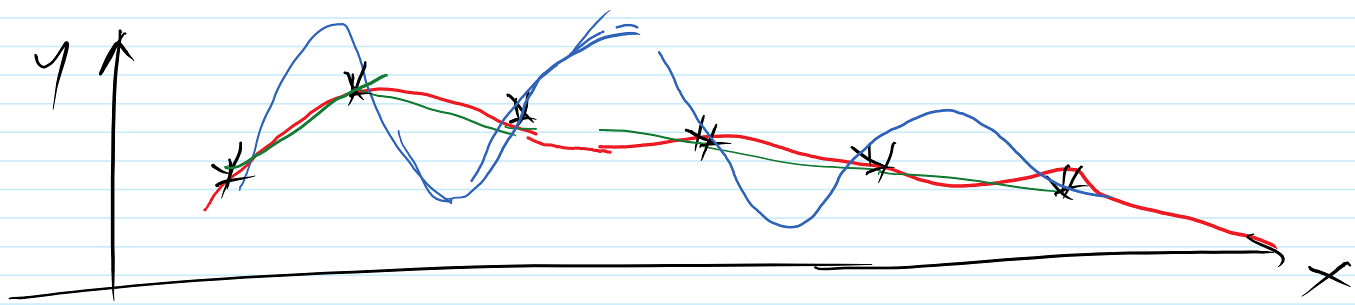
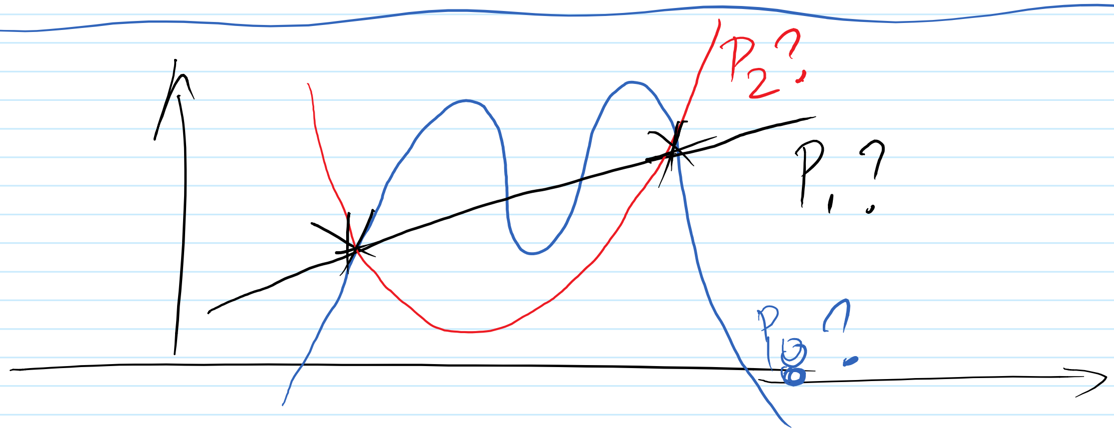
Interpolation (1)

Τρίτη, 3 Μαρτίου 2015 9:46 πμ

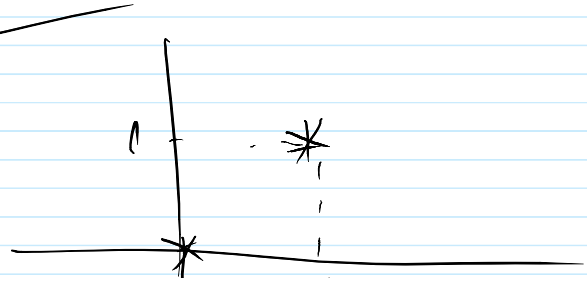
$(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \ldots, n$





Το πιο απλό πολυώνυμο που παρεμβάλλεται για (x_i, y_i)

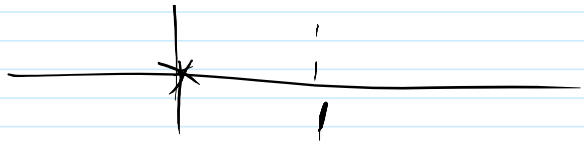
πχ.



$p(x) = x$

$p(x) = x^2$

$p(x) = x^3$



$p(x) = x^3$

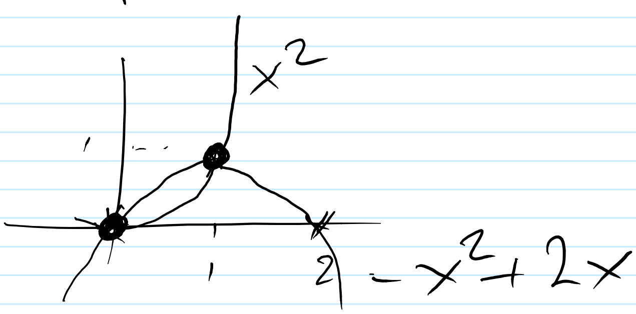
$\vdots$

$p(x) = x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $p(x) = x$, μοναδικό πολ. 1ου βαθ. που περνά από $(0,0)$, $(1,1)$

- $p(x) = x^2$, δεν είναι μοναδικό 2ου β.

  $p(x) = x(2-x)$



- Άρα χρειαζόμαστε ελαχ. βαθμό πολυωνύμου που να περνά από τα (x_i, y_i) $i = 0, 1, \dots, n$

Βαθμός = ?

= πλήθος σημείων − 1

$$= (n+1) - 1 = n$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

$a_j = ?$ $j = 0, \dots, k$

Πως θα υπολογίσω τα a_j?

$$p(x_i) = y_i \quad , i = 0, 1, \dots, n$$

$\iff$

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_k x_i^k = y_i$$

$i = 0, 1, \dots, n$

$n+1$ εξισώσεις με

$k+1$ αγνώστους

Το σύστημα αποτελείται από

γραμμικές εξισώσεις (ως προς τα a_j)

Άρα $n+1$ γρ. εξ. με $k+1$ αγνώστους.

$n = k$ για να λύνεται μοναδικά

πλήθος σημείων -1

βαθμός πολ.

Το σύστημα έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vandermonde

λύση συστήματος (LU)

$a_0, a_1, \ldots, a_n$

$\Downarrow$

$P(x)$

(n+1 σημεία ⇒ n+1 εξισώσεις

⇒ υπολ. n+1 αγνώστων συντελεστών ⇒ n βαθμού)

<u>Παράδειγμα</u>:

$(x_i, 0)$, $x_i = i$, $i = 1, \ldots 8$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & & 2^7 \\ \vdots & 3 & 3^2 & & 3^7 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 8 & 8^2 & & 8^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_7 = 0$$

$$p(x) = 0$$

Μέθοδος των μονωνύμων για εύρεση του p.

$x^k \quad , \quad k=0,\dots,n$

(χώρος πεπερασμένης διάστασης)

X, 1η βάση $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k\}$

$$x \in X \Rightarrow x = \sum_{i=0}^{k} a_i \varphi_i$$

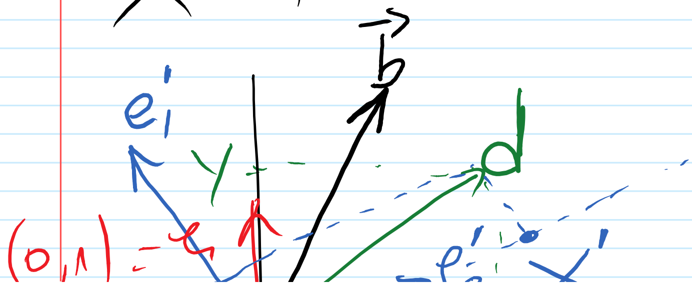
2η βάση $\{h_0, h_1, h_2, \dots h_k\}$

$$x = \sum_{i=0}^{k} \beta_i h_i$$

$$a_i \neq \beta_i$$

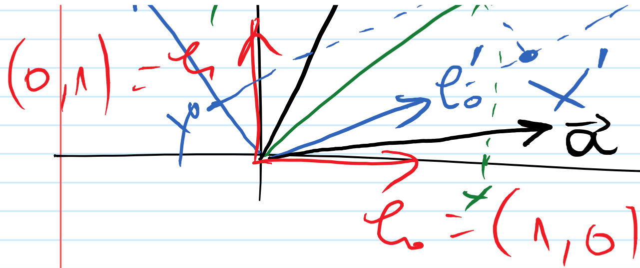
Παράδειγμα:

$$X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



$$d = x\vec{e}_0 + y\vec{e}_1 = (x,y)$$

$$d = x'\vec{e}_0' + y'\vec{e}_1'$$



$$d = x'\vec{e}'_0 + y'\vec{e}'_1$$

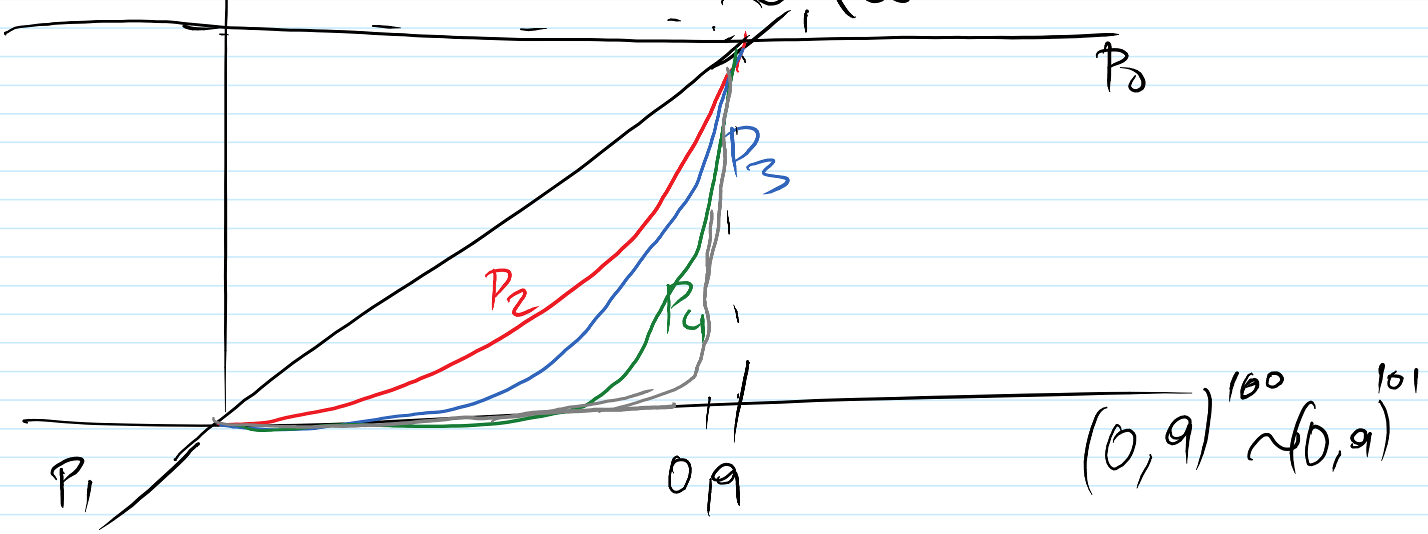
$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ γραμμ. ανεξ. $\Rightarrow \vec{e}''_0, \vec{e}''_1$

ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$

Gram Schmidt
ορθοκανονικοποίηση

(ελέγξτε Γραμ. Αλγ. !!)

Τα μονώνυμα = βάση του χώρου των πολυωνύμων



P_1 / ... $0\,9$ ... (0)

Τα μονώνυμα όχι καλή βάση του χώρου των πολυωνύμων,

ο πίνακας Vandermonde ασταθής, έχει κακή κατάσταση (ill-conditioned)

$\Rightarrow$ όχι καλός (ακριβής) τρόπος υπολογισμού των $a_0, a_1, \ldots a_n$

Άρα μεταπηδάμε σε άλλη βάση των πολυωνύμων

Ποιά βάση ??

$1^{o)}$ τρόπος Lagrange πολυώνυμα

- $x_i \quad i=0,1 \ldots n$

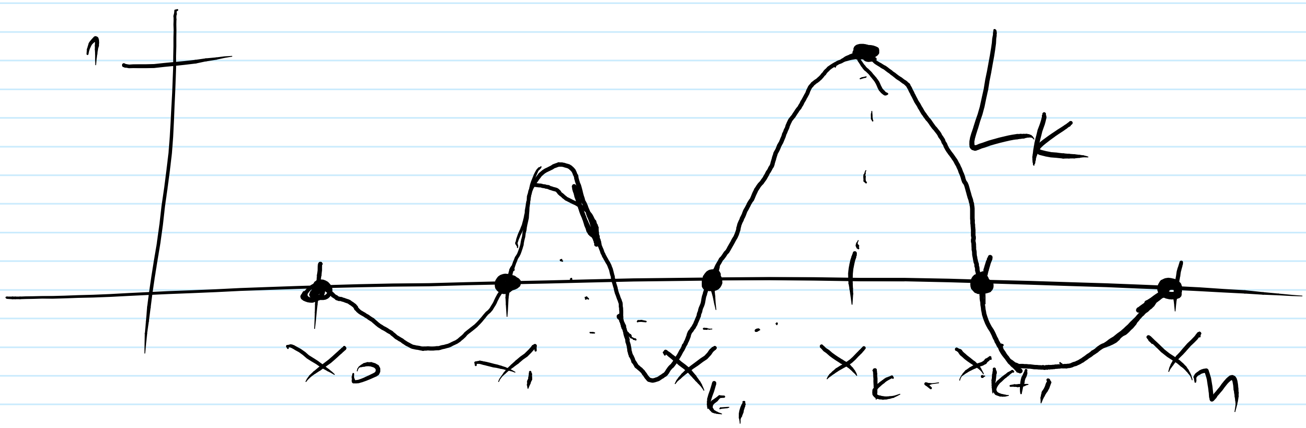
- $L_0, L_1 \ldots L_n$ πολυων., βαθμού n.

- $L(x)$ έχει $n-1$ ρίζες

L_K

$$L_K(x_i) = 0 \qquad i \neq K$$

$$L_K(x_K) = 1 \qquad \forall K = 0, \dots, n$$



τότε

$$p(x) = \sum_{K=0}^{n} y_K L_K(x)$$

$$L_K(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq K}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq K}^{n} (x_K - x_j)}$$

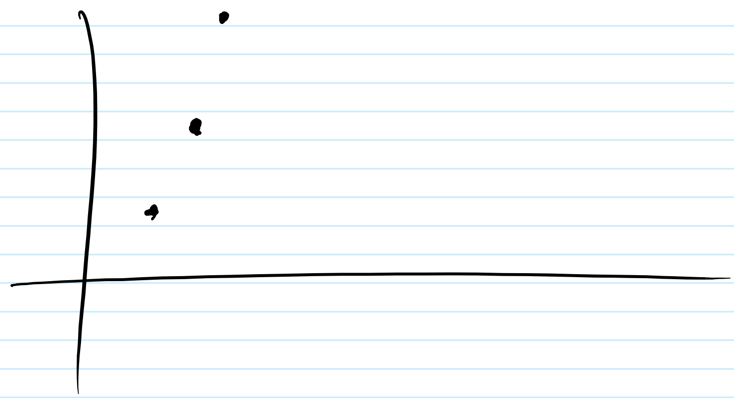
$$L_K(x_i) = \frac{\prod_{j=0, j\neq K}^{n} (x_i - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq K}^{n} (x_K - x_j)} = 0$$

$\forall i \neq K$

$\forall\, i \neq k \qquad \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} (x_k - x_j)$

$$L_k(x_k) = \frac{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)} = 1$$

Παράδειγμα



$(x_0, y_0) = (1, 2)$

$(x_1, y_1) = (2, 4)$

$(x_2, y_2) = (3, 7)$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

$$L_0(x_1) = L_0(2) = \frac{(2-2)(2-3)}{2} = 0 \;!$$

$$L_0(x_2) = L_0(3) = \frac{(3-2)(3-3)}{2} = 0 \;!$$

$$L_0(x_0) = \frac{(1-2)(1-3)}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2} = 1 \; !$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dots$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dots$$

$(x_i, y_i) \quad i = 0, 1 \dots, n$

$\Downarrow$

$L_k(x) = \dots \qquad k = 0, \dots n$

$\Downarrow$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k(x)$$

?

Θέλω

$$p(x_i) = y_i \quad \forall i=0,\dots n$$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k L_k(x_i) = y_i \quad \forall i=0,\dots n$$

$$b_0 L_0(x_0) + b_1 L_1(x_0) + b_2 L_2(x_0) + \dots + b_n L_n(x_0) = y_0$$

$$b_0 L_0(x_1) + b_1 L_1(x_1) + \dots \quad b_n L_n(x_1) = y_1$$

$$\vdots$$

$$b_0 L_0(x_n) + b_1 L_1(x_n) + \dots \quad b_n L_n(x_n) = y_n$$

$$\begin{bmatrix} L_0(x_0)^{\,1} & L_1(x_0)^{\,0} & L_2(x_0)^{\,0} & \dots & L_n(x_0) \\ L_0(x_1) & L_1(x_1) & L_2(x_1) & \dots & L_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0(x_n) & L_1(x_n) & L_2(x_n) & \dots & L_n(x_n)^{\,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = y$$

$$I b = y \Leftrightarrow b = y$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (\text{μονώνυμα})$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x) \quad (\text{Lagrange})$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq k} (x_k - x_j)}}_{(n+1)^2 \text{ πράξεις}}$$

$n-1$ πολ/μων

$n+1$ πολ/μ

$(n+1)^2$: πράξεις

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ & ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ TAYLOR

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Βασικό πρόβλημα παρεμβολής

- Με δοσμένα τα δεδομένα (x_i, y_i), $i=1,\ldots,m$, με $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, υπολογίστε μία συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ τ.ω.
$$f(x_i) = y_i, \quad i=1,\ldots,m.$$
- Η f ονομάζεται παρεμβάλλουσα συνάρτηση των παραπάνω δεδομένων.
- Επιπλέον δεδομένα μπορεί να δίδονται (π.χ. η παράγωγος στα σημεία αυτά).
- Επιπλέον συνθήκες μπορεί να απαιτούνται, π.χ. ομαλότητα, μονοτονία ή κυρτότητα της παρεμβάλλουσας.
- Θα μελετήσουμε παρεμβάλλουσες συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

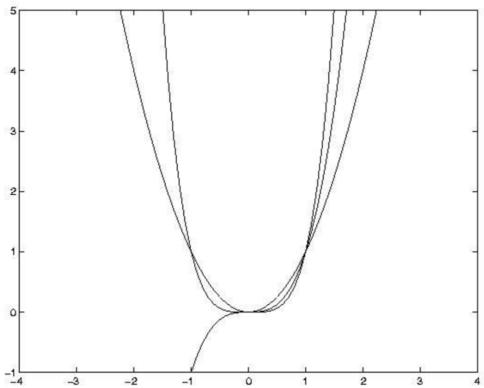
Γιατί;

- Αντικαθιστούμε πολύπλοκες συναρτήσεις με πολυώνυμα.
- Γρήγορος και εύκολος υπολογισμός πολυωνύμων.
- Εύκολος υπολογισμός παραγώγων και ολοκληρωμάτων.
- Σχεδιασμός ομαλής καμπύλης μεταξύ δεδομένων.

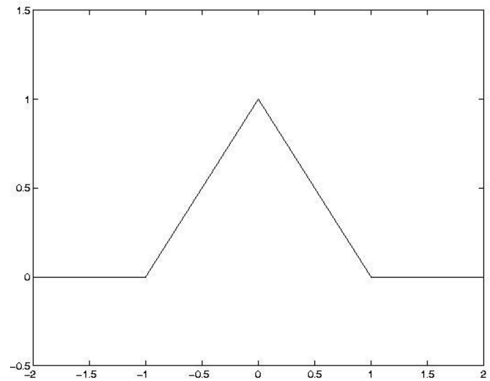
Παρεμβολή και προσέγγιση

- Εξ΄ορισμού, η παρεμβάλλουσα συνάρτηση περνά από τα σημεία/δεδομένα ακριβώς.
- Η παρεμβολή δεν είναι η πιο κατάλληλη μέθοδος όταν τα δεδομένα είναι *ευαίσθητα* σε σφάλματα.
- Για να αφαιρέσουμε θόρυβο από τα δεδομένα χρησιμοποιούμε μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
- Η προσέγγιση είναι κατάλληλη για ειδικές συναρτήσεις.

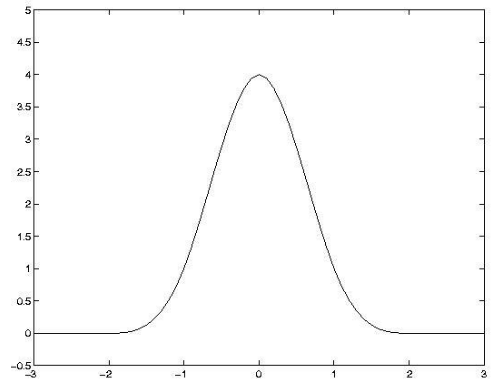
Τύποι συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται για προσέγγιση δεδομένων και συναρτήσεων.



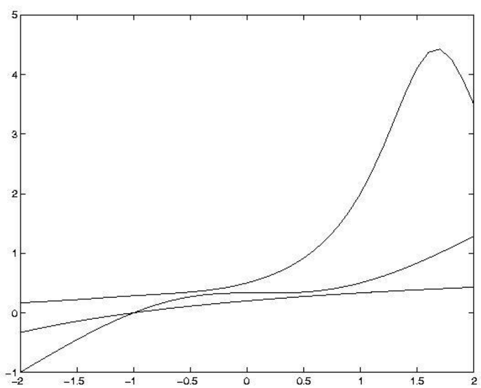
Πολυώνυμα



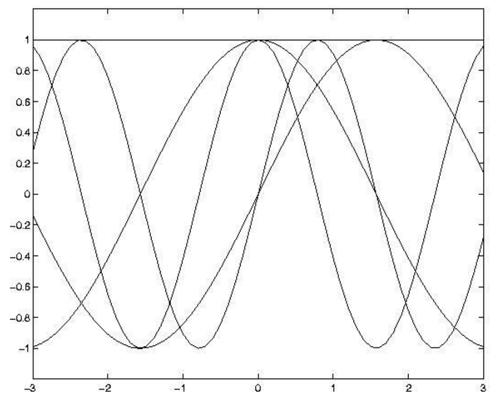
Κατά τμήματα γραμμικά πολυώνυμα



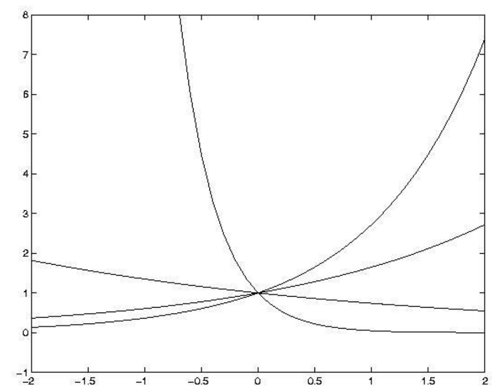
Splines



Ρητές συναρτήσεις

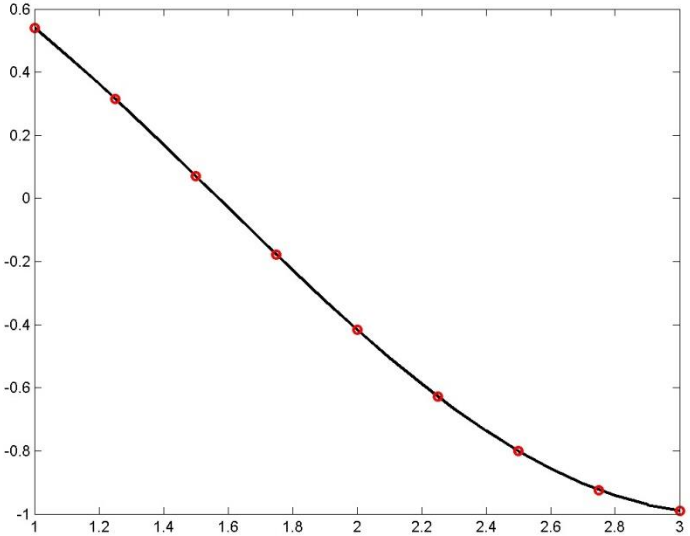


Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

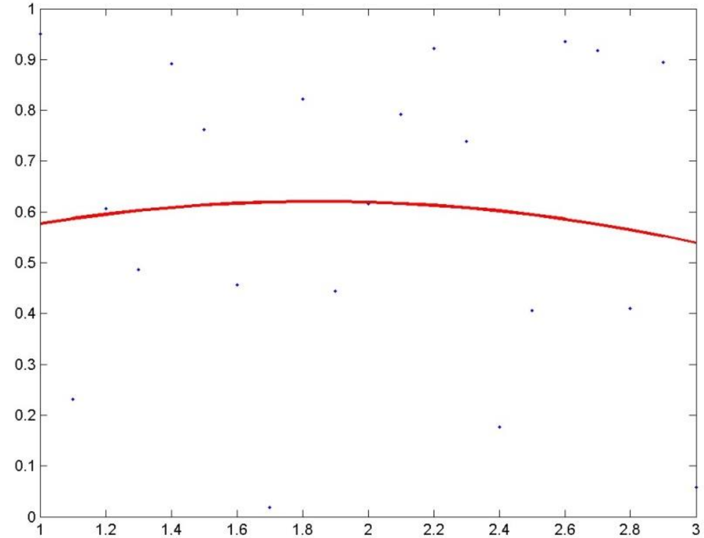


Εκθετικές συναρτήσεις

Αντιμετώπιση δεδομένων

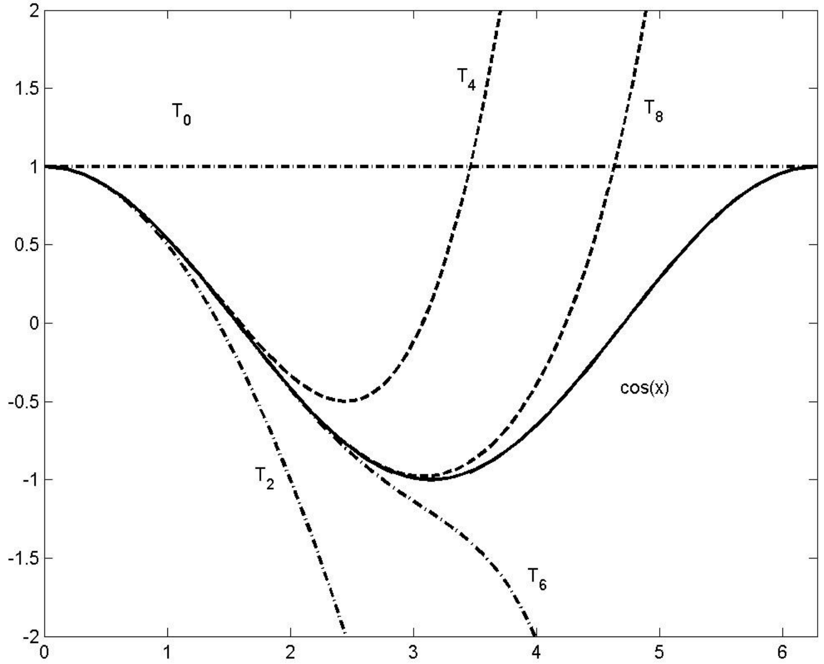


Παρεμβολή

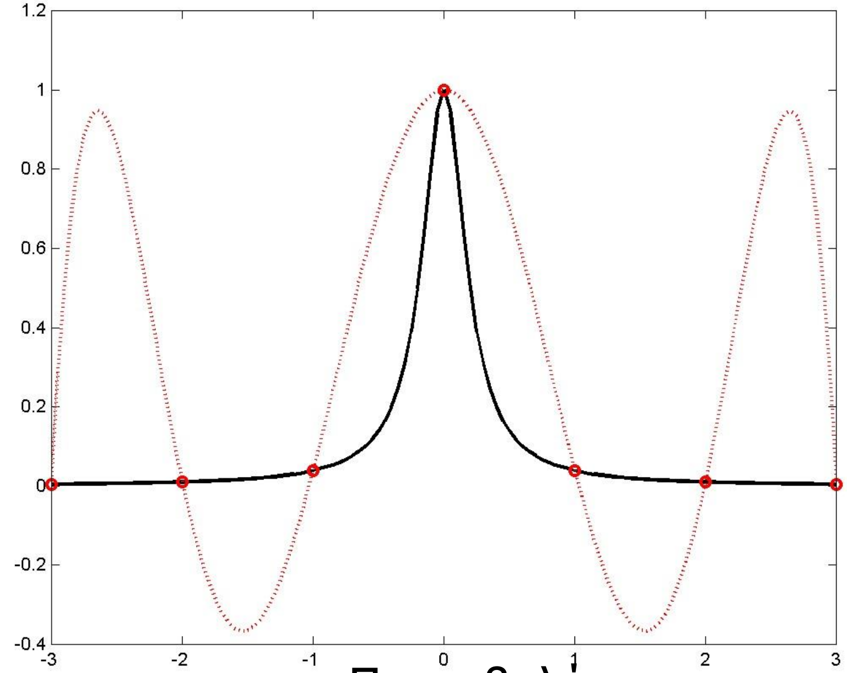


Προσέγγιση με άλλες μεθόδους
(π.χ., ελάχιστα τετράγωνα)

Αντιμετώπιση συναρτήσεων



Ανάπτυγμα Taylor

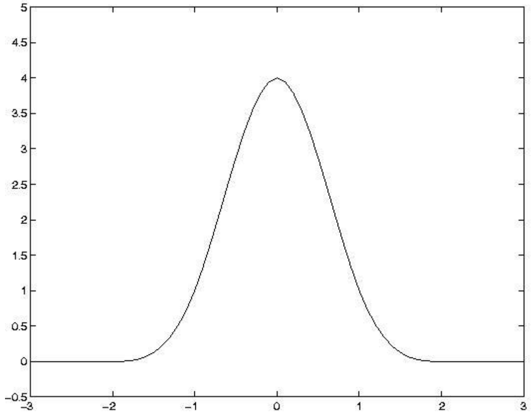


Παρεμβολή με διάφορες μεθόδους

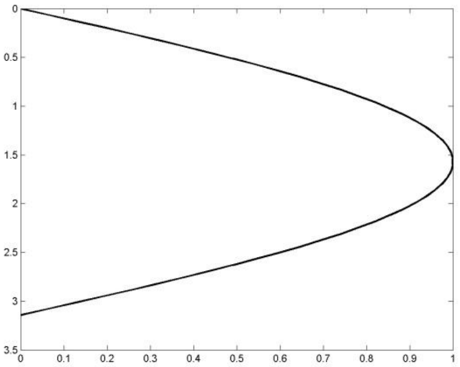
Συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται για παρεμβολή

- Είδη συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται για παρεμβολή:
  - Πολυώνυμα,
  - Κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις,
  - Τριγωνομετρικές συναρτήσεις,
  - Εκθετικές συναρτήσεις,
  - Ρητές συναρτήσεις,
- Θα ασχοληθούμε με πολυώνυμα και κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις.
- Παρεμβολή με τριγωνομετρικές θα δούμε σε μετασχηματισμούς Fourier.

Εισαγωγή / Επανάληψη Μαθηματικών εννοιών



Συνάρτηση



Καμπύλη

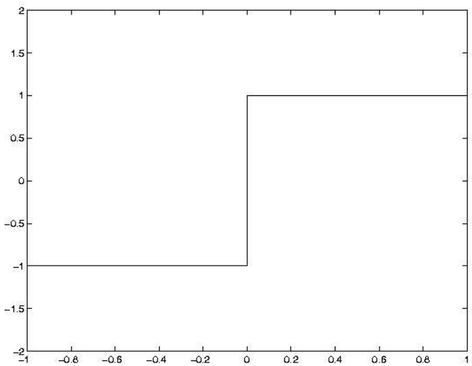
<u>Τύποι συναρτήσεων:</u>

<u>Αναλυτική:</u>

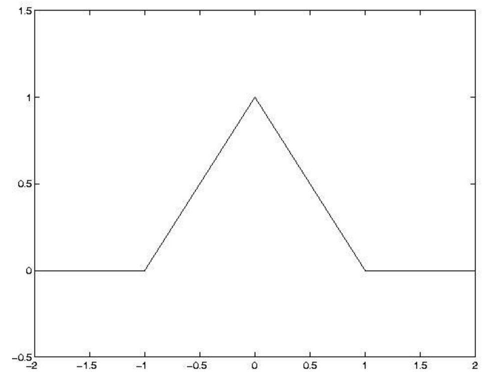
$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$$

Εισαγωγή / Επανάληψη Μαθηματικών εννοιών (συνέχεια)

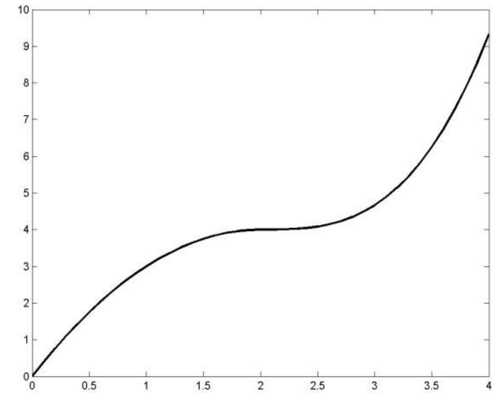
<u>Συνεχής ή μη:</u>



ασυνεχής



συνεχής με ασυνεχή 1η παράγωγο



συνεχής 1ου βαθμού

$$f(x)=\begin{cases}4+(x-2)^2, & x<2\\ 4+\dfrac{2}{3}(x-2)^3, & x\geq 2\end{cases}$$

<u>Διακριτή:</u>

Το πεδίο ορισμού είναι σύνολο από πεπερασμένα (ή αριθμήσιμα το πλήθος) σημεία:

$$a_i \equiv a(x_i) = \ldots,\quad i=1,\ldots$$

Θεώρημα Weierstrass:

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο φραγμένο διάστημα $[a,b]$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο p_n βαθμού $n=n(\varepsilon)$, τ.ω.

$$\max_{x\in[a,b]}\left| f(x) - p_n(x)\right| < \varepsilon$$

Προσοχή: Αυτό δεν σημαίνει ότι το p_n και η f τέμνονται σε κάποια σημεία.

Παρεμβολή δεδομένων/συναρτήσεων με πολυώνυμα

- <u>Δεδομένα:</u> $\{(x_i, y_i)\}, i=0,1,\ldots,n,$ y_i μετρήσεις ή $f(x_i)$
- <u>Ζητούμενο:</u> Ένα πολυώνυμο p, ελάχιστου βαθμού, που να περνά από τα παραπάνω σημεία.
- <u>Απάντηση:</u> Υπάρχει ένα και μοναδικό πολυώνυμο, βαθμού μικρότερου ή ίσου με n, το οποίο παρεμβάλλεται στα σημεία αυτά.
- <u>Τρόποι υπολογισμού:</u>
  - Lagrange
  - Μονώνυμα
  - Newton
  - Διαιρεμένες διαφορές

Συναρτήσεις βάσης

- Για καθορισμένα δεδομένα, η οικογένεια των συναρτήσεων που παρεμβάλλεται σε αυτά καθορίζεται από ένα σύνολο συναρτήσεων βάσης, $\varphi_0(x),\ldots,\varphi_n(x)$.
- Η παρεμβάλλουσα συνάρτηση f είναι γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x)$$

- Για να παρεμβάλλεται η f στα σημεία (x_i,y_i), $i=0,\ldots,m$ θα πρέπει:

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\ldots,m$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το γραμμικό σύστημα

$$Ac = y$$

με το c διάνυσμα με n στοιχεία, και τον πίνακα A να περιέχει τις τιμές των συναρτήσεων βάσης σε σημεία x_i , $a_{ij} = \varphi_{j-1}(x_{i-1})$.

Βάση πολυωνύμων από μονώνυμα

Αν χρησιμοποιήσουμε μονώνυμα σαν βάση για το χώρο των πολυωνύμων, δηλαδή:

$$\varphi_j(x) = x^j,\ j = 0,1,\ldots,n$$

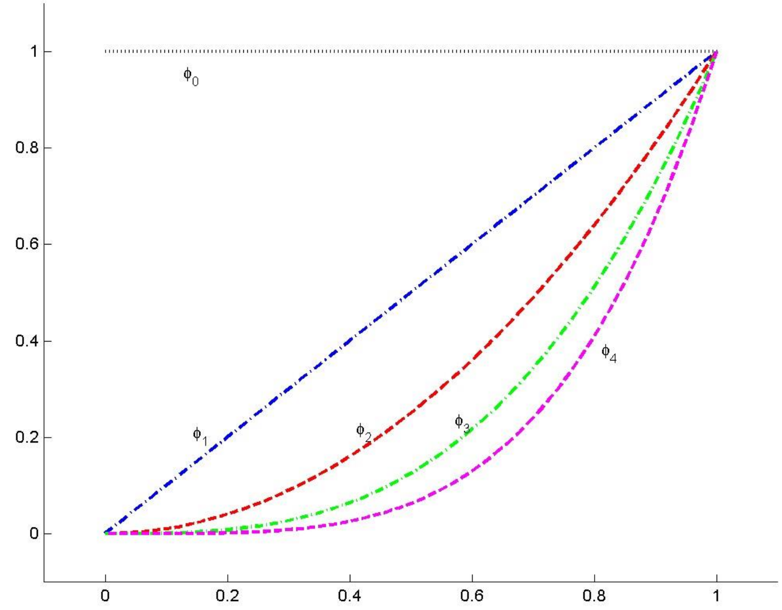
τότε το πολυώνυμο παρεμβολής είναι της μορφής:

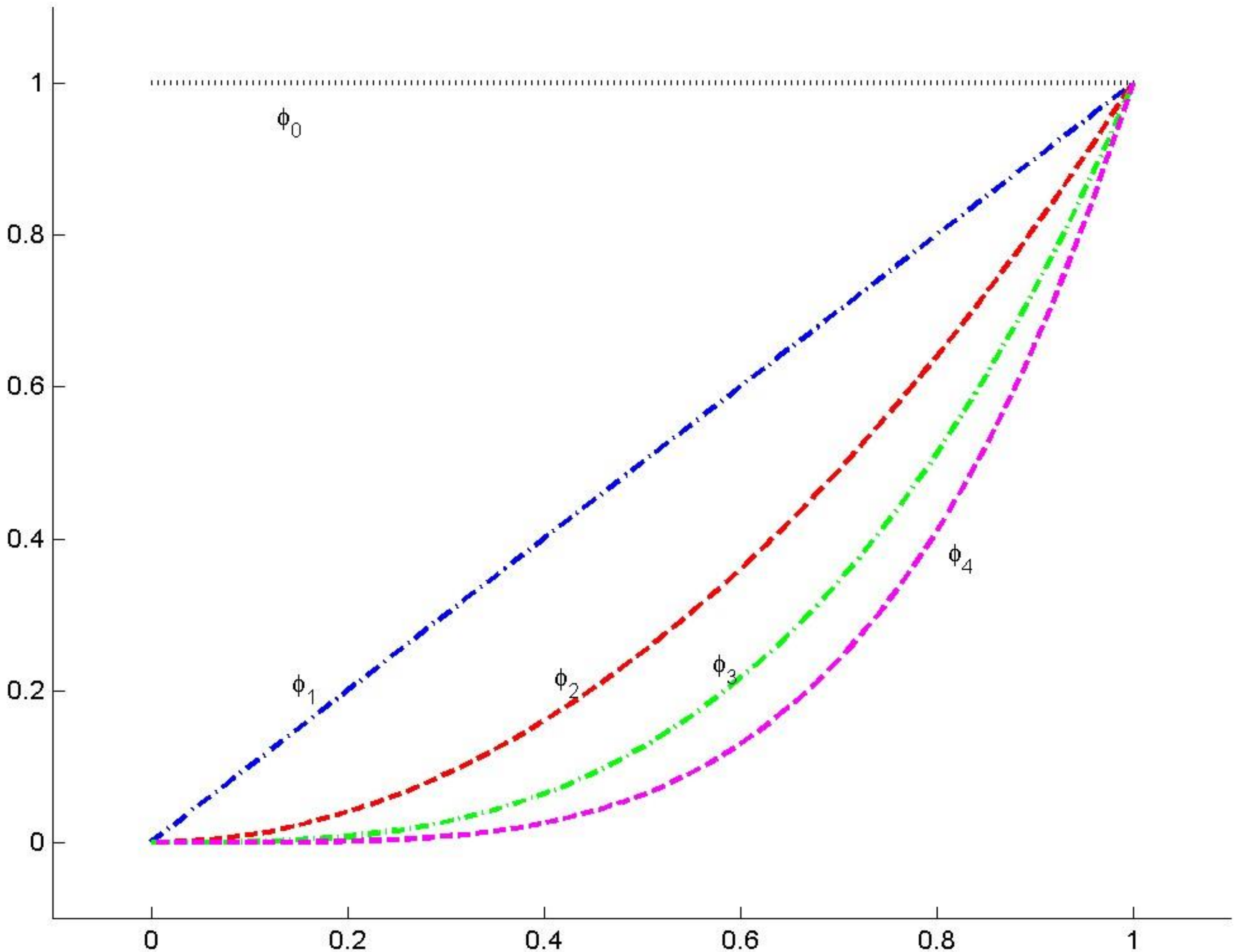
$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

όπου οι συντελεστές c_i, υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος:

$$Ac = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = y$$

ο πίνακας A λέγεται πίνακας Vandermonde.




1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
ϕ_0
ϕ_1
ϕ_2
ϕ_3
ϕ_4

Παράδειγμα με βάση τα μονώνυμα

Υπολογίστε το πολυώνυμο 2ου βαθμού που παρεμβάλλεται στα σημεία (-2, -27), (0, -1), (1, 0). Χρησιμοποιώντας τη βάση των μονώνυμων, το γραμμικό σύστημα είναι:

$$Ac = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y$$

για τα συγκεκριμένα δεδομένα:

$$Ac = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = y \quad \Rightarrow \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

και το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το:

$$p_2(x) = -1 + 5x - 4x^2$$

Παρεμβολή με βάση τα μονώνυμα

- Το κόστος της λύσης του συστήματος είναι $O(n^3)$.
- Ο πίνακας A έχει κακή κατάσταση, ειδικά όταν ο βαθμός του πολυωνύμου είναι μεγάλος.
- Οι συντελεστές του πολυωνύμου υπολογίζονται με μικρή ακρίβεια.
- Διαλέγοντας μια διαφορετική βάση, ο αντίστοιχος πίνακας έχει καλύτερη κατάσταση και μορφή.
- Καλύτερη κατάσταση → μεγαλύτερη ακρίβεια στον υπολογισμό της λύσης.
- Καλύτερη μορφή → μικρότερο κόστος.

Παρεμβολή – Παράσταση σε μορφή Lagrange

Για δεδομένα σημεία (x_i, y_i), $i=0,\ldots,n$, οι συναρτήσεις βάσεις Lagrange ορίζονται ως:

$$\ell_j(x) = \frac{\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(x - x_k)}{\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(x_j - x_k)}, \quad j = 0,\ldots,n$$

Για τη βάση Lagrange ισχύει:

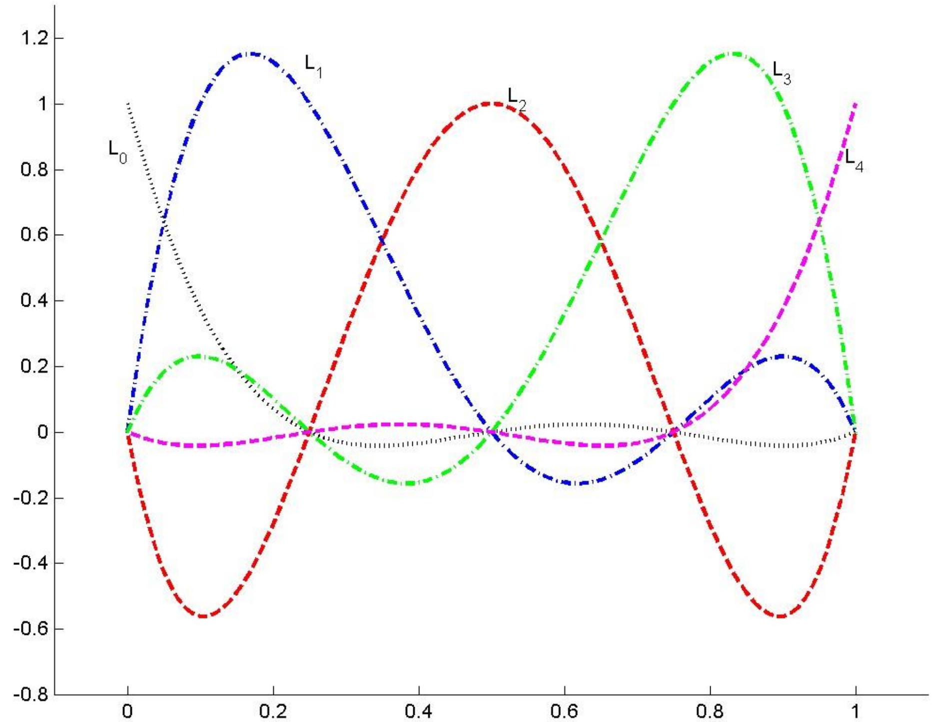
$$\ell_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \end{cases}, \qquad i,j = 0,\ldots,n$$

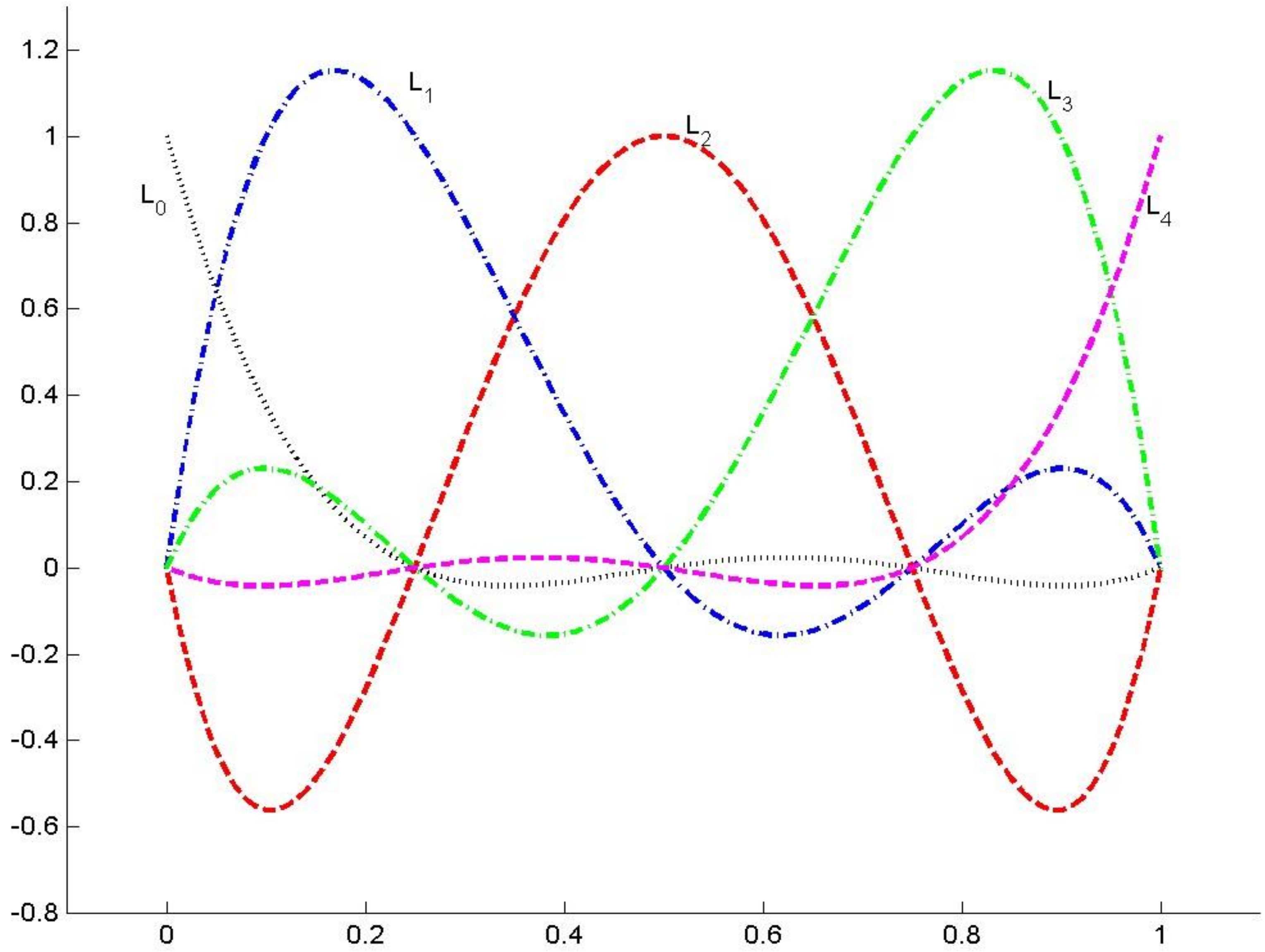
επομένως ο πίνακας A (στο σύστημα $Ax=y$) είναι ο μοναδιαίος → οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι τα παραπάνω y_i, άρα

$$p_n(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \ldots + y_n\ell_n(x)$$

Παρεμβολή – Παράσταση σε μορφή Lagrange

- Τα 5 πολυώνυμα βάσης Lagrange για τα σημεία 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.
- Η παρεμβάλλουσα κατά Lagrange είναι πολύ εύκολο να ορισθεί αλλά αρκετά πολύπλοκο να βρούμε την τιμή της για διάφορα άλλα σημεία.
- Η μορφή της παρεμβάλλουσας κάνει πολύπλοκη της παραγώγιση και την ολοκλήρωση της.





1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
L0
L1
L2
L3
L4

Παρεμβολή – Παράσταση σε μορφή Lagrange

Για δεδομένα σημεία (-2, -27), (0, -1), (1, 0), το πολυώνυμα Lagrange δευτέρου βαθμού που παρεμβάλλεται στα παραπάνω σημεία ορίζεται σαν:

$$p_2(x) = -27\frac{(x-0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)} + (-1)\frac{(x+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)} + 0\frac{(x+2)(x-0)}{(1+2)(1-0)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p_2(x) = -9\frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x+2)(x-1)}{2}$$