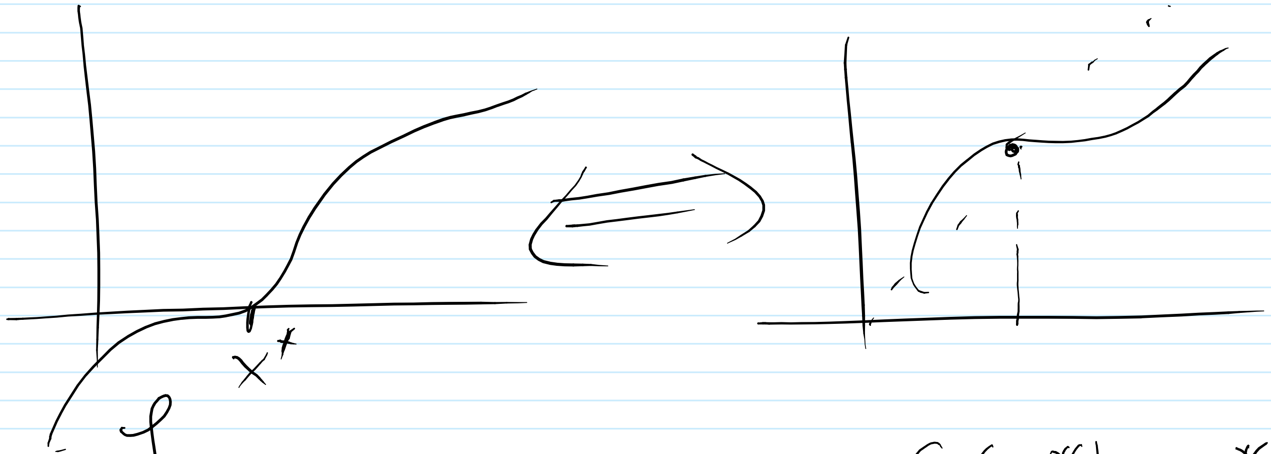
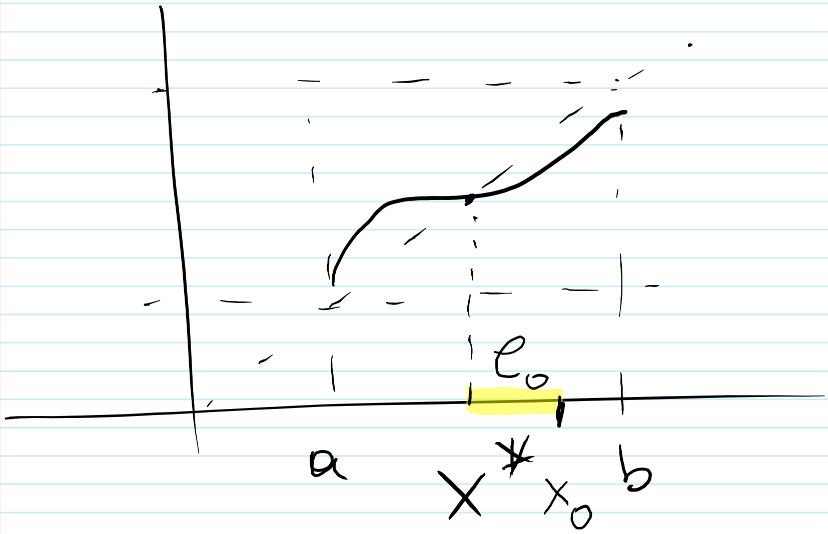
Non Linear Equations (2)

Τρίτη, 17 Φεβρουαρίου 2015 5:14 μμ



$f(x^*) = 0$ $\qquad$ $\varphi(x^*) = x^*$



φ συστολή

$L < 1$

$x_0 \to x_1 = \varphi(x_0)$

$\downarrow$

$x_2 = \varphi(x_1)$

?

$$|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|$$

$$\left.\begin{array}{l} |x_n - x^*| \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ x^* = \varphi(x^*) \end{array}\right\} \quad |x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)|$$

$$< L\,|x_{n-1} - x^*| =$$

φ συστολή

$$L\,|\varphi(x_{n-2}) - \varphi(x^*)|$$

$$< L \cdot L\,|x_{n-2} - x^*|$$

$$L^2\,|x_{n-2} - x^*|$$

$$\vdots$$

$$< L^n\,|x_0 - x^*|$$

$$< L^n \max\{|x_0 - a|, |b - x_0|\}$$

Π.χ.

$a = 1, \quad b = 5, \quad x_0 = 4$

$L = 10^{-1}$

$n = 4 \Rightarrow |x_4 - x^*| < 10^{-4} \cdot 3$

- Πόσες επαναλήψεις ώστε το σφάλμα $< 10^{-6}$ $(n?)$

$$|x_n - x^*| < L^n \cdot 3 < 10^{-6}$$

$$L^n < \frac{1}{3} 10^{-6}$$

$$\log_{10}(L^n) < \log_{10}\left(\frac{1}{3} 10^{-6}\right)$$

$$n \log_{10}(\cancel{10^{-1}}) < \log_{10}\frac{1}{3} + (-6)$$

$$(-1)$$

$$-n < -6 + \log_{10}\frac{1}{3}$$

$$n > 6 - \log_{10}\frac{1}{3}$$

$$\boxed{n \geq 7}$$

Για $n \geq 7$ $\quad |x_n - x^*| < 10^{-6}$

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2 = x$$

$$\varphi(x) = x^2 - 2$$

$$\boxed{\varphi(x) = x}$$

φ συστολή ;;

$$\left[\text{δηλ.} \; |\varphi(x) - \varphi(y)| < L|x-y| \;,\; L<1 \right]$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \varphi'(x) = 2x$$

$$|2x| < 1 \Rightarrow |x| < 1/2$$

$$-1/2 < x < 1/2$$

αν $[a,b] \subset (-1/2, 1/2)$ τότε μπορώ να εφαρμόσω την $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

$$\Rightarrow x^* = \varphi(x^*) \Leftrightarrow f(x^*) = 0$$

αν $[a,b] \not\subset (-1/2, 1/2) \Rightarrow$?

Άσκηση:

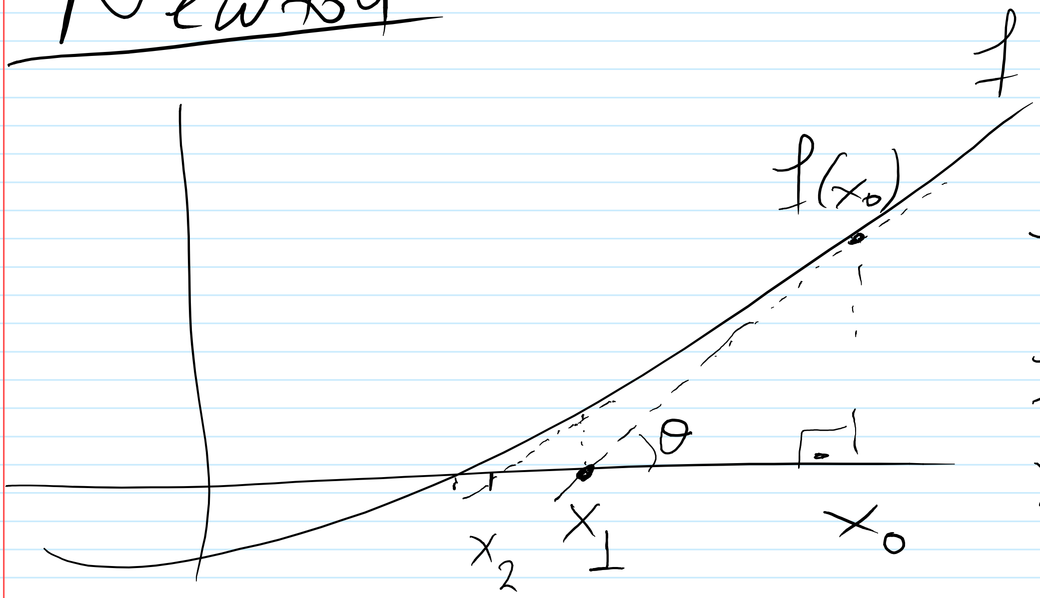
Για την f στη σελ. 17, υπολογίστε τις ρίζες της.

Βρείτε ποια g είναι συστολή κοντά στις ρίζες

ανοικτά διαστήματα που περιέχουν τις ...

ρίζες.

Newton



$$\left.\begin{array}{l} f \\ f' \\ x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \; ?$$

Γεωμετρία

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = \varepsilon\varphi(\theta) = f'(x_0)$$

? $f'(x_0) \neq 0$

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - x_1 \iff x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Όμοια $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

x_0, f, f' (δεν μηδενίζεται κοντά στην ρίζα)

Newton $\Rightarrow x^*$

Ανάπτυγμα Taylor $f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \dots$

α.τ. μέχρι 1η παράγωγο:

(✱) $\boxed{f(x) = f(a) + (x-a) f'(a)} + \frac{(x-a)^2}{2} f''(\xi_x)$

$\boxed{\xi_x ?}$

$a = x_0$

$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$

$x_1 \to (x_1, 0)$

$0 = f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0)$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Ομοια $\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ (✱✱)

Σφάλμα:

(✱) όπου x βάζω το x^*

$a = x_n$

$$f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n) f'(x_n) + \frac{(x^* - x_n)^2}{2} f''(\xi_n)$$

$$0 = f(x_n) + (x^* - x_n) f'(x_n) + \frac{(x^* - x_n)^2}{2} f''(\xi_n)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$(x_{n+1} - x_n) f'(x_n) = -f(x_n)$$

$$\boxed{f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})}$$

$$0 = f'(x_n)(x_n - x_{n+1}) + (x^* - x_n) f'(x_n) + \frac{(x^* - x_n)^2}{2} f''(\xi_n)$$

$$0 = f'(x_n)(x^* - \cancel{x_n} + \cancel{x_n} - x_{n+1}) + \frac{(x^* - x_n)^2}{2} f''(\xi_n)$$

$$0 = f'(x_n)\, e_{n+1} + (e_n)^2 f''(\xi_n)$$

$0 = f(x_n) + e_{n+1} \ldots \frac{\ldots}{2} f''(\xi_n)$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow{n\to\infty} C$$

αν f, f', f'' ομαλά

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n^2|} = C \iff$$ τετραγωνική σύγκλιση

$$\Downarrow$$

$$\frac{|e_{n+1}|}{e_n^2} \leq C^* \qquad n > N$$

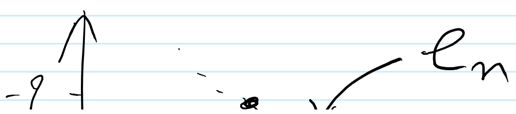
$$|e_{n+1}| \leq C^* e_n^2$$

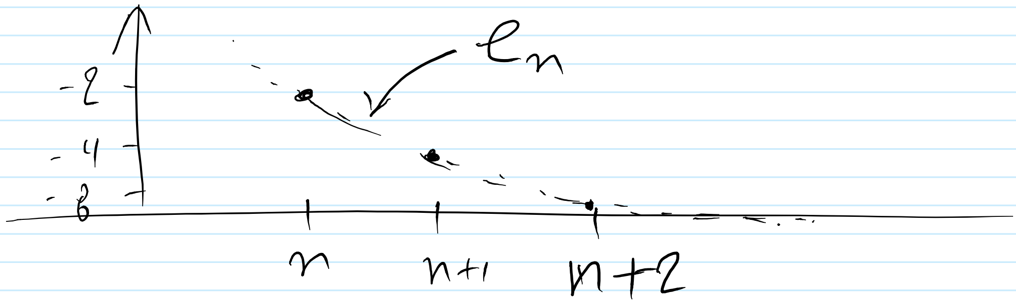
$$|e_{n+2}| \leq C^* e_{n+1}^2 \leq (C^*)^2 \cdot e_n^4$$

$$|e_n| \leq 10^{-2}$$

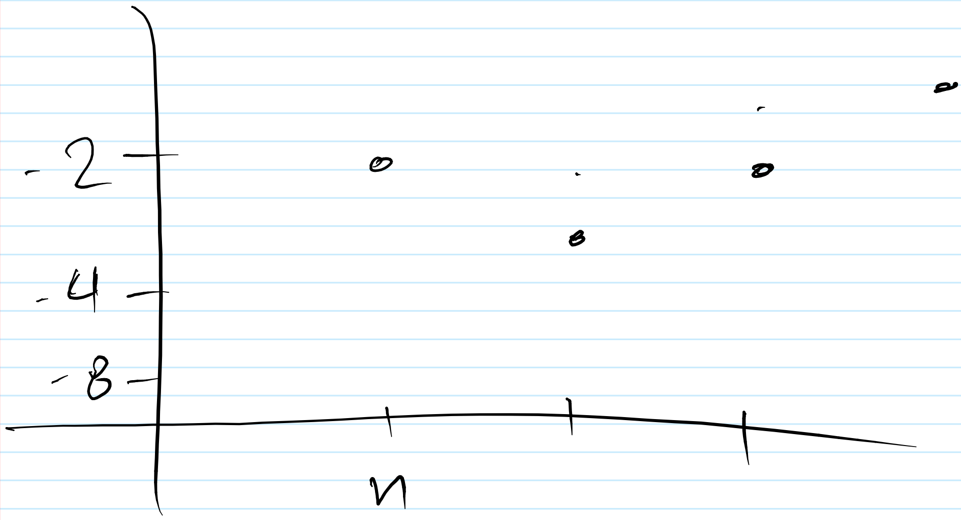
$$|e_{n+1}| \leq C^*(10^{-2})^2 = C^* 10^{-4}$$

$$|e_{n+2}| \leq \ldots \leq C^* 10^{-8})$$

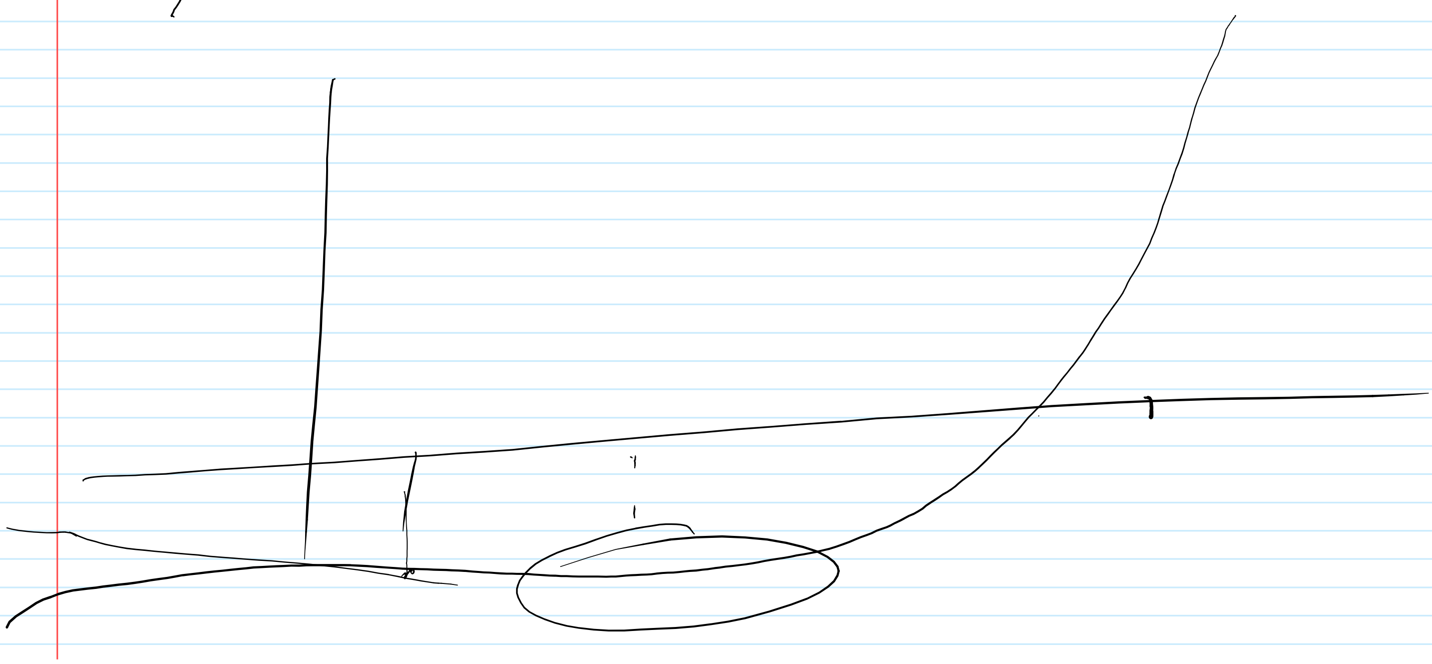


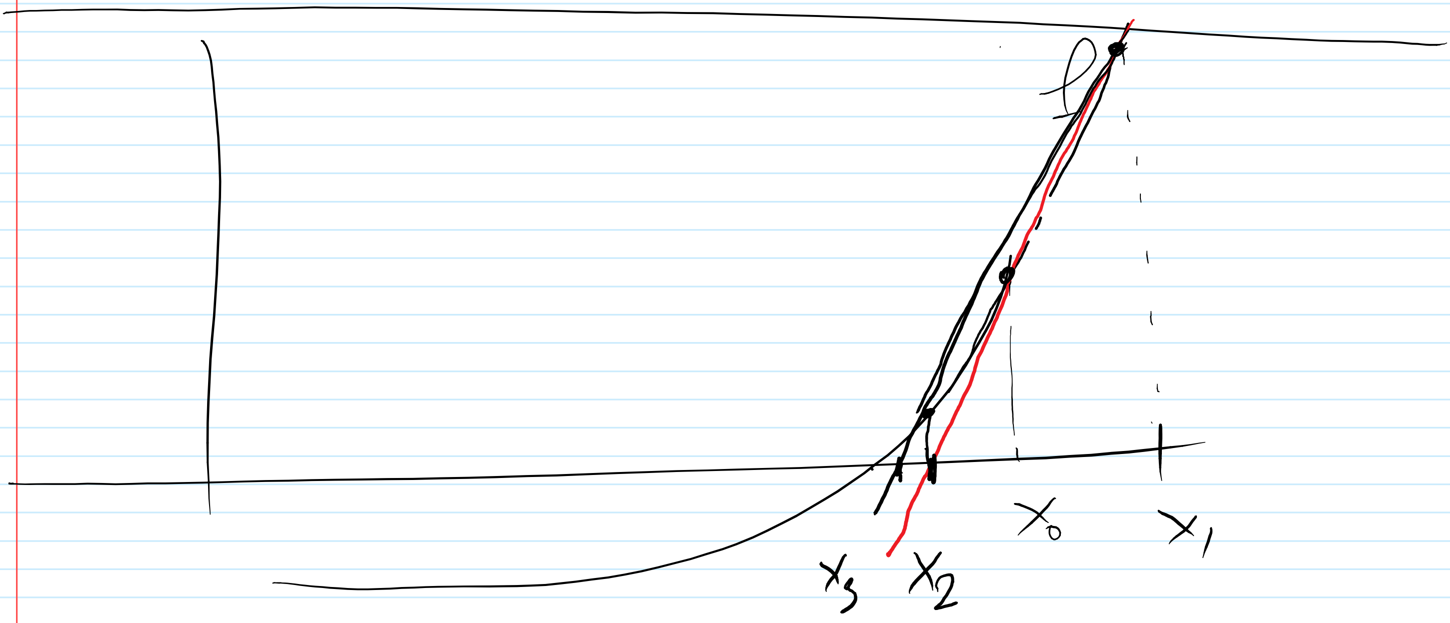


e_n
2
4
8
n
n+1
n+2



2
4
8
n





$$\left.\begin{matrix} x_0, & f(x_0) \\ x_1, & f(x_1) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x_2$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \Rightarrow$$

$y = \ldots$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \simeq$$

Τέμνουσα

$$\boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}}$$

Γραμμικός ζήτος

Γενικός τύπος / τέμνουσας

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{\dfrac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}}$$

$x_0, x_1,$

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧ. & ΜΗΧ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Βασικά σημεία

- Μη γραμμικές εξισώσεις με πραγματικές ρίζες.
  - Μέθοδος διχοτόμησης.
  - Επαναληπτικές μέθοδοι.
    - Newton.
    - Τέμνουσας (secant).
- Ρίζες πολυωνύμων.
- Ρίζες μιγαδικών εξισώσεων.
- Συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων.

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

- Με δεδομένη μια συνάρτηση f, ψάχνουμε το x^* για το οποίο $f(x^*) = 0$.
- Το x^* ονομάζεται ρίζα της εξίσωσης ή το μηδέν της συνάρτησης f.
- Δυο βασικές κατηγορίες τέτοιων προβλημάτων:
  - Μια μη γραμμική εξίσωση με έναν άγνωστο,

    $$f: R \to R$$

    η λύση είναι αριθμός x τ.ω. $f(x) = 0$.
  - Σύστημα από n μη γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους,

    $$f: R^n \to R^n$$

    η λύση είναι διάνυσμα x τ.ω. κάθε συνιστώσα της f είναι 0.

Παραδείγματα:

- Μη γραμμική εξίσωση (1-D):

$$x^2 - 4\sin(x) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x = 1.93375 \;\; \text{μια από τις ρίζες}$$

- Σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων (2-D):

$$\left.\begin{array}{r} x_1^2 - x_2 + 0.25 = 0 \\ -x_1 + x_2^2 + 0.25 = 0 \end{array}\right\} \;\;\Rightarrow\;\; x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα:

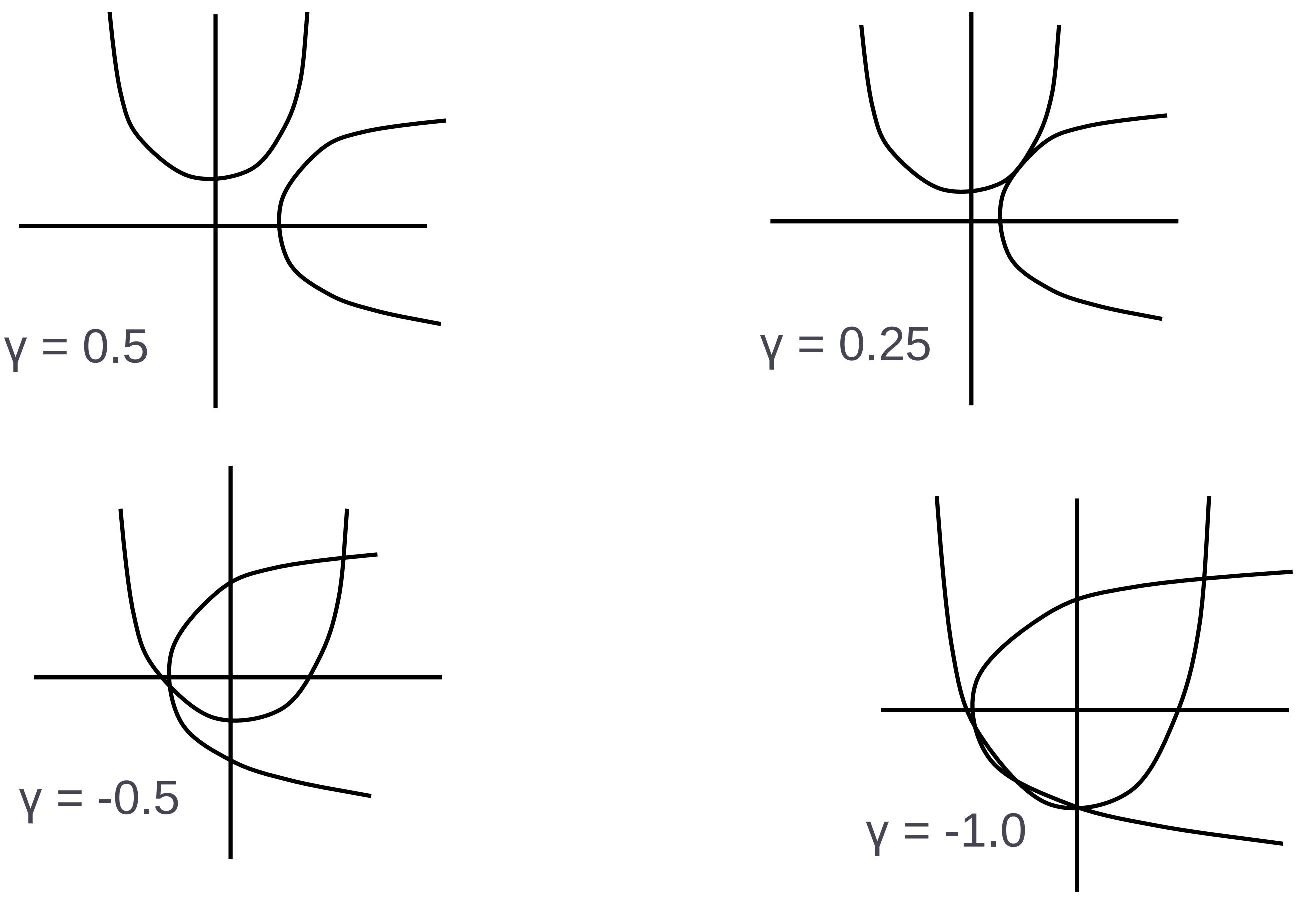
Οι μη γραμμικές εξισώσεις μπορούν να έχουν οποιοδήποτε πλήθος λύσεων:

- $\exp(x) + 1 = 0$, δεν έχει ρίζα.
- $x^2 - \sin(x) + 1 = 0$, δεν έχει ρίζα.
- $\exp(-x) - x = 0$, έχει μια ρίζα.
- $x^2 - 4\sin(x) = 0$, έχει 2 ρίζες.
- $x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$, έχει 3 ρίζες.
- $\sin(x) = 0$, έχει άπειρες ρίζες.

Παραδείγματα:

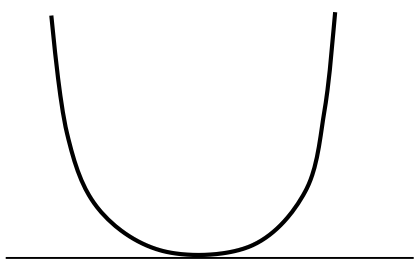
$$x_1^2 - x_2 + \gamma = 0$$

$$-x_1 + x_2^2 + \gamma = 0$$

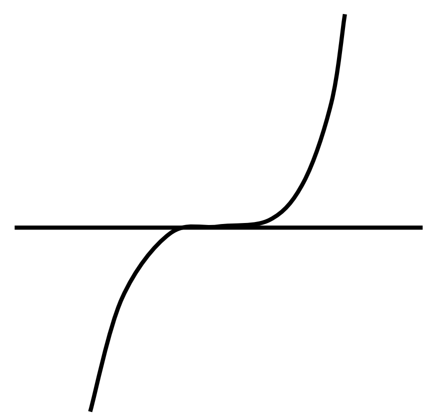


Παραδείγματα:

- Οι μη γραμμικές εξισώσεις μπορεί να έχουν πολλαπλές ρίζες, δηλαδή και η συνάρτηση και οι παράγωγοι της μηδενίζονται στο ίδιο σημείο, π.χ.: $f(x)=0$ και $f'(x)=0$.



$x^2 - 2x + 1 = 0$



$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης.

- Αναλυτικοί τύποι για ρίζες πολυωνύμων μέχρι και 4ου βαθμού.
- Galois(1830): δεν μπορούν να βρεθούν αναλυτικοί τύποι για τις ρίζες πολυωνύμων βαθμού > 4.
- <u>Θεώρημα Bolzano </u>(Ειδική Περίπτωση του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής - Μόνο σε 1-D):

  Αν f συνεχής στο $[a, b]$ και $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ τότε υπάρχει x^* στο $[a, b]$ τ.ω. $f(x^*)=0$.
- Δεν υπάρχει κάτι ανάλογο για περισσότερες διαστάσεις.
- Επαναληπτικές διαδικασίες για προσέγγιση ριζών.

Επαναληπτικές μέθοδοι και τάξη σύγκλισης.

- Στις επαναληπτικές μεθόδους υπολογίζουμε μια ακολουθία $\{x_k\}_k$ για να προσεγγίσουμε την πραγματική λύση x^* του προβλήματος.
- Το σφάλμα της προσέγγισης είναι $e_k = x_k - x^*$.
- Η ακολουθία συγκλίνει με τάξη r ανν:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|^r} = C$$

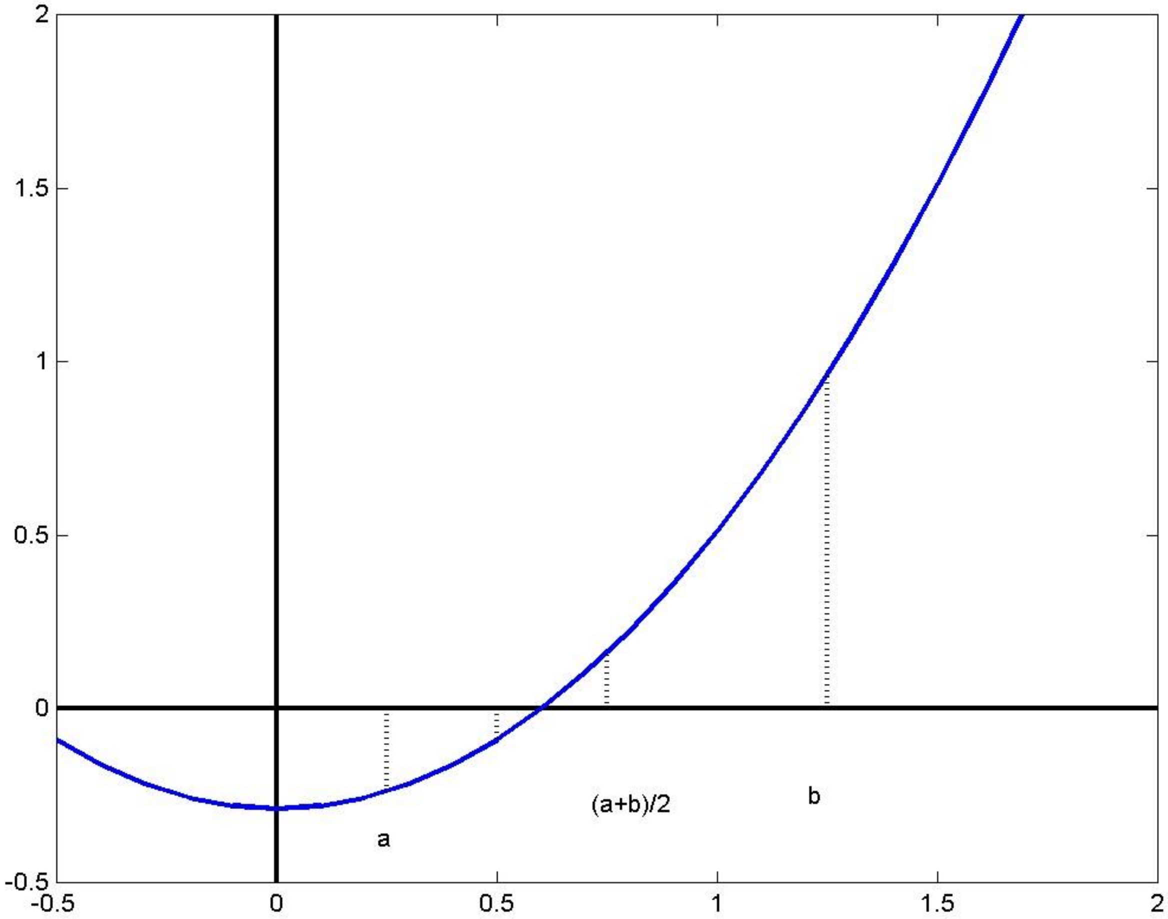
όπου C σταθερά.

Π.χ.: $r=1$ γραμμική σύγκλιση,
$r=2$ τετραγωνική σύγκλιση,
$r>1$ υπεργραμμική σύγκλιση

Μέθοδος διχοτόμησης

- Η $f:[a,b] \rightarrow R$ πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.
- Αλγόριθμος:
  1. $c := a$, $d := b$, $f(c)$, $f(d)$
  2. $e = (c+d)/2$, $f(e)$
  3. if $|f(e)| < tol \rightarrow x^* = e$, stop
  4. if $f(c)*f(e)>0 \rightarrow c:=e$
  5. if $f(d)*f(e)>0 \rightarrow d:=e$
  6. if $|c-d| < tol \rightarrow x^* = (c+d)/2$, stop
  7. goto to step 2.

Μέθοδος διχοτόμησης



Παράδειγμα: $f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$

α	f(α)	b	f(b)
1.000000		3.000000	

Παράδειγμα: $f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$

α	f(α)	b	f(b)
1.000000	-2.365884	3.000000	8.435520
1.000000	-2.365884	2.000000	0.362810
1.500000	-1.739980	2.000000	0.362810
1.750000	-0.873444	2.000000	0.362810
1.875000	-0.300718	2.000000	0.362810
1.875000	-0.300718	1.937500	0.019849
1.906250	-0.143255	1.937500	0.019849
1.921875	-0.062405	1.937500	0.019849
1.929688	-0.021454	1.937500	0.019849
1.933594	-0.000846	1.937500	0.019849
1.933594	-0.000846	1.935547	0.009491
1.933594	-0.000846	1.934570	0.004320
1.933594	-0.000846	1.934082	0.001736
1.933594	-0.000846	1.933838	0.000445
1.933716	-0.000201	1.933838	0.000445

Μέθοδος διχοτόμησης

☺ **Πλεονεκτήματα:**

- επιτυχής
- χρήση της f
- σε κάθε βήμα κερδίζουμε ένα δυαδικό ψηφίο σε ακρίβεια ➔ t επαναλήψεις αν 2^{-t} το μηδέν της μηχανής (ή το ε του αλγόριθμου)

☹ **Μειονεκτήματα:**

- αργή σύγκλιση

Σταθερό σημείο συναρτήσεων

- <u>Ορισμός</u>: Ένα σημείο x^* στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης φ λέγεται σταθερό σημείο ανν $\varphi(x^*)=x^*$.

- <u>Πρόταση</u>: $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ συνεχής ➔ υπάρχει ένα τουλάχιστο σταθερό σημείο για την φ.

- <u>Ορισμός</u>: $\varphi:I\to R$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz, ανν υπάρχει L τ.ω.

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \le L|x-y|.$$

Αν $L<1$ ➔ φ συστολή.

Επαναληπτικές μέθοδοι

- <u>Θεώρημα</u>: Αν φ:[a,b]→[a,b] συνεχής, συστολή τότε η φ έχει ένα και μοναδικό σταθερό σημείο x*. Για την ακολουθία $x_{n+1}=φ(x_n)$ ισχύουν:

$$|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*| \le L^n \max(x_0 - a, b - x_0)$$

$$|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 2,$

έχει ρίζα το σταθερό σημείο κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

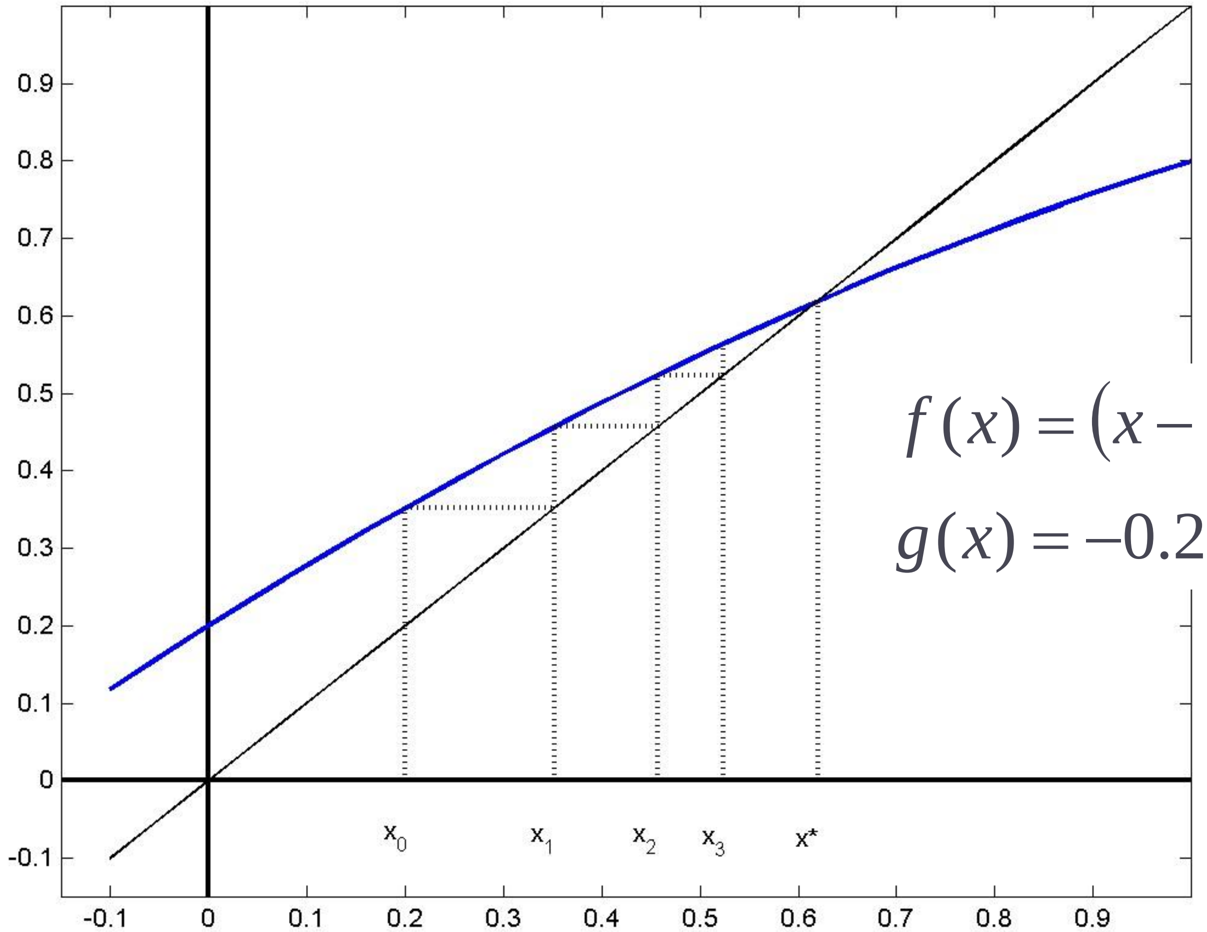
$$g(x) = x^2 - 2$$

$$g(x) = \sqrt{x+2}$$

$$g(x) = 1 + 2/x$$

$$g(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$$

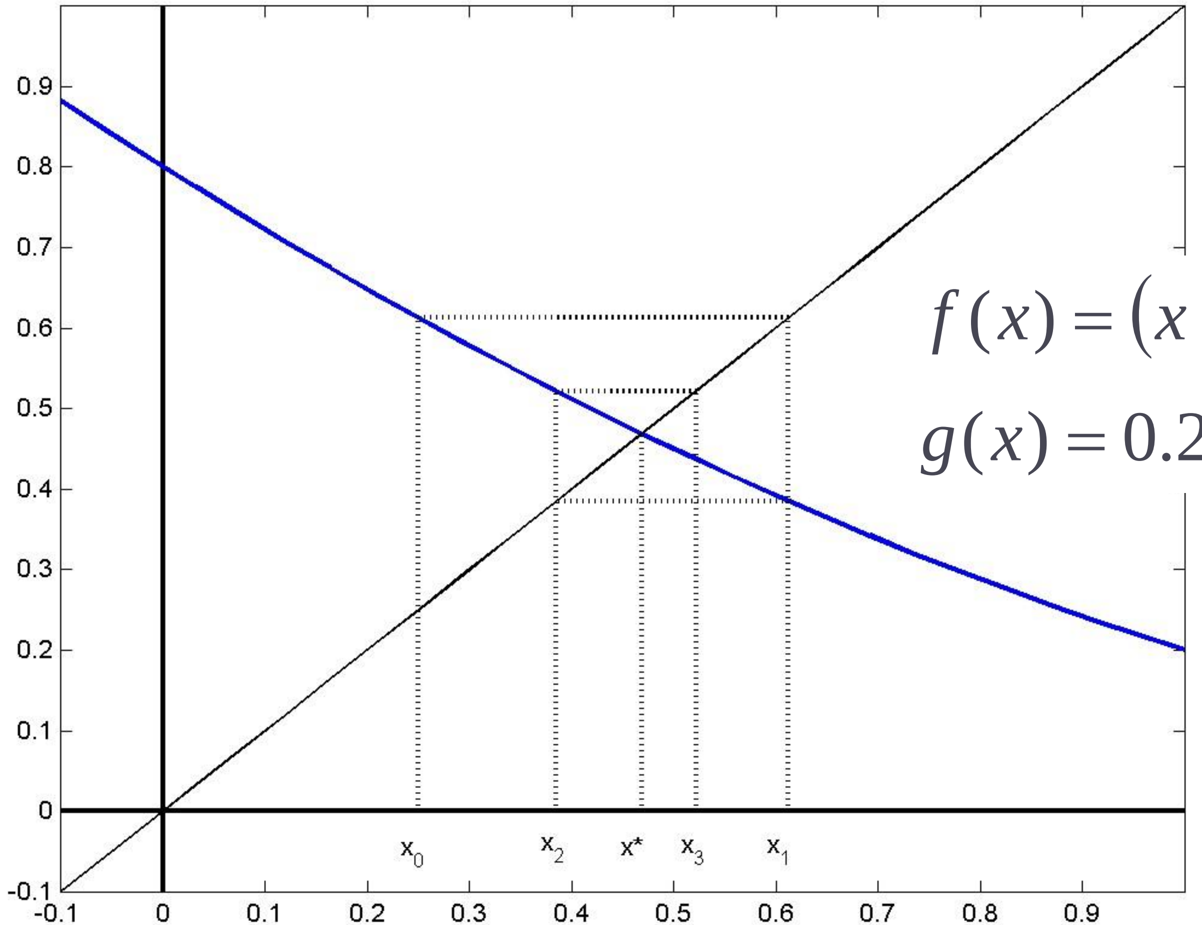
Επαναληπτικές μέθοδοι
(μονότονη σύγκλιση)



$$f(x) = (x-2)^2 + 5 \cdot x - 5 = 0$$

$$g(x) = -0.2 \cdot (x-2)^2 + 1, x_0 = 0.2$$

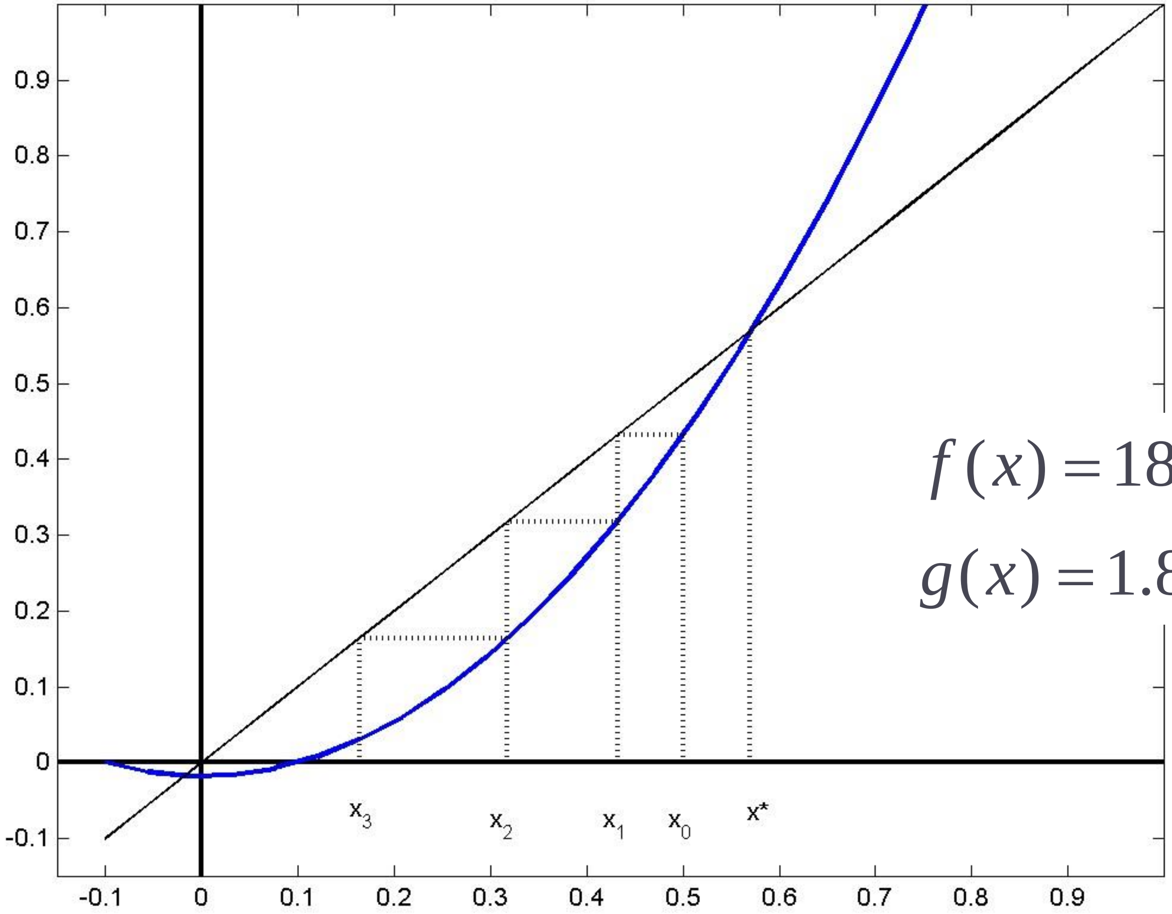
Επαναληπτικές μέθοδοι
(ελικοειδής σύγκλιση)



$$f(x) = (x-2)^2 - 5 \cdot x = 0$$

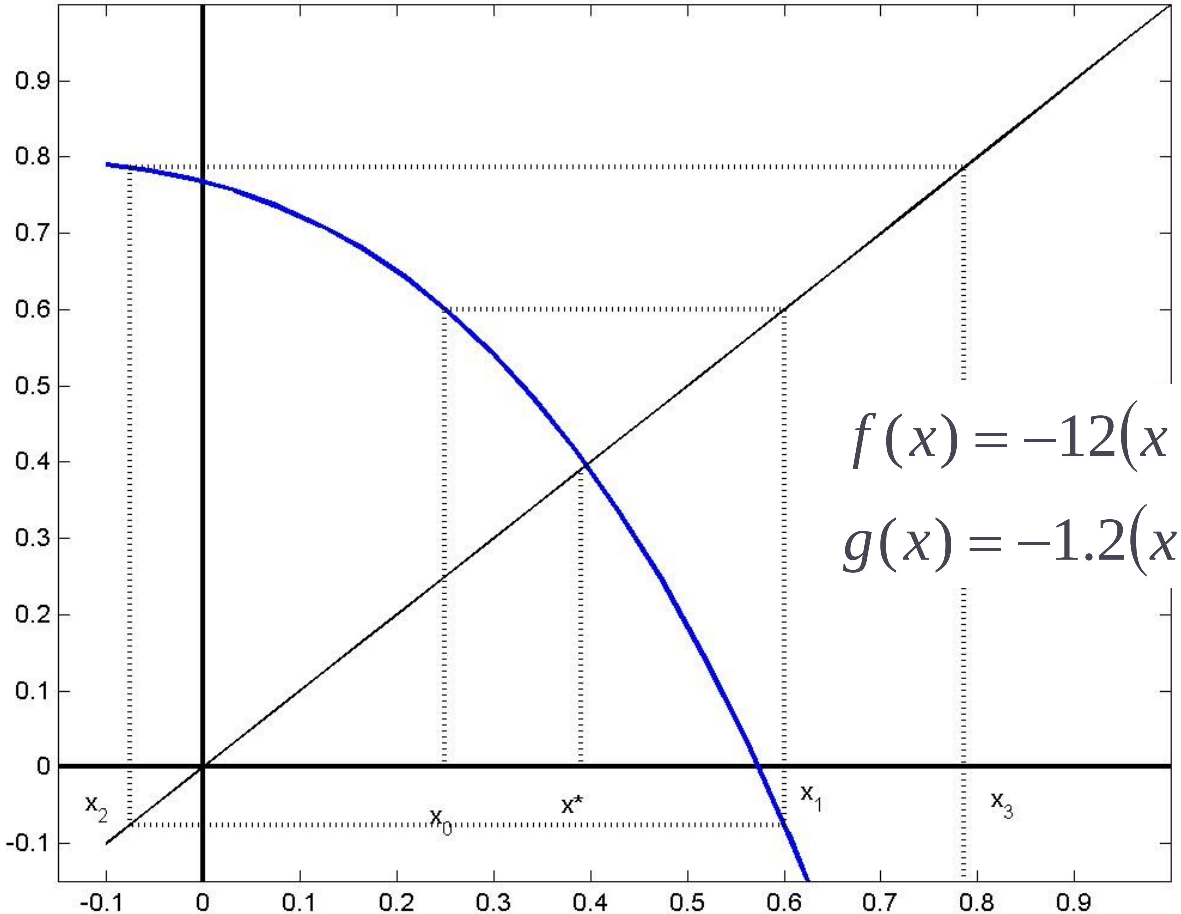
$$g(x) = 0.2 \cdot (x-2)^2, x_0 = 0.25$$

Επαναληπτικές μέθοδοι
(μονότονη απόκλιση)



$$f(x) = 18\left(x^2 - 0.01\right) - 10x = 0$$
$$g(x) = 1.8\left(x^2 - 0.01\right), \quad x_0 = 0.5$$

Επαναληπτικές μέθοδοι
(ελικοειδής απόκλιση)



$$f(x) = -12(x+0.3)^3 - 10x + 8 = 0$$

$$g(x) = -1.2(x+0.3)^3 + 0.8, \quad x_0 = 0.25$$

ΗΥ213. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Π. ΤΣΟΜΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧ. & ΜΗΧ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Μέθοδος Newton

- Αρχικό πρόβλημα: f(x*)=0
- Χρησιμοποιώντας τις σειρές Taylor

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

δεύτερο μέλος είναι η γραμμική συνάρτηση που προσεγγίζει την f, και μηδενίζεται στο h=-f(x)/f´(x)

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad f'(x_n) \neq 0$$

- Έχουμε το ισοδύναμο πρόβλημα επίλυσης: φ(x*) =x*, με φ τ.ω.

$$\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

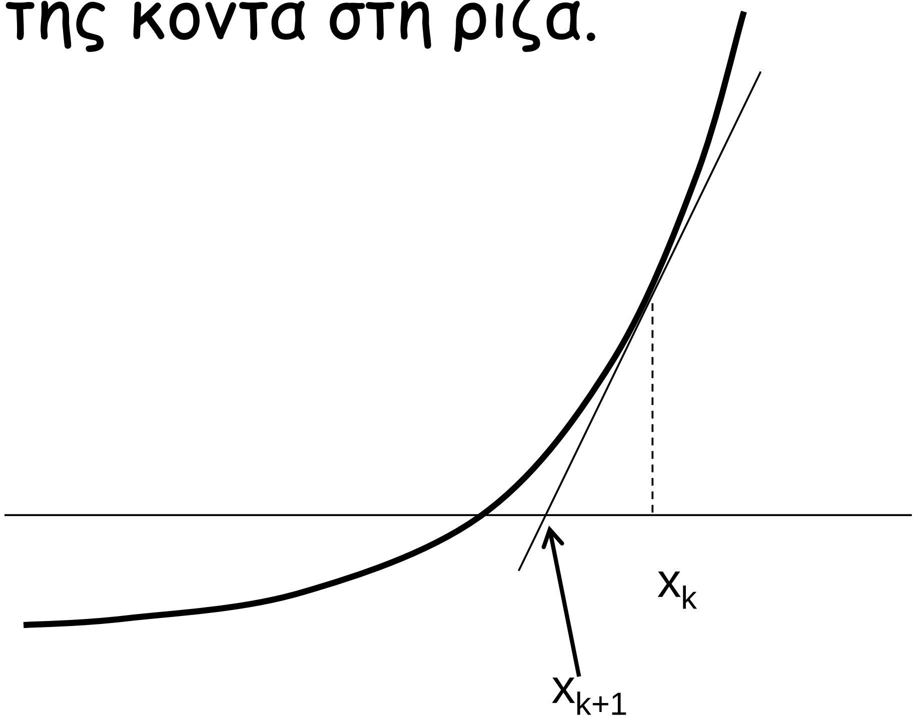
Μέθοδος Newton

- Η f:[a,b]→R πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.
- Αλγόριθμος:

1. Όρισε x_0, n=0
2. Υπολόγισε $f(x_n)$, $f'(x_n)$
3. Υπολόγισε $h := -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
4. $x_{n+1} = x_n + h$
5. n = n+1
6. αν h>ε ➔ βήμα 2

Μέθοδος Newton

- Προσεγγίζει τη συνάρτηση χρησιμοποιώντας την παράγωγο της κοντά στη ρίζα.



Μέθοδος Newton - παράδειγμα

$$f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$$

$$f'(x) = 2x - 4\cos(x)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 4\sin(x_k)}{2x_k - 4\cos(x_k)}, \qquad x_0 = 3$$

x	f(x)	f'(x)	h
3.000000			

Μέθοδος Newton - παράδειγμα

$$f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$$

$$f'(x) = 2x - 4\cos(x)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 4\sin(x_k)}{2x_k - 4\cos(x_k)}, \qquad x_0 = 3$$

x	f(x)	f'(x)	h
3.000000	8.435520	9.959970	-0.846942
2.153058	1.294772	6.505771	-0.199019
1.954039	0.108438	5.403795	-0.020067
1.933972	0.001152	5.288919	-0.000218
1.933754	0.000000	5.287670	0.000000

Μέθοδος Newton

- ☺ Τάξη σύγκλισης 1, αλλά τοπικά τάξη σύγκλισης 2.
- ☹ Χρειάζεται πολύ καλή αρχική τιμή x_0.
- ☹ Η x^* πρέπει να είναι απλή ρίζα.
- ☹ Η f να είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

Μέθοδος Τέμνουσας

- ☺ Αρχικό πρόβλημα: $f(x^*)=0$
- ☹ Με τη μέθοδο Newton χρειάζεται να υπολογίζουμε και τη f' σε κάθε νέο σημείο.
- ☺ Η μέθοδος της τέμνουσας προσεγγίζει την παράγωγο με *πεπερασμένες διαφορές*.
- ☺ Ισοδύναμο πρόβλημα επίλυσης: $\varphi(x^*) = x^*$, με φ τ.ω.

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

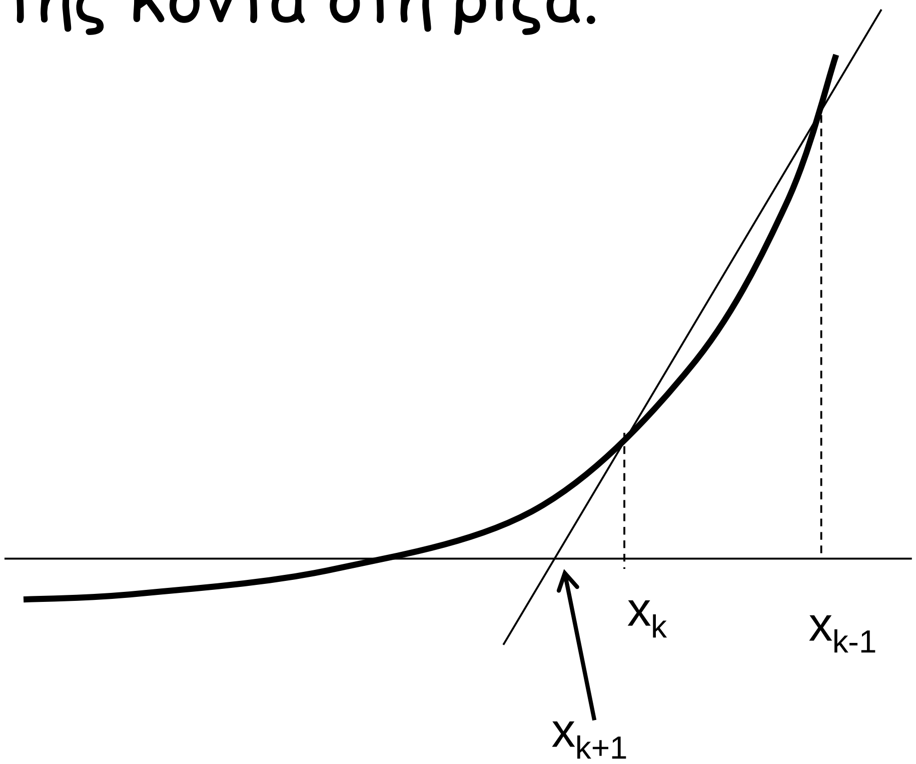
Μέθοδος Τέμνουσας

- Η $f:[a,b]\rightarrow R$ πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.
- Αλγόριθμος:

1. Όρισε x_0, x_1, $n=1$
2. Υπολόγισε $f(x_n)$, $f(x_{n-1})$
3. Υπολόγισε $$h := -\frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$
4. $x_{n+1} = x_n + h$
5. $n = n+1$
6. αν $h>\varepsilon$ ➔ βήμα 2

Μέθοδος Τέμνουσας

- Προσεγγίζει τη συνάρτηση χρησιμοποιώντας την παράγωγο της κοντά στη ρίζα.



Μέθοδος Τέμνουσας - παράδειγμα

$$f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\left(x_k^2 - 4\sin(x_k)\right)\left(x_k - x_{k-1}\right)}{x_k^2 - x_{k-1}^2 - 4\left(\sin(x_k) - \sin(x_{k-1})\right)}, \qquad x_0 = 1 \text{ και } x_1 = 3$$

x	f(x)	h
1.000000	-2.365884	
3.000000	8.435520	

Μέθοδος Τέμνουσας - παράδειγμα

$$f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\left(x_k^2 - 4\sin(x_k)\right)\left(x_k - x_{k-1}\right)}{x_k^2 - x_{k-1}^2 - 4\left(\sin(x_k) - \sin(x_{k-1})\right)}, \qquad x_0 = 1 \text{ και } x_1 = 3$$

x	f(x)	h
1.000000	-2.365884	
3.000000	8.435520	-1.561930
1.438070	-1.896774	0.286735
1.724805	-0.977706	0.305029
2.029833	0.534305	-0.107789
1.922044	-0.061523	0.011130
1.933174	-0.003064	-0.000583
1.933757	0.000019	-0.000004
1.933754	0.000000	0.000000

Μέθοδος Τέμνουσας

- ☺ Τάξη σύγκλισης (1+sqrt(5))/2~1.62 .
- ☹ Χρειάζεται πολύ καλές αρχικές τιμές (x_0, x_1).
- ☹ Η x^* να είναι απλή ρίζα.
- ☹ Η f να είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.
- ☺ Δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την f´ .