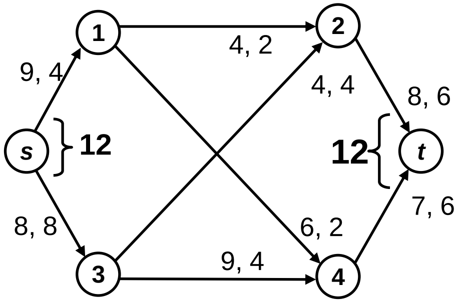
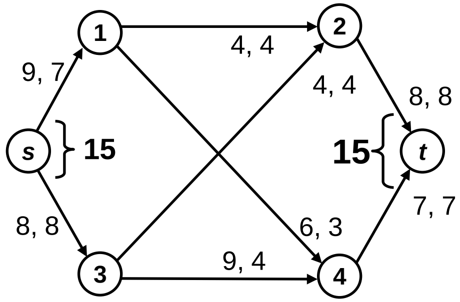
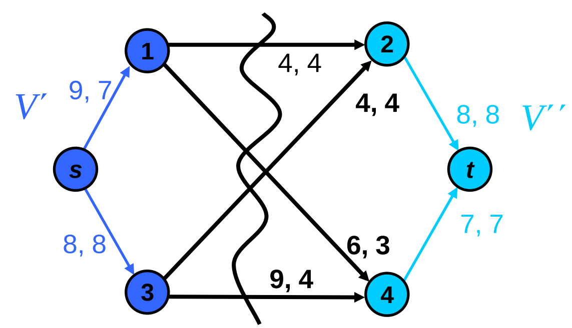
Ροές

- Ορισμοί
  - Δίκτυο Μεταφοράς ή Ροής
    - Βεβαρημένο γράφημα με χωρητικότητες
    - Πηγή, Καταβόθρα
  - Ροή
    - Απεικόνιση τιμών στις ακμές, φραγμένων από τις αντίστοιχες χωρητικότητες
    - Κορεσμένες, Ακόρεστες ακμές
    - Μέγιστη ροή
  - Τομή
    - Χωρητικότητα Τομής
    - Χωρητικότητα Δικτύου
- Ισοδυναμία Μέγιστης Ροής-Ελάχιστης Τομής

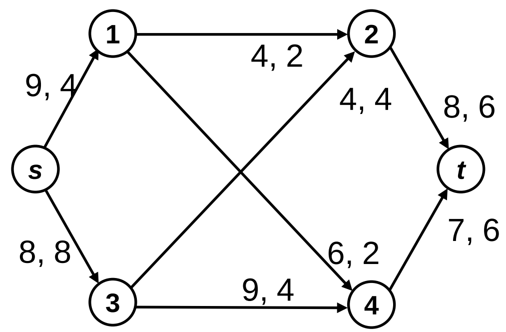


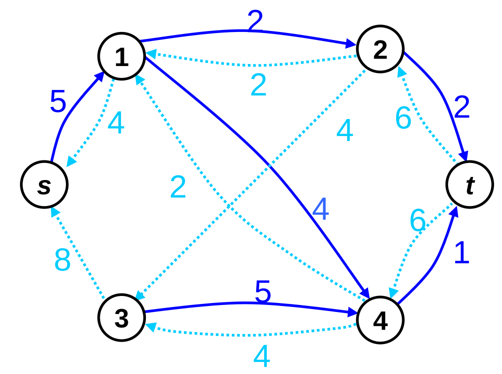


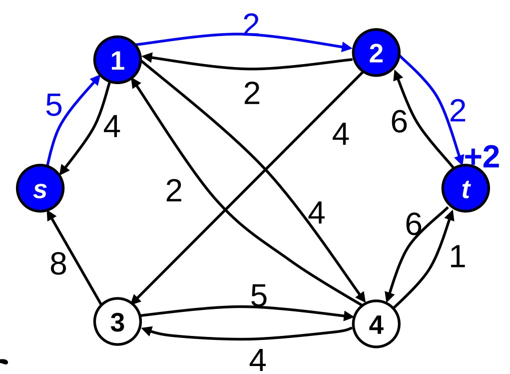


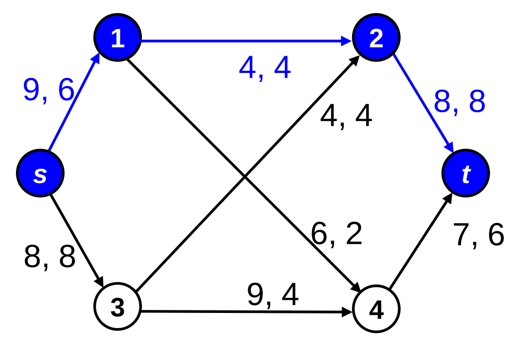
Βοηθητικές Συνδυαστικές Δομές

- Υπολειμματικό Γράφημα
  - Για κάθε ροή ακμής, περιέχει δύο ακμές: ***προωθήσεως*** και ***ακυρώσεως ροής***
- Επαυξητικό μονοπάτι
  - Κάθε μονοπάτι στο υπολειμματικό γράφημα από την πηγή στην καταβόθρα, με τιμή ροής ίση με την ελάχιστη τιμή ακμής
  - Βοηθά στην εύρεση, νέας, βελτιωμένης ροής









Θεώρημα Επαυξητικού Μονοπατιού

- Ροή Μέγιστη ανν το αντίστοιχο υπολειμματικό γράφημα δεν διαθέτει επαυξητικό μονοπάτι
  - Έστω μέγιστη ροή. Εάν υπήρχε επαυξητικό μονοπάτι, τότε θα ήταν δυνατή η επαύξηση (άτοπο)
  - Εάν δεν υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι, οι κορυφές χωρίζονται σε δύο σύνολα *V*, *V'*: το πρώτο περιλαμβάνει τις προσπελάσιμες από την πηγή κορυφές και το δεύτερο τις υπόλοιπες. Τότε,
    - Ακμές *V* προς *V'* κορεσμένες
    - Ακμές *V'* προς *V* δίχως ροή
    - *V*, *V'* τομή, όπου η χωρητικότητα φράσσει την ροή

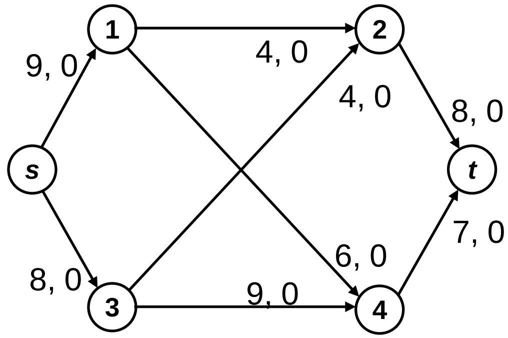
Θεώρημα Ακέραιας Ροής

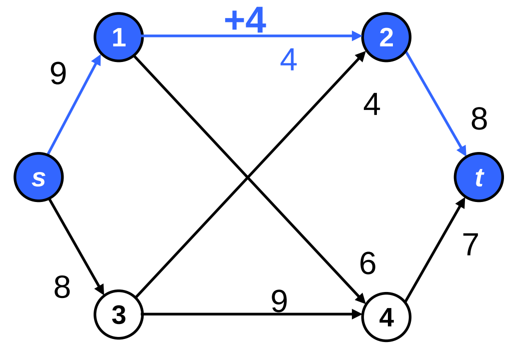
- Εάν οι χωρητικότητες είναι ακέραιες τότε και η μέγιστη ροή έχει ακέραια τιμή
  – Παρατηρούμε ότι τα επαυξητικά μονοπάτια έχουν ακέραιες τιμές ροών

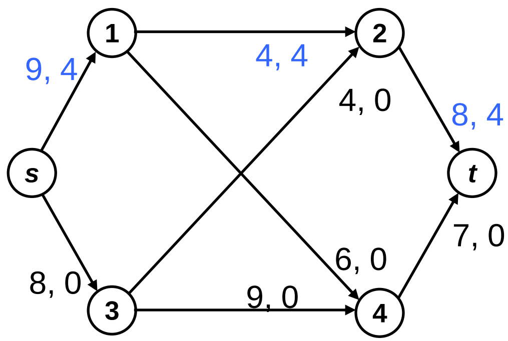
Μέθοδος Ford-Fulkerson

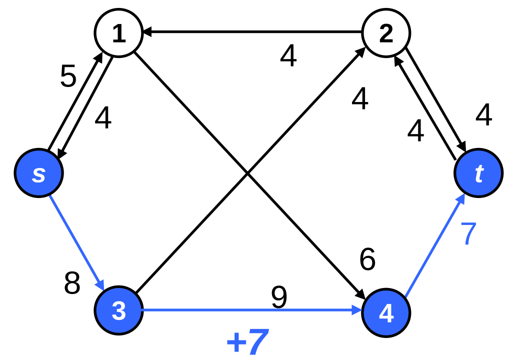
- Βασίζεται στο θεώρημα επαυξητικού μονοπατιού:
  «*όσο υπάρχουν επαυξητικά μονοπάτια, διαλέγουμε ένα και επαυξάνουμε την ροή κατά μήκος του*»
- Αποκαλείται μέθοδος, γιατί ***δεν*** προσδιορίζεται πώς θα βρεθεί το επαυξητικό μονοπάτι
- Στην σχετική δημοσίευση, οι Ford-Fulkerson είχαν προτείνει γενικευμένο ψάξιμο στο υπολειμματικό γράφημα, με ***τυχαία*** ουρά προτεραιότητας

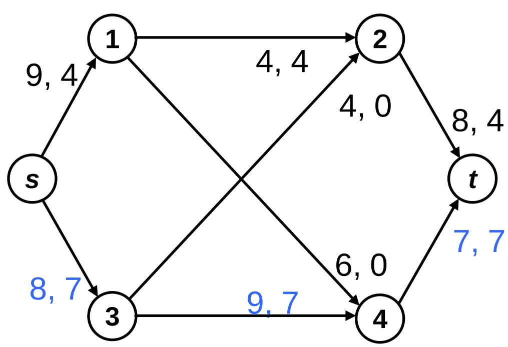
Παράδειγμα

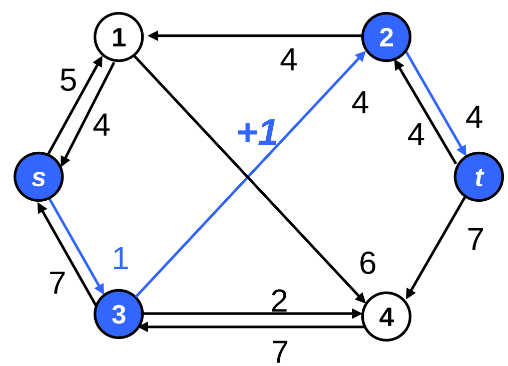

1
2
s
t
3
4
9, 0
4, 0
4, 0
8, 0
7, 0
6, 0
8, 0
9, 0


+4
1
2
s
t
3
4
9
4
4
8
7
6
8
9

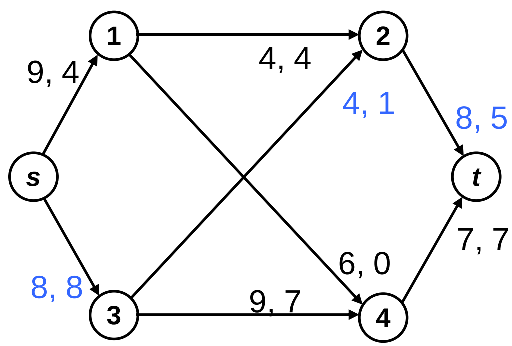

1
2
s
t
3
4
9, 4
4, 4
4, 0
8, 4
7, 0
6, 0
8, 0
9, 0

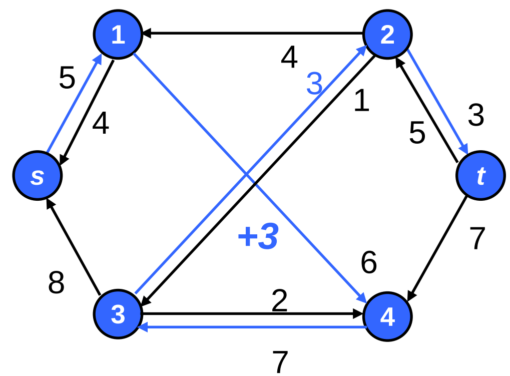

1
2
s
t
3
4
5
4
4
4
4
4
7
6
8
9
+7

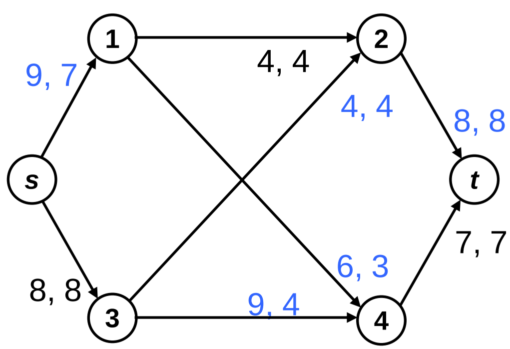

1
2
s
t
3
4
9, 4
4, 4
4, 0
8, 4
7, 7
6, 0
8, 7
9, 7

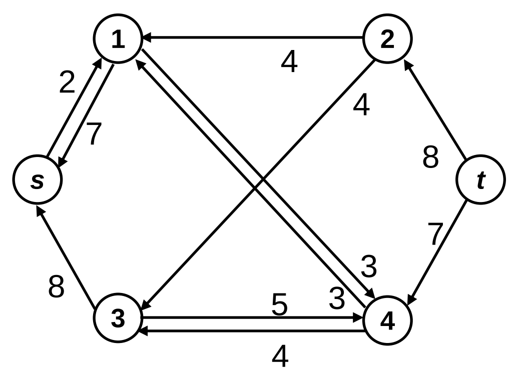

1
2
s
t
3
4
5
4
4
+1
4
4
4
7
1
6
7
2
7

Παράδειγμα (συν.)



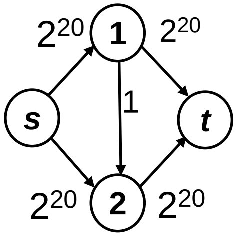






Ανάλυση Μεθόδου

- Πολυπλοκότητα $O(VEM)$=$O(|f|E)$
  - Στην χειρότερη περίπτωση, κάθε βήμα θα αυξάνει την χωρητικότητα κατά μία μονάδα.
  - Άρα $|f|$ ψαξίματα μονοπατιού, κόστους $O(V+E)$=$O(E)$.
  - Επιπλέον, $|f|=O(VM)$ καθώς η τιμή τομής είναι $O(VM)$
  - Το όριο είναι ***σφιχτό*** (**tight**), όπως δείχνει και το διπλανό στιγμιότυπο, και ***ψευδοπολυωνυμικό***, γιατί εξαρτάται από την $|f|$



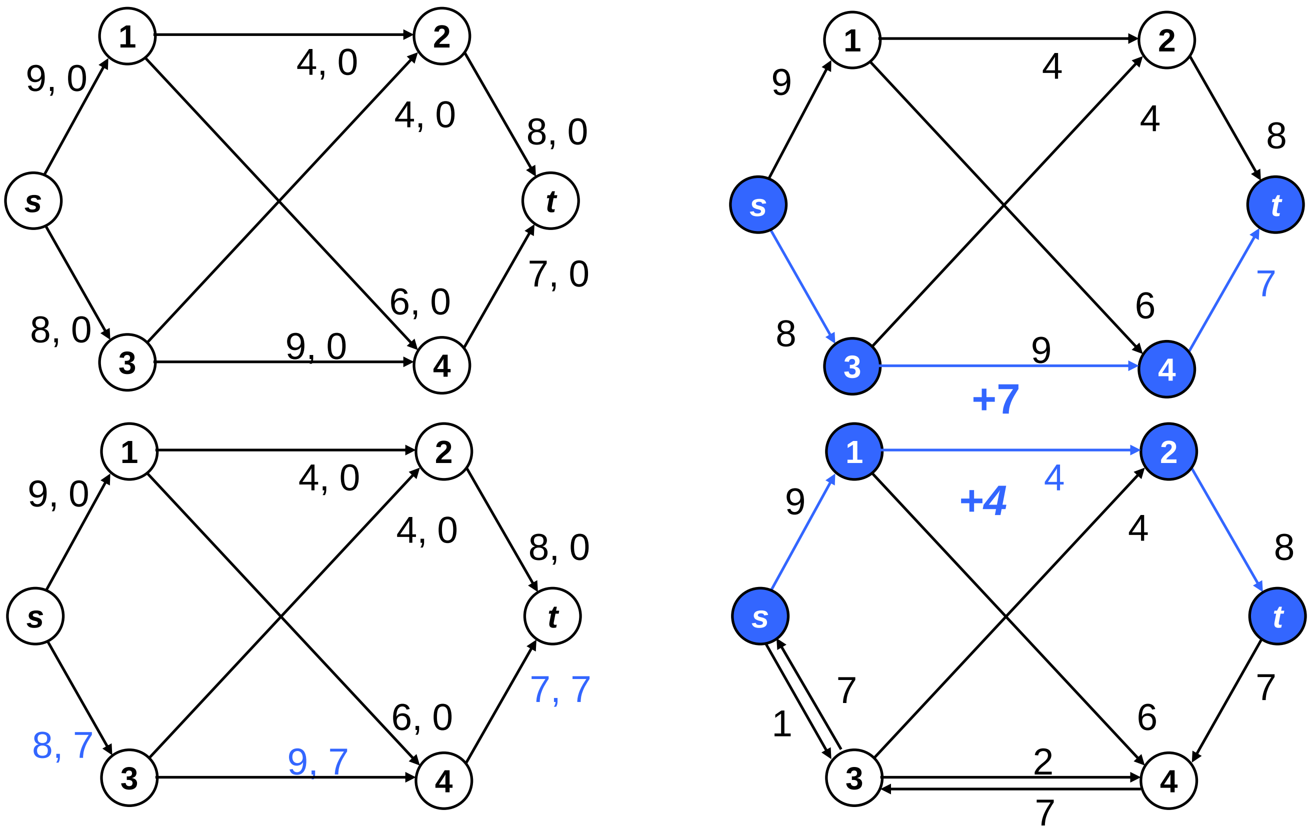
- Άλλο μειονέκτημα:
  - Αστάθεια συγκλίσεως στην τελική ροή, εάν οι χωρητικότητες είναι πραγματικοί αριθμοί

Αλγόριθμοι Edmonds-Karp

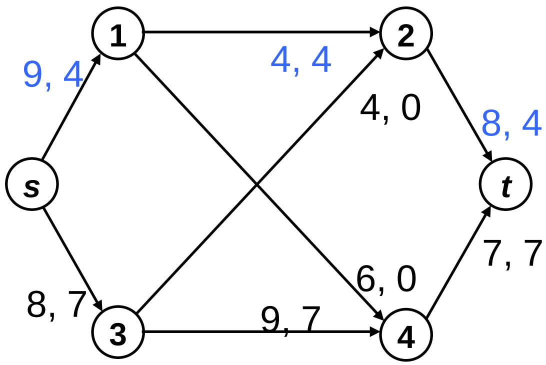
- Οι Edmonds-Karp παρατήρησαν πως, εάν τα επαυξητικά μονοπάτια αναζητηθούν
  - είτε *βάσει της μέγιστης τιμής ροής*
  - είτε *βάσει του μικρότερου πλήθους ακμών*,

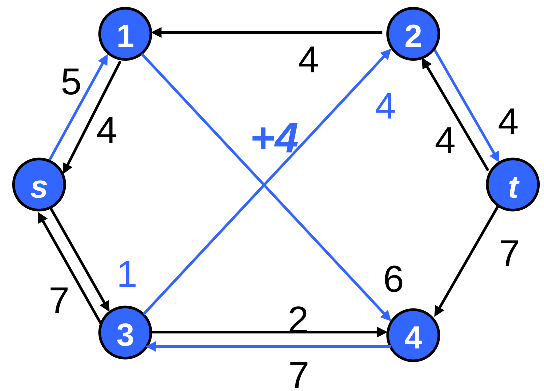
  τότε η Μέθοδος Ford-Fulkerson γίνεται ***πολυωνυμική***

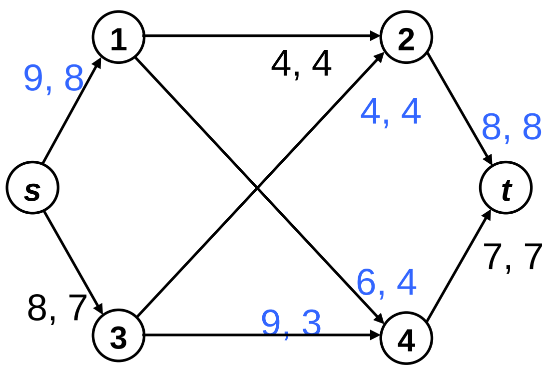
Παράδειγμα Μέγιστης Τιμής Επαυξητικού Μονοπατιού

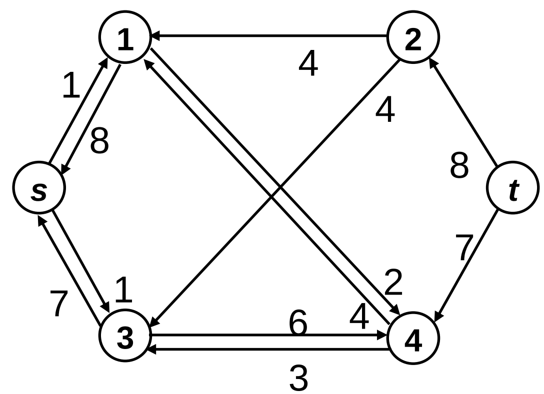


Παράδειγμα Μέγιστης Τιμής Επαυξητικού Μονοπατιού (συν.)









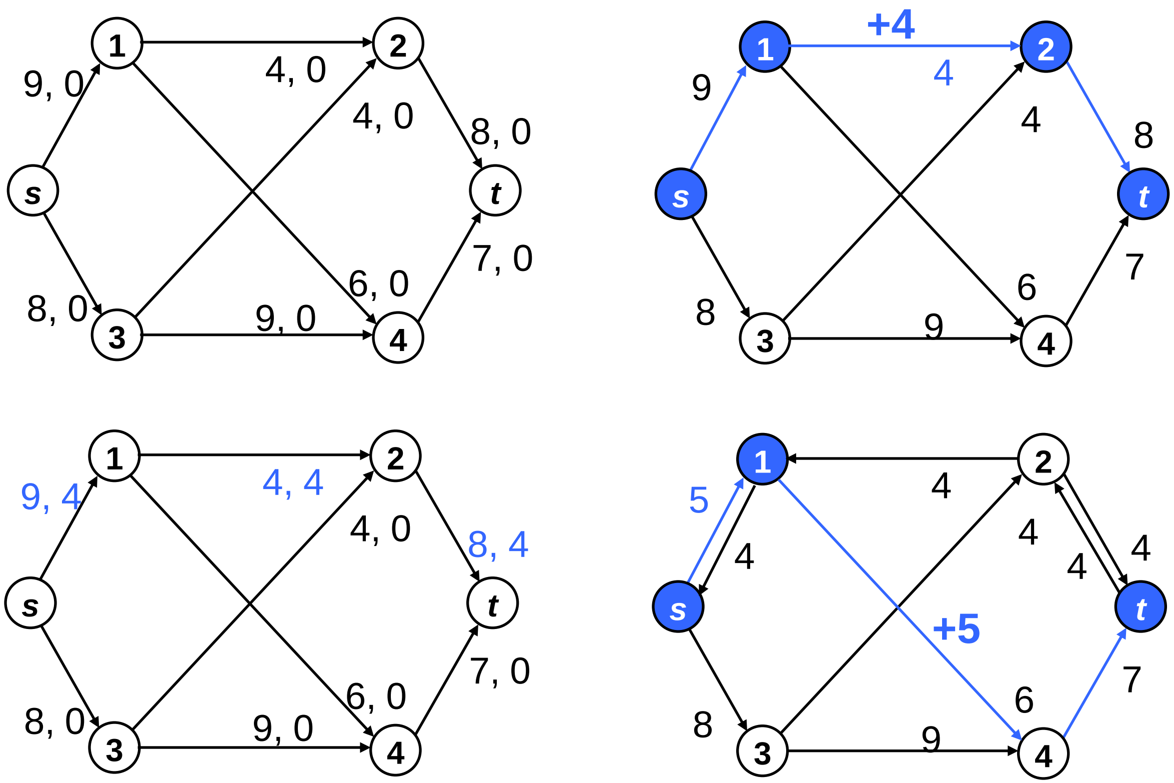
Ανάλυση

- Το πλήθος των επαυξητικών μονοπατιών είναι $O(E\log M)$, M μέγιστη τιμή χωρητικότητας
  - Έστω ότι η ροή f' έχει τιμή $|f'|$ και $|f|$ είναι η τελική τιμή
  - Υπάρχουν το πολύ E διακριτά επαυξητικά μονοπάτια, συνολικής ροής $|f|-|f'|$
  - Βάσει της αρχής του περιστερώνα, το μέγιστο μονοπάτι θα έχει τιμή ***τουλάχιστον*** $(|f|-|f'|)/E$
  - Θεωρούμε την ακολουθία των επαυξητικών βημάτων σε υποομάδες των 2E. Έστω μία υποομάδα $2E$ επαυξητικών βημάτων που δημιουργούν ροές $f'_1, f'_2, f'_3, \ldots, f'_i, \ldots$ και f' η ροή πριν την έναρξή της. Τότε,
    - Εάν κάθε ένα από αυτά τα βήματα προωθεί ροή τιμής *τουλάχιστον* $|f|-|f'|/2E$, τότε η διαδικασία τερματίζει μετά από $2E$ βήματα, το πολύ, και αυτή είναι η τελευταία υποομάδα που μελετούμε. Διαφορετικά,
    - Εάν υπάρχει έστω και ένα επαυξητικό βήμα, πχ, το i-στο, με τιμή ροής λιγότερη από $(|f|-|f'|)/(2E)$, τότε

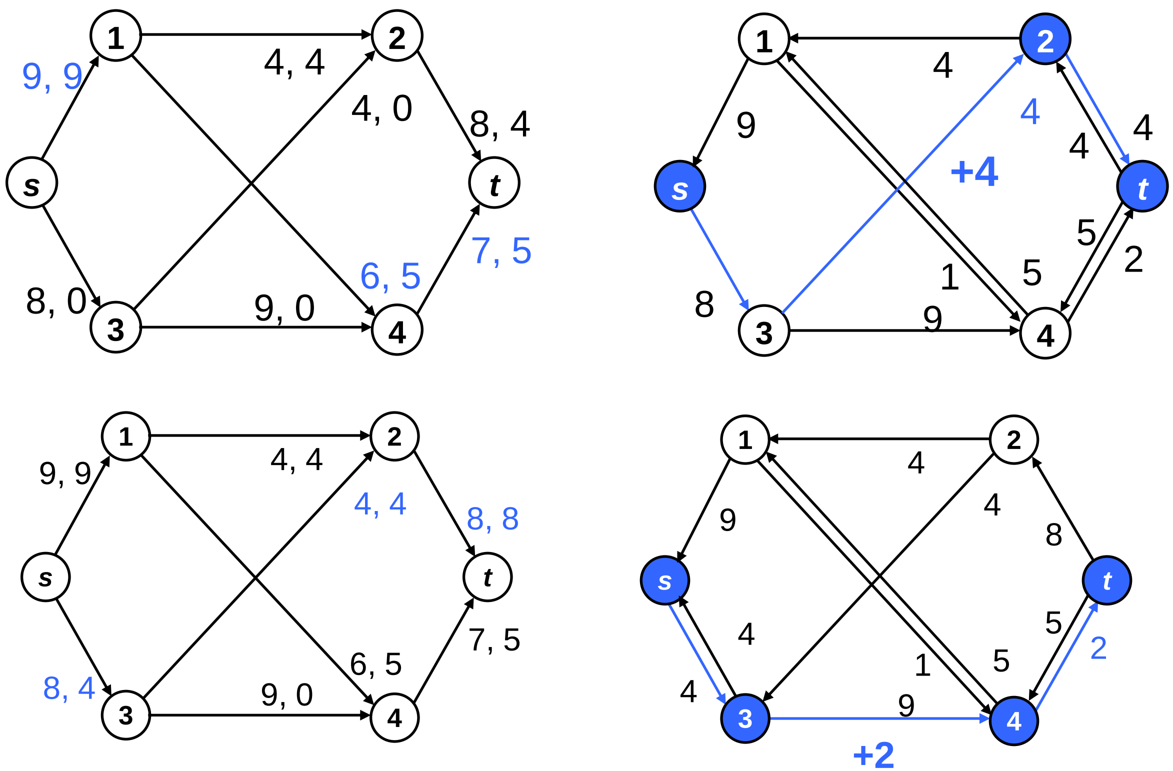
$$(|f|-|f'_{i-1}|)/E \leq |f'_i|-|f'_{i-1}| < (|f|-|f'|)/(2E) \Rightarrow [(|f|-|f'_{i-1}|)/E]/[(|f|-|f'|)/E] \leq 1/2$$

    - Άρα, στην χειρότερη περίπτωση, μετά από $2E$ βήματα, υποδιπλασιάζεται η τιμή του «βαρύτερου» μονοπατιού
- Χρόνος $O(\log_{E/V}V \log M\, E(V+E))$, M μέγιστη χωρητικότητα ακμής
  - $V+E$ πράξεις στην ουρά προτεραιότητας, πχ, E/V-σωρός, σε κάθε έναν από τους $E\log M$ υπολογισμούς επαυξητικού μονοπατιού

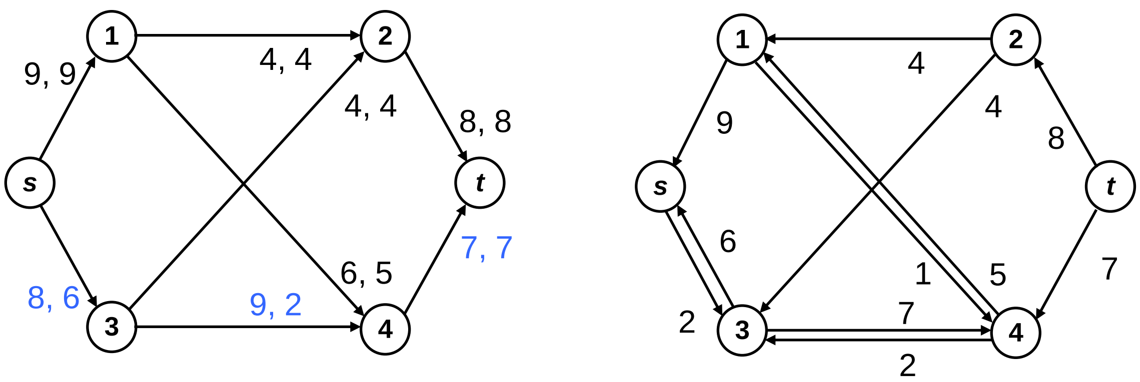
Παράδειγμα Συντομότερου Επαυξητικού Μονοπατιού



Παράδειγμα Συντομότερου Επαυξητικού Μονοπατιού (συν.)



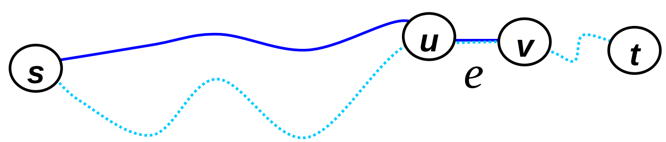
Παράδειγμα Συντομότερου Επαυξητικού Μονοπατιού (συν.)



Ανάλυση

- **Ορθότητα (Σχεδιάγραμμα)** Στηρίζεται στις κάτωθι παρατηρήσεις:
  - **Πρώτον,** τα συντομότερα μονοπάτια συνεχώς αυξάνουν σε μήκος, και
  - **Δεύτερον,** κάθε ακμή του υπολειμματικού γραφήματος ξαναεμφανίζεται σε συντομότερο μονοπάτι που είναι κατά 2 ακμές μεγαλύτερο από την προηγούμενη φορά:

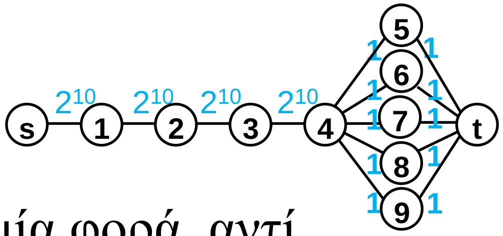
$$d(u) = d(v) + 1 \geq d'(v) + 1 = d'(u) + 1 + 1 = d'(u) + 2$$



  - Άρα, θα χρησιμοποιηθούν συνολικά $VE/2$ επαυξητικά μονοπάτια
- Χρόνος $O(E(VE))=O(VE^2)$

Τεχνική Προροής-Προωθήσεως

- Διαίσθηση
  – Γιατί να μην σταλεί με μιας ροή 5 στην κορυφή 4;



  – Το $s \rightarrow 4$ θα συμμετείχε μόνο μία φορά, αντί σε 5 διαφορετικά επαυξητικά μονοπάτια, μεγέθους 1
- Τεχνική Προροής-Προωθήσεως
  – Προσπαθούμε να οδηγήσουμε σε κορεσμό τις ακμές, διοχετεύοντας όση ροή επιτρέπεται
  – Οι ενδιάμεσες κορυφές μπορούν να αποθηκεύουν πλεονάζουσα ροή – χαρακτηρίζονται, τότε, ως ***ενεργές (active)***
  – Έτσι δημιουργείται μία προσέγγιση ροής, η ***προροή***, η οποία θα συγκλίνει στην τελική «κανονική» ροή

Τεχνική Προροής-Προωθήσεως (συν.)

- Προκειμένου η προροή να μετασχηματιστεί σε νόμιμη ροή, πρέπει πρώτα να φθάσει ροή στην καταβόθρα και, κατόπιν, το πλεόνασμα να επιστραφεί στην πηγή
- Δηλαδή, ***πρέπει να εξαλειφθούν οι ενεργές κορυφές***. Πώς;
  - Υπολειμματικό γράφημα
  - Συνάρτηση ύψους στο υπολειμματικό γράφημα
- Συνάρτηση ύψους
  - $h(t) = 0$
  - $h(v) \leq h(u) + 1$, $(v,u) \in E_r$

  Π.χ., $h \equiv$ απόσταση από καταβόθρα
- Όταν $h(v) = h(u) + 1$, τότε η (v,u) καλείται ***νόμιμη***

Ιδιότητες

- Το ύψος μίας κορυφής v δεν ξεπερνά το μήκος της συντομότερης αποστάσεως από την v προς την καταβόθρα t
  - Έστω $v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to t$ το συντομότερο μονοπάτι. Τότε:

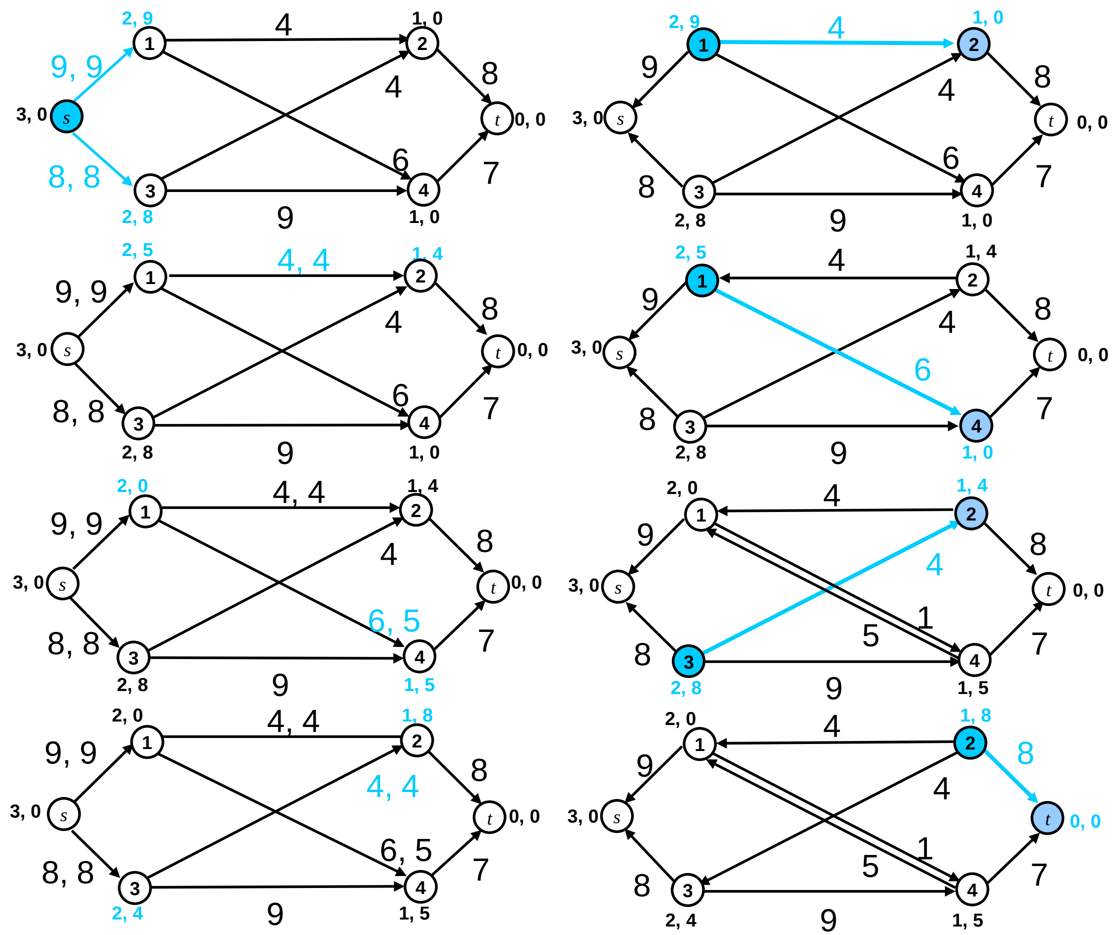
$$h(v) \le h(v_1) + 1 \le h(v_2) + 2 \le \cdots \le h(t) + d = 0 + d$$

- Όταν $h(v) > V$, τότε δεν υπάρχει μονοπάτι από την v προς την καταβόθρα t (γιατί;)

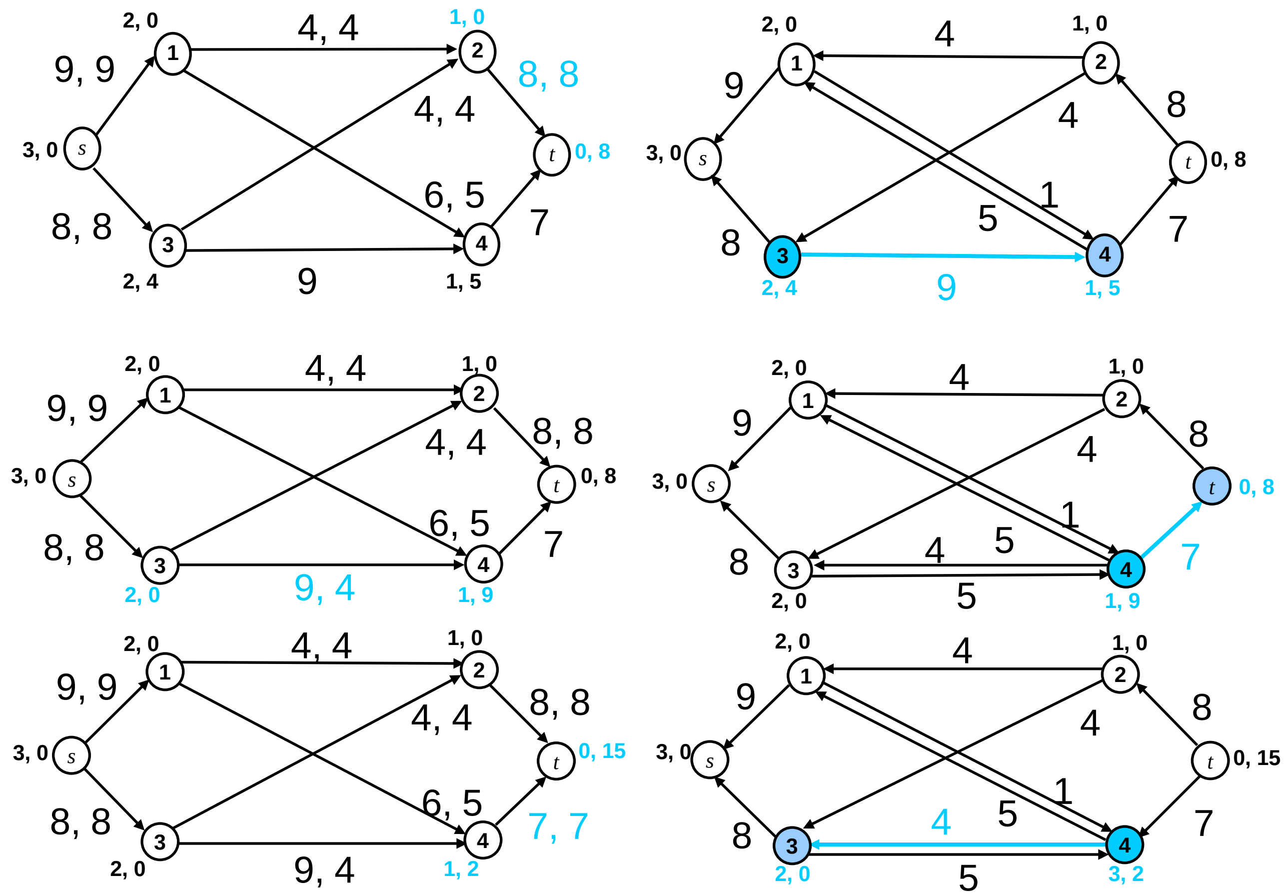
Γενικό Σχεδιάγραμμα Αλγορίθμων Προροής-Προωθήσεως

- Αναθέτουμε ύψη βάσει των συντομότερων μονοπατιών προς καταβόθρα
- Φέρουμε σε κορεσμό όλες τις ακμές της πηγής
- Όσο υπάρχουν ενεργές κορυφές, επιλέγουμε μία, έστω *v*, και
  - είτε σπρώχνουμε ροή μέσω μίας ***νόμιμης ακμής*** της
  - είτε, εάν δεν υπάρχουν νόμιμες ακμές, υψώνουμε την *v*, ώστε να είναι κατά ***μία μονάδα υψηλότερη*** από τον ***χαμηλότερό της γείτονα***

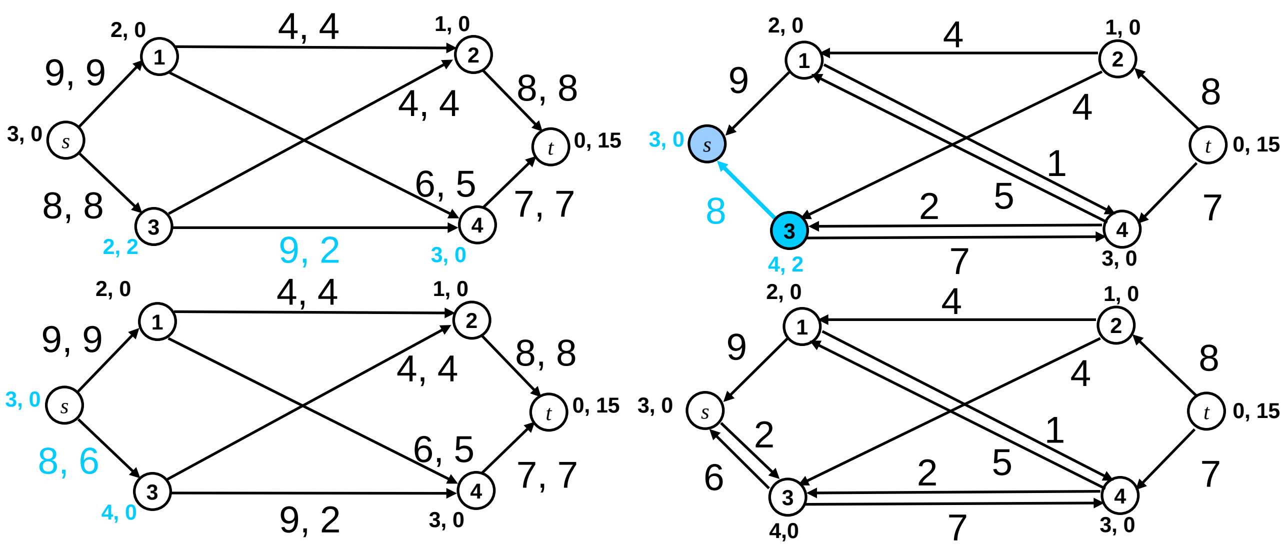
Παράδειγμα



Παράδειγμα (συν.)



Παράδειγμα (συν.)



Γιατί δουλεύει;

- Μηχανικό ανάλογο
- Στο υπολειμματικό γράφημα υπάρχει μονοπάτι από κάθε ενεργή κορυφή προς την πηγή, ενώ η πηγή είναι απομονωμένη από την καταβόθρα
  - *Πολύ εύκολα, με επαγωγή, ξεκινώντας από το γεγονός πως, αρχικά, οδηγούνται σε κορεσμό αυτές της πηγής* s
  - *Οι μόνες που «βλέπει» η πηγή, έχουν ύψος >* $h(s)$ *(αφού της επιστρέφουν ροή)* $\Rightarrow$ *δεν επικοινωνούν με την καταβόθρα (ιδιότητα ύψους* $h(v) \le h(u) + 1$, $(v,u) \in E_r$, *σταθερό 0)*
- Καμμία κορυφή δεν αποκτά ύψος μεγαλύτερο του $2V$
  - *Η πηγή έχει ύψος* $\le V$, *ενώ κάθε ενεργή κορυφή v απέχει το πολύ* V-2 *ακμές από την* s: $v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to s$

    $$h(v) \le h(v_1) + 1 \le h(v_2) + 2 \le \cdots \le h(s) + d \le V + d \le 2V\text{-}2$$

  - *Όταν η v καταστεί ανενεργή, το ύψος της είτε είναι το ίδιο είτε κατά ένα μεγαλύτερο από τον χαμηλότερο γείτονά της.*

Γιατί δουλεύει; (συν.)

- Όταν τερματίζει:
  - δεν υπάρχουν ενεργές κορυφές
  - η πηγή είναι αποκομμένη από την καταβόθρα
- Άρα
  - δημιουργείται κανονική ροή
  - δεν υπάρχουν επαυξητικά μονοπάτια

Ανάλυση

- Μέσω Συναρτήσεων Δυναμικού (σχεδιάγραμμα)
  - $\mathbf{\Phi} = \sum h(v)$, v ενεργή
    - αρχική τιμή $\leq V \times 2V$
    - τελική τιμή 0
  - Πώς μεταβάλλεται το δυναμικό
    - Α΄ περίπτωση: ύψωση κορυφής κατά $c \Rightarrow \Delta\mathbf{\Phi} = c$. Συνολικά, $2V^2$ ($V \times 2V$)
    - Β΄ περίπτωση: διοχέτευση ροής.
      - Κορεσμός ακμής:
        $\Delta\mathbf{\Phi} = \mathbf{2}V \Rightarrow 2V^2 E$ (τυχόν ενεργοποίηση κορυφής απολήξεως)
      - Ακόρεστη ακμή:
        $\Delta\mathbf{\Phi} = -h(v)+h(v)-1 = -1$ (γίνεται ενεργή γειτονική w, με $h(w)= h(v)-1$) ή
        $\Delta\mathbf{\Phi} = -h(v)$ (ήδη ενεργή η γειτονική w)

Ανάλυση (συν.)

- Σύνοψη
  - Αρχικά:

    $\mathbf{\Phi} = 2V^2$
  - Μεταβολές:

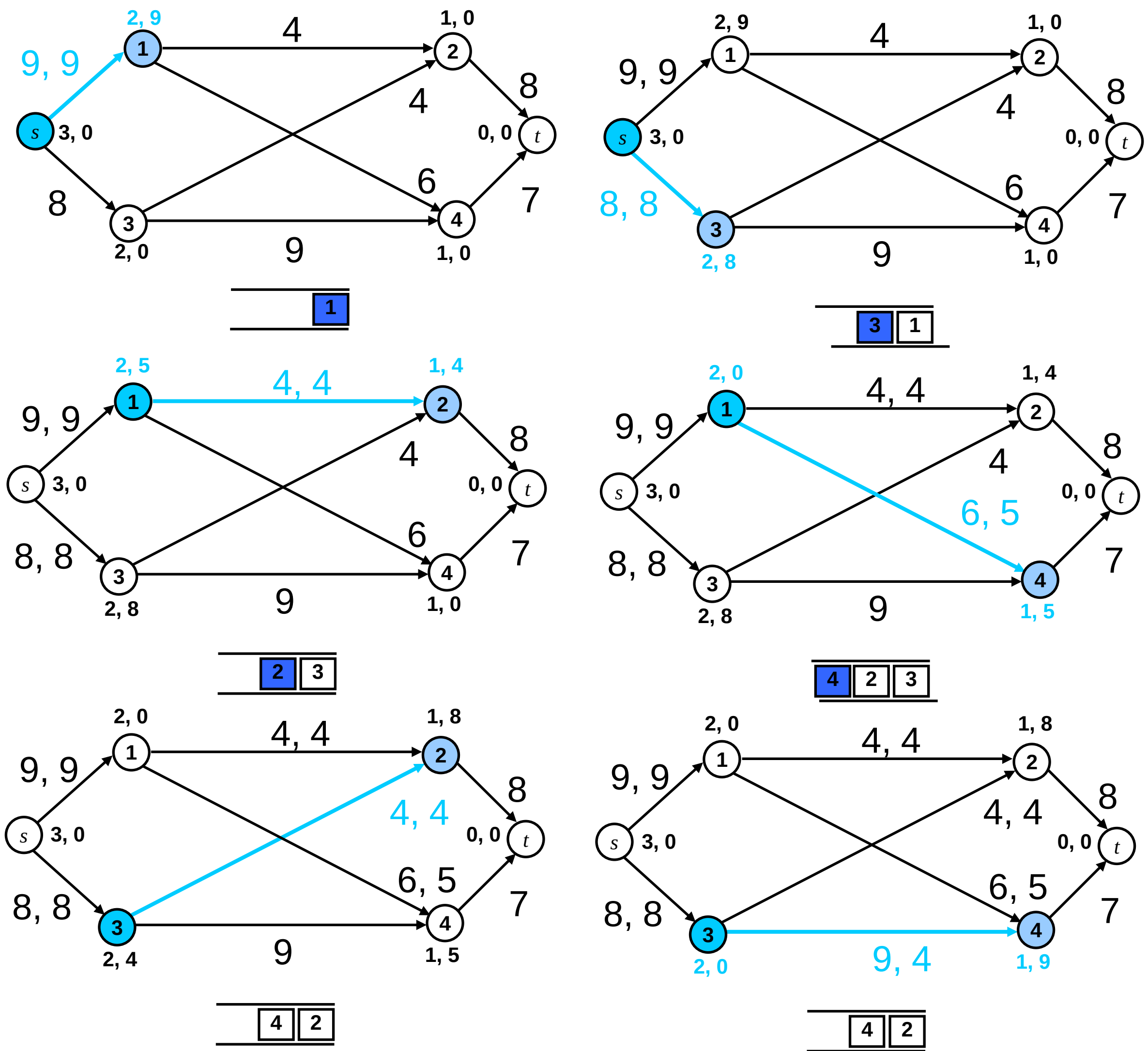
    $+(2V^2+2\,V^2E)$ από αλλαγές ύψους/κορεσμούς ακμών
  - Τελικά:

    $\mathbf{\Phi} = 0 \Rightarrow 2V^2+2\,V^2E = O(V^2E)$ ακόρεστες προωθήσεις
    (έκαστη προκαλεί $\Delta\mathbf{\Phi} \leq -1$)
- Χρόνος $O(V^2E)$

Τροποποίηση Goldberg-Tarjan

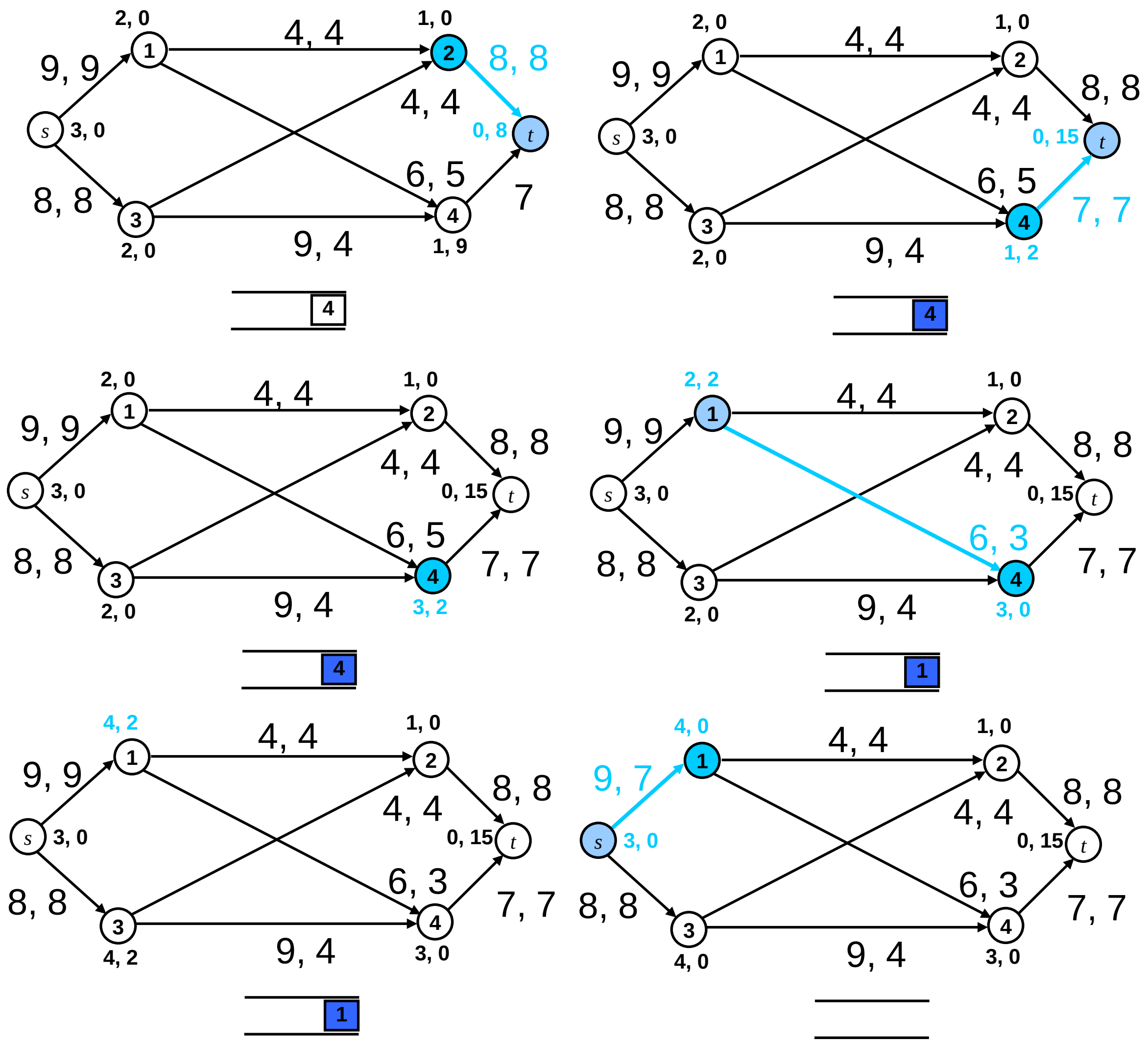
- Επιλογή ενεργής κορυφής για προώθηση ροής μέσω ουράς FiFo
- Όταν επιλεγεί ενεργή κορυφή, προωθείται ***συνεχώς*** ροή μέσω νομίμων ακμών μέχρι
  - είτε να καταστεί ανενεργή
  - είτε να τελειώσουν οι νόμιμες ακμές, οπότε προσαρμόζεται το ύψος της

Παράδειγμα



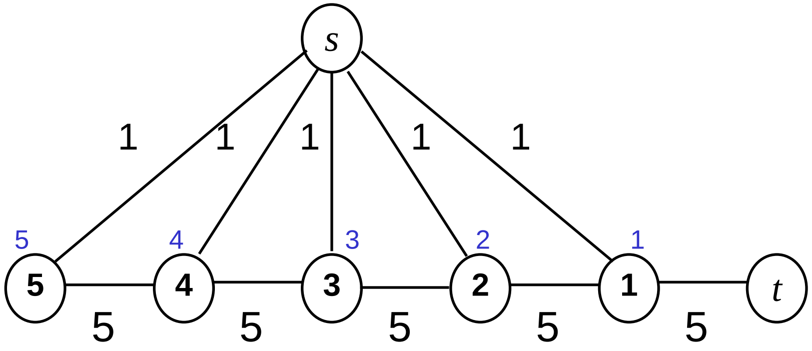
2, 9
1, 0
4
9, 9
8
4
s
3, 0
0, 0
t
6
7
9
2, 0
1, 0
1
2, 9
1, 0
4
9, 9
8
4
s
3, 0
0, 0
t
6
8, 8
7
9
2, 8
1, 0
3
1
2, 5
1, 4
4, 4
9, 9
8
4
s
3, 0
0, 0
t
6
8, 8
7
9
2, 8
1, 0
2
3
2, 0
1, 4
4, 4
9, 9
8
4
s
3, 0
0, 0
t
6, 5
8, 8
7
9
2, 8
1, 5
4
2
3
2, 0
1, 8
4, 4
9, 9
8
4, 4
s
3, 0
0, 0
t
6, 5
8, 8
7
9
2, 4
1, 5
4
2
2, 0
1, 8
4, 4
9, 9
8
4, 4
s
3, 0
0, 0
t
6, 5
8, 8
7
9, 4
2, 0
1, 9
4
2

Παράδειγμα (συν.)



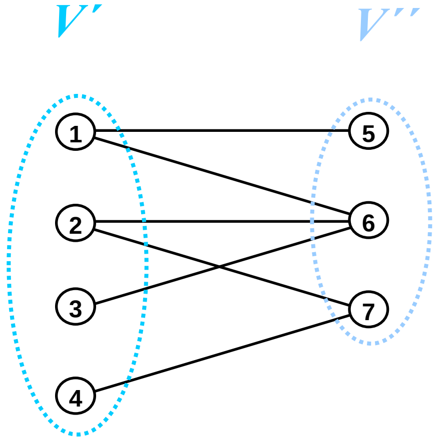
Ανάλυση

- Πολυπλοκότητα $O(V^2E)$
  - Αποδεικνύεται με συνάρτηση δυναμικού
- Το όριο είναι σφικτό, όπως δείχνει και το κάτωθι σχήμα



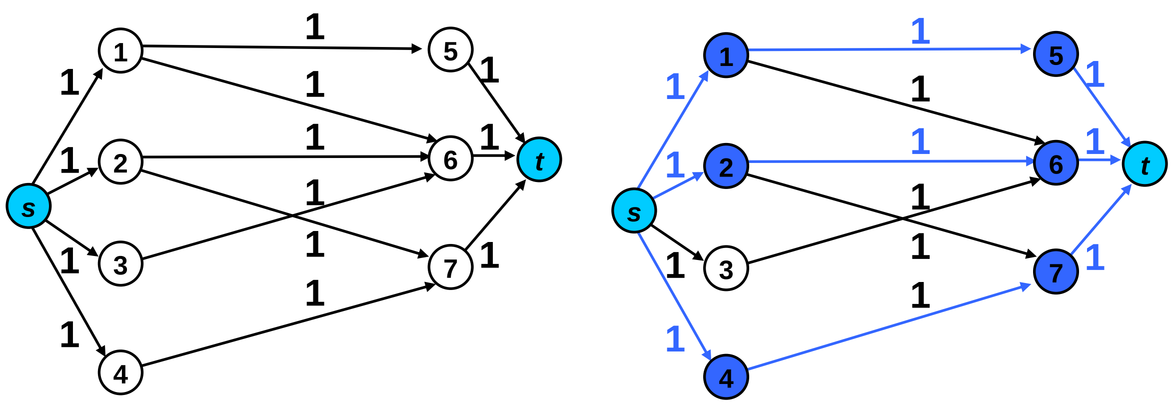
Μέγιστα Ταιριάσματα σε Διμελή Γραφήματα

- Ορισμοί
  - Κάθε σύνολο ακμών με διαζευγμένα άκρα
  - Μέγιστο, εάν δεν υπάρχει άλλο πολυπληθέστερο που να το περιέχει



Επίλυση

- Αναγωγή σε πρόβλημα ροής
  - Προσθήκη πηγής *s*
  - Προσθήκη καταβόθρας *t*
  - Μοναδιαία βάρη
- Χρόνος $O((V'+V'')E)$, καθώς
  - το μέγιστο ταίριασμα έχει $(V'+V'')/2$ ακμές, ενώ
  - όλες οι χωρητικότητες ισούνται με 1 $\Rightarrow$ μέγιστη ροή $(V'+V'')/2$



Ροές Ελαχίστου Κόστους

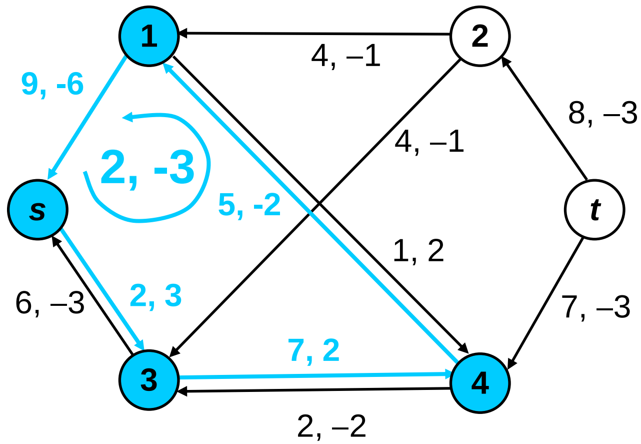
- Ορισμοί
  - Με κάθε ακμή e συσχετίζεται και μία τιμή κόστους $b(e)$ ανά μονάδα ροής
  - Κόστος μίας ροής f:

$$\Sigma f(e)b(e)$$

  - Μία ροή χαρακτηρίζεται ως ***ελαχίστου κόστους*** εάν επιδεικνύει το ***μικρότερο κόστος μεταξύ όλων των ροών της ίδιας τιμής***
  - Μέγιστη ροή ελαχίστου κόστους το ζητούμενο

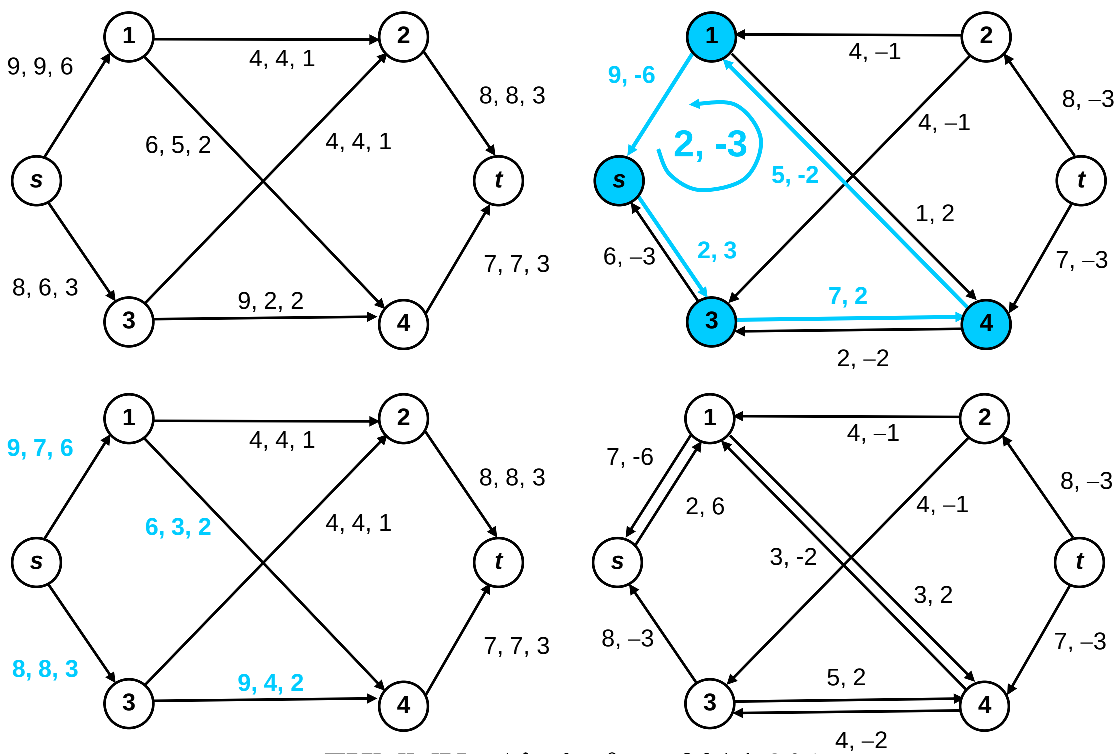
Επέκταση Υπολειμματικού Γραφήματος

- Αναγκαία η επέκταση του υπολειμματικού γραφήματος, ώστε
  – με κάθε πραγματική ακμή *e* να σχετίζεται κόστος *b*(*e*)
  – με κάθε οπισθοακμή, κόστος -*b*(*e*) (καθώς τυχόν επιλογή της ελαττώνει το κόστος)



Πρώτη Λύση

- Χρήση επαυξητικών κύκλων αρνητικού κόστους
  - *Η ύπαρξή τους σημαίνει δυνατότητα μείωσης του κόστους, **χωρίς μεταβολή της τιμής της ροής***

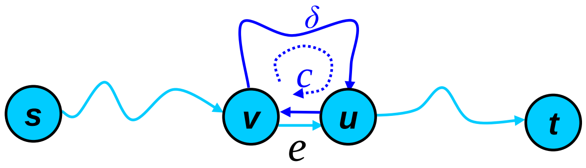


Γιατί δουλεύει;

- Μία ροή είναι ελαχίστου κόστους ανν δεν υπάρχει αρνητικός επαυξητικός κύκλος
  - ($\Rightarrow$) Εάν υπάρχει αρνητικός προφανώς μπορεί κανείς να μειώσει το κόστος
  - ($\Leftarrow$) Εάν η f είναι μέγιστη, όχι ελαχίστου κόστους, αλλά με θετικούς κύκλους, τότε επαύξηση κατά μήκος του κύκλου θα μείωνε το κόστος, δίχως να πειραχθεί η τιμή (άτοπο)
- Πολυπλοκότητα $O(BVE)$, B αρχικό κόστος μέγιστης ροής
  - Edmonds-Karp: για αρχική ροή, κόστους B
  - Bellman-Ford: για εντοπισμό B, το πολύ, αρνητικών κύκλων

Δεύτερη Λύση

- Έστω ροή f ελαχίστου κόστους και επαυξητικό μονοπάτι π ελαχίστου κόστους. Τότε η f': $f \rightarrow_\pi f'$ είναι ροή ελαχίστου κόστους, με μεγαλύτερη, όμως, τιμή ροής:
  - Εάν η f' δεν είναι ελαχίστου κόστους, τότε πρέπει να υπάρχει αρνητικός κύκλος c, με τουλάχιστον μία κοινή ακμή με την π (γιατί; οι δύο ροές διαφέρουν μόνο στις ακμές $\pi = f' - f$ και, άρα, σε αντίθετη περίπτωση ο κύκλος θα υπήρχε και στην f):



  - $b(\underline{s}\rightarrow v)+b(\delta)+b(u\rightarrow t) < b(s\rightarrow v)+b(v\rightarrow u)+b(u\rightarrow t)$, καθώς $b(\delta)+ b(u\rightarrow v) < 0 \Rightarrow b(\delta)-b(v\rightarrow u) < 0 \Rightarrow b(\delta) < b(v\rightarrow u)$

Ανάλυση

- Πολυπλοκότητα
  - $O(|f|VE)$: Bellman-ford για τα ΣΜΜΠ, βάσει της b
  - $O(|f|E\log V)$: Εναλλακτικά, για αραιά γραφήματα, Johnson