4.13. Permutationen.

Definition. Eine **Permutation** der Elementen $\{1, \ldots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die **Hintereinanderführung** zweier Permutationen ergibt wieder eine Permutation. Man definiert dadurch das **Produkt** zweier Permutationen σ, π

$$\sigma\pi = \pi \circ \sigma, \quad \text{d.h.} \quad \sigma\pi(k) = \pi \circ \sigma(k) = \pi(\sigma(k)).$$

Beachte hier die umgekehrte Reihenfolge! Man kann Permutationen so vorstellen, wie Umordnung der Elementen $\{1, \ldots, n\}$. Es ist bequem also eine Permutation als

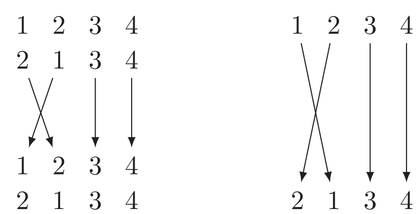
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

zu notieren.

Beispiel. 1. Die Permutation σ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

vertauscht 1 und 2, und lässt 3 und 4 fest. Also $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$, $\sigma(4) = 4$. Das Produkt rechnet man so aus:

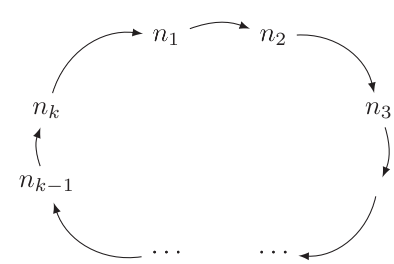


Also $\sigma\sigma$ =die **identische Permutation**.

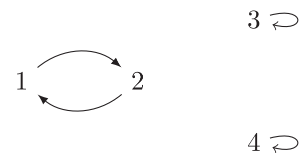
2. Bezeichne mit S_n die Menge aller Permutationen auf n Elementen. Versehen mit dem obigen Produkt wird S_n zu einer Gruppe, die so genannte **Symmetrische Gruppe**. Die Anzahl der Elementen in S_n ist $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Die Inverse einer Permutation ist die Inverse der bijektiven Abbildung σ. Das neutrale Element $\mathbf{1} \in S_n$ ist die identische Abbildung, d.h. $\mathbf{1}(k) = k$ für jedes $k = 1, \ldots, n$.

3. Es ist möglich, dass eine Permutation eine Teilmenge $M \subseteq \{1, \ldots, n\}$ invariant lässt. Wenn M invariant ist und keine weitere, nichtleere **invariante Mengen** erhält nennen wir es eine **Zyklus**. Anders gesagt eine Zyklus in einer Permutation ist eine Folge von unterschiedlichen Elementen $n_1, \ldots, n_k$ mit $\sigma(n_i) = n_{i+1}$ für $i \leq k-1$ und $\sigma(n_k) = n_1$. Ein solcher Zyklus können wir als $(n_1 n_2 \ldots n_k)$ notieren. Wir nennen die Permutation

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \ldots & n_{k-1} & n_k \\ n_2 & n_3 & \ldots & n_k & n_1 \end{pmatrix} \quad =$$



auch eine Zyklus. Hier heißt k die Länge des Zyklus. Eine Zyklus von Länge 2 heißt auch **Transposition**. Die Inverse einer Transposition ist dieselbe Transposition (warum?). In dem obigen Beispiel is also (12) eine Zyklus (sogar eine Transposition), sowie (3) und (4) sind auch Zyklen. Eine bequeme Notation ist also für das obige σ: (12)(3)(4). Ein Zyklus von Länge 1 is ein Element das auf sich gebildet wird, also ein **Fixpunkt** der Permutation. Im obigen Beispiel sind 3 und 4 Fixpunkte.

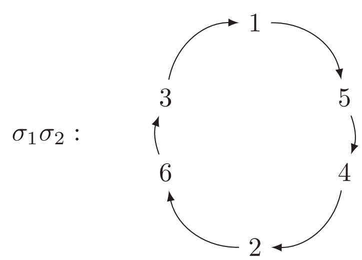


4. Sei σ_1 die Permutation von 6 Elementen (in Zyklus-Notation) (1324)(56) und sei σ_2 die Permutation (12)(35)(46). Wir sehen also, σ_1 und σ_2 keinen Fixpunkt haben.

Das Produkt von σ_1 und σ_2 ist

$$\sigma_1\sigma_2 = (1324)(56)(12)(35)(46) = (154263),$$

also $\sigma_1\sigma_2$ besteht aus nur einer Zyklus, ist also eine **zyklische Permutation**.



Satz 1. Jede Permutation lässt sich eindeutigerweise als Produkt von disjunkten Zyklen schreiben.

Beweis. Fange mit 1 an:

$$1 \to \sigma(1) \to \sigma(\sigma(1)) \to \cdots$$

so müssen wir irgendwann zurück zu dem Element 1 in dieser Kette kommen (es gibt nähmlich endlich viele Elemente): so haben wir eine Zyklus gefunden. Wiederhole die ganze Prozedere mit den restlichen Elementen (solange es noch welche gibt). ∎

Satz 2. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ läßt sich als Produkt von *(nicht notwendigerwiese diskjunkten)* Transpositionen schreiben.

Beweis. Es reicht ein Zyklus als Produkt von Transpositionen schreiben (wegen Satz 1; schreibe σ als Produkt von disjunkten Zyklen). Sei also $\sigma \in S_n$ und

$$(n_1 n_2 \dots n_k) \quad \text{eine Zyklus von } \sigma.$$

Es gilt

$$(n_1 n_2)(n_1 n_3) \cdots (1 n_k) = (n_1 n_2 \dots n_k).$$

Somit ist der Beweis fertig. ∎

Beispiel. 1. A C H T U N G : Ein typischer Fehler: $(12)(23) \neq (123)$ sondern $(12)(23) = (132)$!
2. Die Transposition-Zerlegung is nicht eindeutig:

$$(1342) = (13)(14)(12) \quad \text{und} \quad (1342) = (13)(34)(34)(14)(12).$$

Wir merken aber, dass in diesem Beispiel die Anzahl der Transpositionen in beiden Zerlegungen *ungerade* ist.

Das ist keine Ausnahme. Um dies zu sehen führen wir den folgenden Begriff ein:

Definition. Sei $\sigma \in S_n$. Eine **Inversion** in σ, ist ein Paar $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i < j$ und $\sigma(j) > \sigma(i)$. (In diesem Fall sagt man auch, dass die Elemente i und j in σ in falscher (inverser) Reihenfolge, oder in Inversion stehen.)

Beispiel. 1. Fïr die identische Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist diese Anzahl 0.

2. Für $\sigma = (1342)$, also für

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt: $\sigma(1) > \sigma(2)$, $\sigma(1) > \sigma(4)$, $\sigma(3) > \sigma(4)$. Also diese Anzahl is 3, ungerade.

Definition. Sei N die Anzahl der Inversionen in σ. So heißt

$$\mathrm{Sign}(\sigma) = (-1)^N,$$

das **Signum** (oder **Vorzeichen**) von σ.

Satz 3. Ist $\sigma \in S_n$, so ist die Parität der Anzahl der Transpositionen in einer Transposition-Zerlegung von σ gleich die Parität der Anzahl der Inversionen in σ. (Also sie ist immer dieselbe, egal welche Transposition-Zerlegung wir betrachten.)

Beweis. Sei $\sigma \in S_n$. Es reicht zu zeigen, dass, wenn wir σ mit einer Transposition τ multiplizieren das Vorzeichen wird mit -1 Multipliziert, also $\mathrm{Sign}(\sigma) = -\mathrm{Sign}(\sigma\tau)$. Wir haben also $\tau = (i'j')$, eine Transposition mit $i' = \sigma(i)$, $j' = \sigma(j)$, und

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(j) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Damit ist das Produkt

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(j) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Wir notieren die Änderung in der Anzahl der Inversionen. Waren i und j in Inversion so sind sie nicht mehr (oder waren sie nicht in einer Inversion, so sind sie doch jetzt). Dies ändert die Anzahl der Inversionen um ± 1. Ab jetzt OBdA $i < j$. Ist $k < i$ oder $k > j$ so sind i und k (j und k) genau dann in inverser Position in $\sigma\tau$, wenn sie in inverser Position in σ stehen. Sei also $i < k < j$, so gilt

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & k & \ldots & j & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(k) & \ldots & \sigma(j) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

und

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & k & \ldots & j & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(j) & \ldots & \sigma(k) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Es gibt drei Möglichkeiten für σ: 1) k steht mit i *und* j in Inversion 2) k steht mit keinem der beiden (i oder j) in Inversion 3) steht mit *einer* der beiden (i oder j) in Inversion. Fall 1) bedeutet $\sigma(k) < \sigma(i)$, $\sigma(j) < \sigma(k)$, und somit $\sigma\tau(k) = \sigma(k) > \sigma(j) = \sigma\tau(i)$ und $\sigma\tau(k) = \sigma(k) < \sigma(i) = \sigma\tau(j)$ Dabei ändert sich die Anzahl der Inversionen um 2. Fall 2) geht ähnlich, und die Änderung in der Anzahl der Inversionen ist wieder um 2. Fall 3) bedeutet $\sigma(k) < \sigma(i)$, $\sigma(k) < \sigma(j)$ (oder $\sigma(i) < \sigma(k)$, $\sigma(j) < \sigma(k)$), und somit $\sigma\tau(k) = \sigma(k) < \sigma(i) = \sigma\tau(j)$, $\sigma\tau(k) = \sigma(k) < \sigma(j) = \sigma\tau(i)$ (oder $\sigma\tau(k) = \sigma(k) > \sigma(i) = \sigma\tau(j)$, $\sigma\tau(k) = \sigma(k) > \sigma(j) = \sigma\tau(i)$). Dabei ändert sich die Anzahl der Inversionen um 0. ∎

Bemerkung. Sei $\sigma \in S_n$ gegebene Permutation, und schreibe sie als Produkt von Zyklen. Sei N die Anzahl der Zyklen die gerade Länge haben. So gilt

$$\mathrm{Sign}(\sigma) = (-1)^N.$$

4.14. Permutationsmatrizen.

Sei $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis in $\mathbb{K}^n$, und sei σ eine Permutation. Die Vektoren $e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}$ bilden wieder eine Basis in $\mathbb{K}^n$, und es gibt eine bijektive lineare Abbildung T_σ mit $T_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$. Sei P_σ die Matrix von T_σ bezüglich $\mathcal{E}$, d.h. $P_\sigma = M_{T_\sigma}^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$. Für den obigen Beispiel $\sigma = (12)(3)(4)$ sieht es so aus:

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix P_σ heißt eine **Permutationsmatrix**.

Satz 1. 1. Eine Matrix P ist genau dann eine Permutationsmatrix, wenn in jeder Spalte und in jeder Zeile genau eine 1 steht, sonst sind die Einträge 0.

2. Für $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ gilt

$$P_{\sigma_2 \circ \sigma_1} = P_{\sigma_1 \sigma_2} = P_{\sigma_2} P_{\sigma_1}.$$

3. Multiplikation mit P_σ von links führt zu Vertauschung der Zeilen von A. Genauer (in Zeilenvektornotation):

$$P_\sigma \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} \\ a_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

4. Multiplikation mit P_σ von rechts führt zu Vertauschung der Spalten von A. Genauer (in Spaltenvektornotation):

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} P_\sigma = \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & a_{\sigma(2)} & \dots & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Beweis. 1. Eine Permutationsmatrix hat offensichtlich in jeder Spalte und Zeile genau eine 1. Sei also P eine Matrix, so dass in jeder Spalte und in jeder Zeile genau eine 1 steht sonst seien die Einträge 0. Jede kanonische Basisvektor $e_1, \dots, e_n$ also taucht als Spaltenvektor von P auf (und genau einmal), in welcher Reihenfolge dies geschieht definiert σ.

2. Für $1 \le j \le n$ gilt

$$T_{\sigma_2 \circ \sigma_1} e_j = e_{\sigma_2 \circ \sigma_1(j)} = T_{\sigma_2} e_{\sigma_1(j)} = T_{\sigma_2} T_{\sigma_1} e_j.$$

Daraus folgt $T_{\sigma_2 \circ \sigma_1} = T_{\sigma_2} T_{\sigma_1}$, und somit die Behauptung.

3., 4.: Siehe elementare Umformungen von Typ III. ∎

Satz 2. P_σ läßt sich durch Zeilenvertauschungen auf die Einheitsmatrix bringen.
Für eine Permutation σ ist $\det(P_\sigma) = \mathrm{Sign}(\sigma)$.

Beweis. Klar. ∎

Bis jetzt haben wir angenommen, dass die Determinante definiert werden kann, und haben aus den definierenden Eigenschaften ganz viele Information hergeleitet. Nun können wir die Determinant eigentlich definieren.

Definition (Leibniz). Für $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ setze

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Sign}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma(i)}.$$

Satz 3. Es gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Sign}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{Sign}(\pi) \alpha_{\pi(1)1} \alpha_{\pi(2)2} \cdots \alpha_{\pi(n)n}.$$

Die so definierte Funktion det hat die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3).

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{Sign}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\alpha_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{Sign}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma^{-1}\sigma(i)\sigma(i)}\\ &= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \operatorname{Sign}(\sigma^{-1})\prod_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma^{-1}(i)i} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{Sign}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)i}.\end{aligned}$$

(D3) ist trivial (setze ein!). Um (D2) zu sehen, sei $\tau \in S_n$ eine Transposition, so ist

$$\begin{aligned}\det(P_\tau A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{Sign}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(\tau(i))i} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{Sign}(\tau^{-1}\sigma)\prod_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)i}\\ &= -\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{Sign}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\alpha_{\sigma(i)i} = -\det(A).\end{aligned}$$

(D1) folgt aus Nachrechnen. ∎

4.15. Wieder Gleichungssysteme.

Satz 1 (**Die Cramersche Regel).** Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix (also $\det(A) \neq 0$). Für $b \in \mathbb{K}^n$ sei $x \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung der Gleichung

$$Ax = b.$$

So gilt

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

wobei für $i = 1, \dots, n$ ist

$$A_i = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1} & \dots & a_{nn}\end{array}\right)\\ \qquad\qquad\uparrow\\ \qquad\qquad i\text{-te Spalte}\end{array},$$

d.h. $A_i = A$ mit die i-te Spalte durch b ersetzt.

Beweis. Sie x die eindeutige Lösung $x = A^{-1}b$, und betrachte die Matrix

$$B_i = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & \dots & 0 & x_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & & 1 & x_{i-1} & 0 & & \vdots\\ \vdots & & 0 & x_i & 0 & & \vdots\\ \vdots & & 0 & x_{i+1} & 1 & & \vdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & x_n & 0 & \dots & 1\end{array}\right)\\ \uparrow\\ i\text{-te Spalte}\end{array}.$$

Dann gilt

$$AB_i = A_i,$$

und somit

$$\det(AB_i) = \det(A)\det(B_i) = \det(A_i).$$

Die Determinante von B_i rechnet man mithilfe des Laplace'scen Entwicklungssatzes (nach i-ter Zeile):

$$\det(B_i) = x_i.$$

Die Behauptung folgt daraus. ■

Diese Method, um die Lösung zu finden, ist sehr zeitaufwendig, vor Allem wenn man mit der gleichen Matrix A aber mit *vielen* unterschiedlichen rechten Seiten die Gleichung lösen möchte. Hier ist eine andere Methode, welche genau für solchen Situationen geeignet ist:

Die LU-Zerlegung.
Wir wissen bereits das Gleichungen $Ax = b$ mit A obere oder untere Dreickesmatrizen leicht zu lösen sind (einfach einsetzen!). Die Idee ist also eine allgemeine Matrix A als Produkt solcher Matrizen zu schreiben, also $A = LU$ mit L unteren und U oberen Dreiecksmatrizen. Dies ist leider nicht immer möglich, aber wenn doch, dann kann man $Ax = b$ dadurch lösen, dass man die "leichte" Gleichungen

$$Uy = b \qquad \text{und} \qquad Lx = y$$

löst.

Beispiel. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir wollen A als Produkt $A = LU$ zerlegen, mit L unteren und U oberen Dreiecksmatrizen. Wir bringen A auf Zeilenstufenform durch elementaren Umformungen von Typ II und wir machen es so, dass vielfacher von Zeilen immer zu darunterliegenden Zeilen addiert werden (wir hoffen das es machbar ist!). Diese elementaren Umformungen entsprechen Multiplikation von Links mit Matrizen von Typ S_{II}. Sei also U die so entstandene Zeilenstufenform von A und $S_N \cdots S_1 A = U$. Auf diesem Beispiel sieht es so aus:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \text{addiere } -1\times \text{ erste Zeile zu der zweiten;}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \text{addiere } -1\times \text{ erste Zeile zu der dritten;}$$

$$S_2 S_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \text{addiere } -\tfrac{1}{2}\times \text{ zweite Zeile zu der dritten;}$$

$$S_3 S_2 S_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = U$$

Die Matrix L bekommt man aus $S_3 S_2 S_1 A = U$, also $L = (S_3 S_2 S_1)^{-1}$:

$$L = S_1^{-1} S_2^{-1} S_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Wir überprüfen diese Zerlegung:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = A,$$

also stimmt!