28.

Note sur la méthode d'élimination de *Bezout*.

(Par M. *A. Cayley.*)

Voici la forme la plus simple sous laquelle on peut présenter cette méthode. Pour éliminer les variables x, y entre deux équations du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(a,\ldots\overset{\frown}{)(}x,y)^n=0$$
$$(a',\ldots\overset{\frown}{)(}x,y)^n=0,$$

on n'a qu'à former l'équation identique

$$\frac{(a,\ldots\overset{\frown}{)(}x,y)^n\,(a',\ldots\overset{\frown}{)(}\lambda,\mu)^n-(a',\ldots\overset{\frown}{)(}x,y)^n\,(a,\ldots\overset{\frown}{)(}\lambda,\mu)^n}{\mu x-\lambda y}=$$

$$\left(\begin{array}{|llll|}a_{0,0} & a_{1,0} & \ldots & a_{n-1,0}\\ a_{0,1} & a_{1,1} & \ldots & a_{n-1,1}\\ \vdots & & & \\ a_{0,n-1} & a_{1,n-1} & \ldots & a_{n-1,n-1}\end{array}\underset{\smile}{)(}x,y)^{n-1}\underset{\smile}{(}\lambda,\mu)^{n-1}$$

où l'expression qui forme le second membre représente la fonction suivante

$$\begin{aligned}&(a_{0,0}\;x^{n-1}+a_{1,0}\;x^{n-2}y\cdots+a_{n-1,0}\;y^{n-1})\lambda^{n-1}\\ +&(a_{0,1}\;x^{n-1}+a_{1,1}\;x^{n-2}y\cdots+a_{n-1,1}\;y^{n-1})\lambda^{n-2}\mu\\ &\vdots\\ +&(a_{0,n-1}x^{n-1}+a_{1,n-1}x^{n-2}y\cdots+a_{n-1,n-1}y^{n-1})\mu^{n-1}.\end{aligned}$$

Le résultat de l'élimination sera

$$\begin{vmatrix}a_{0,0} & a_{1,0} & \ldots & a_{n-1,0}\\ a_{0,1} & a_{1,1} & \ldots & a_{n-1,1}\\ \vdots & & & \\ a_{0,n-1} & a_{1,n-1} & \ldots & a_{n-1,n-1}\end{vmatrix}=0.$$

Par exemple on trouve

$$\frac{(a,b,c\overset{\frown}{)(}x,y)^2(a',b',c'\overset{\frown}{)(}\lambda,\mu)^2-(a',b',c'\overset{\frown}{)(}x,y)^2(a,b,c\overset{\frown}{)(}\lambda,\mu)^2}{\mu x-\lambda y}=$$

$$\left(\begin{array}{|ll|}2(ab'-a'b), & ac'-a'c\\ ac'-a'c, & 2(bc'-b'c)\end{array}\underset{\smile}{)(}x,y\underset{\smile}{)(}\lambda,\mu)$$

$$\frac{(a,b,c,d\widehat{)(}x,y)^3(a',b',c',d'\widehat{)(}\lambda,\mu)^3-(a',b',c',d'\widehat{)(}x,y)^3(a,b,c,d\widehat{)(}\lambda,\mu)^3}{\mu x-\lambda y}=$$

$$\left(\begin{array}{lll} 3(ab'-a'b), & 3(ac'-a'c), & (ad'-a'd) \\ 3(ac'-a'c), & (ad'-a'd)+9(bc'-b'c), & 3(bd'-b'd) \\ (ad'-a'd), & 3(bd'-b'd), & 3(cd'-c'd) \end{array}\widehat{\Bigg)\Bigg(}x^2,xy,y^2\widehat{)(}\lambda^2,\lambda\mu,\mu^2\right).$$

d'où l'on tire immédiatement les résultats de l'élimination entre deux équations quadratiques ou cubiques.

Londres, 2 Stone Buildings, Avril 1855.

29.

Remarque relative à la note précédente.*

(Par M. *C. W. Borchardt.*)

Comme la forme élégante sous laquelle M. ***Cayley*** présente la méthode abrégée de ***Bezout*** pourrait être inintelligible aux mathématiciens qui ne sont pas familiarisés avec les notations nouvelles du géomètre distingué de Londres, je crois faire une chose utile en traduisant comme l'a déjà fait M. ***Sylvester*** (Phil. Trans. 1853 pag. 516) en signes algébriques ordinaires l'énoncé de M. ***Cayley:***

„Etant proposées deux équations du $n^{\text{ième}}$ degré

$$fx=0,\qquad \varphi x=0$$

divisez l'expression

$$fx\,\varphi y-fy\,\varphi x$$

par la différence

$$x-y,$$

le quotient sera une fonction entière en x et y, du degré $n-1$ par rapport à chacune des deux variables, c. à d. une fonction de la forme

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\sum_{k=0}^{k=n-1}a_{i,k}\,x^i y^k$$

et le déterminant

$$\Sigma\pm a_{0,0}\,a_{1,1}\ldots a_{n-1,n-1}$$