Θεμελειώδεις Εννοιες της Αλγεβρας

Συμβολισμός:

- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$, οι ακέραιοι (integers).
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, οι ρητοί (rational numbers).
- $\mathbb{R} = \{\pm d_1 d_2 ... d_n . \delta_1 \delta_2 ...\}$, οι πραγματικοί (real numbers).
- $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, οι μιγαδικοί (complex numbers).
- $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{>0}$, οι φυσικοί αριθμοί, τα μη μηδενικά στοιχεία του $\mathbb{Z}$ (natural numbers).
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ (\mathbb{Z}_n) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}, \forall n \in \mathbb{N}$, οι ακέραιοι modulo n για τους οποίους ισχύει

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}.$$

Ομάδες (Groups): $(G, *) | *: G \times G \longrightarrow G$

i. $\forall a, b, c \in G$ ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα $a * (b * c) = (a * b) * c$,

ii. $\exists e \in G$ το ταυτοτικό στοιχείο ώστε ισχύει $a * e = e * a$,

iii. $\forall a \in G$ υπάρχει το αντίστροφο στοιχείο $a^{-1} \in G$ ώστε $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$,

iv. αν $\forall a, b \in G$ ισχύει $a * b = b * a$ λέμε πως η ομάδα είναι μεταθετική.

Παραδείγματα: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R} \backslash \{0\}, *)$, οι πραγματικοί χωρίς το μηδέν.

Δακτύλιοι (Rings): $(R, +, *) | +, *: R \times R \longrightarrow R$

i. $(R, +)$ είναι ομάδα,

ii. $(R, *)$ δεν είναι ομάδα (δηλαδή δεν υπάρχει ο αντίστροφος στο R),

iii. $\forall a, b, c \in R$ ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα: $a * (b + c) = a * b + a * c$ και $(a + b) * c = a * c + b * c$.

Παραδείγματα: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_n$. **Προσοχή:** Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_n$ περιέχει μηδενοδιαιρέτες αν n δεν είναι πρώτος αριθμός.

Σώματα (Fields): $(F, +, *) | +, *: F \times F \longrightarrow F$

i. $(F, +)$ είναι ομάδα,

ii. $(F, *)$ είναι ομάδα.

Παραδείγματα: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, όπου πρώτος αριθμός.