Θεωρία Βελτιστοποίησης

Βασίλειος Μαχαιράς

Πολιτικός Μηχανικός Ph.D.

Γραμμικός προγραμματισμός: επιπλέον θέματα και επεκτάσεις

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής

Διάλεξη 5η/2017

Τι παρουσιάστηκε στην $4^{η}$ διάλεξη

- Κανονική μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.
- Βασικά θεωρήματα και ορισμοί.
- Μέθοδος simplex.
- Προσδιορισμός ελάχιστης εφικτής λύσης.
- Υπολογιστικές διαδικασίες.
- Παρατηρήσεις σχετικά με τη μέθοδο simplex

Παράδειγμα 7

- Μια επιχείρηση κατασκευάζει τσάντες για μπαστούνια του γκολφ. Για να κατασκευαστεί μια τσάντα συμβάλλουν 4 τμήματα του εργοστασίου με εργασίες όπως:
- 1. Κόψιμο και βάψιμο του υλικού,
- 2. Ράψιμο,
- 3. Τελειώματα (κουμπιά, φερμουάρ κλπ.),
- 4. Έλεγχος και συσκευασία.
- Η *τυπική* τσάντα απαιτεί χρόνο (0.7 , 0.5 , 1 , 0.1) ώρες για κάθε τσάντα και αποφέρει κέρδος 10€.
- Η *πολυτελή* τσάντα απαιτεί χρόνο (1 , 5/6 , 2/3 , 1/4) ώρες για κάθε τσάντα και αποφέρει κέρδος 9€.

Παράδειγμα 7 (συνέχεια)

- Το επόμενο 4-μηνο μπορεί να εργαστεί το κάθε τμήμα:
- 1. Κόψιμο: 630 ώρες
- 2. Ράψιμο: 600 ώρες
- 3. Τελειώματα: 708 ώρες
- 4. Συσκευασία: 135 ώρες
- Πόσες τσάντες από κάθε είδος πρέπει να παραχθούν το επόμενο τετράμηνο, ώστε να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη?
- Πόσο είναι το μέγιστο ενδεχόμενο κέρδος?

Παράδειγμα 8

- Ένα εργοστάσιο παράγει 3 είδη προϊόντων:
- 1. TV set με κέρδος 100€ ανά τεμάχιο
- 2. Stereo με κέρδος 30€ ανά τεμάχιο
- 3. Ηχεία με κέρδος 30€ ανά τεμάχιο
- Για να κατασκευαστεί ένα TV set απαιτούνται:
- {1τμχ πλαισίου, 1τμχ προβολέα εικόνας, 2 τμχ κώνου ηχείων, 1τμχ τροφοδότη ρεύματος, 2τμχ ηλεκτρονικών}
- Για να κατασκευαστεί ένα Stereo απαιτούνται:
- {1τμχ πλαισίου, 2 τμχ κώνου ηχείων, 1τμχ τροφοδότη ρεύματος, 1τμχ ηλεκτρονικών}
- Για να κατασκευαστεί ένα ηχείο απαιτούνται:
- {1 τμχ κώνου ηχείων, 1τμχ ηλεκτρονικών}

Παράδειγμα 8 (συνέχεια)

- Το εργοστάσιο στην αποθήκη έχει:
- 1. 450τμχ πλαισίου
- 2. 250τμχ προβολέα εικόνας
- 3. 900 τμχ κώνου ηχείων
- 4. 450τμχ τροφοδότη ρεύματος
- 5. 600τμχ ηλεκτρονικών
- Πόσα τεμάχια από κάθε προϊόν πρέπει να κατασκευάσει, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του?

Περιεχόμενο 5ης διάλεξης

- Επιπλέον θέματα και επεκτάσεις του γραμμικού προγραμματισμού.
- Αναθεωρημένη μέθοδος simplex.
- Δυϊκότητα στο γραμμικό προγραμματισμό.
- Θεώρημα της δυϊκότητας.
- Σχέση με τη διαδικασία simplex.
- Ευαισθησία και συμπληρωματική χαλαρότητα.
- Δυϊκή μέθοδος simplex, αναγωγή γραμμικών ανισοτήτων.
- Προβλήματα μεταφορών.
- Αλγόριθμος Karmakar.

Εισαγωγή

- Η μέθοδος simplex μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.
- Για προβλήματα με πολλές μεταβλητές και περιορισμούς έχουν κατασκευαστεί τεχνικές που έχουν καλύτερη απόδοση σε σχέση με τη μέθοδο simplex, όπως π.χ. η αναθεωρημένη μέθοδος simplex. Η βασική διαφορά της μεθόδου simplex σε σχέση με την αναθεωρημένη της έκδοση είναι ότι στην πρώτη μετατρέπουμε όλες τις τιμές του πίνακα, ενώ στη δεύτερη απαιτείται να μετατραπούν μόνο τα στοιχεία του αντίστροφου πίνακα.

Εισαγωγή

- Για κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να σχηματιστεί ένα αντίστοιχο, το οποίο ονομάζεται δυϊκό (dual).
- Η επίλυση του προβλήματος μπορεί να επιτευχθεί μέσω της επίλυσης του δυϊκού, πολλές φορές πιο απλά.
- Αν το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχει συγκεκριμένη δομή μπορεί να εφαρμοστεί η αρχή της αποσύνθεσης (decomposition principle) και να επιλυθεί με καλύτερη απόδοση.
- Συχνά ο στόχος είναι να βρεθεί η βέλτιστη λύση, αλλά υπάρχουν περιπτώσεις, στις οποίες αναζητείται πώς οι παράμετροι του προβλήματος επηρεάζουν τη βέλτιστη λύση. Οπότε η ανάλυση ευαισθησίας είναι σημαντική.

Αναθεωρημένη μέθοδος simplex

- Η μέθοδος simplex απαιτεί τον υπολογισμό και την αποθήκευση στη μνήμη του συνολικού πίνακα (tableau) σε κάθε επανάληψη. Πολλές φορές το tableau είναι πολύ μεγάλος.
- Αρκετές από τις πληροφορίες του πίνακα δεν χρησιμοποιούνται και πολλές εγγραφές είναι μηδενικές.
- Η αναθεωρημένη μέθοδος simplex είναι μαθηματικά ισοδύναμη με την τυπική μέθοδο simplex, αλλά αλλάζει στην υλοποίηση.
- Αντί να διατηρεί το tableau που αντιπροσωπεύει τους περιορισμούς, προσαρμοσμένους στο σύνολο των βασικών μεταβλητών, διατηρεί την αναπαράσταση της *βάσης* του *πίνακα* που αναπαριστά τους περιορισμούς. Η αναθεωρημένη έκδοση υπολογίζει και αποθηκεύει μόνο τη σχετική πληροφορία που απαιτείται για τη βελτίωση της συγκεκριμένης λύσης. Μ’ αυτόν τον τρόπο είναι υπολογιστικά πιο αποδοτική.

Δυϊκότητα στο γραμμικό προγραμματισμό

- Η δυαδικότητα ή δυϊκότητα στα προβλήματα βελτιστοποίησης πρακτικά αφορά στο μετασχηματισμό των προβλημάτων σε διαφορετική μορφή, η οποία οδηγεί σε έμμεση επίλυση των προβλημάτων. Αρκετές φορές αυτή η μέθοδος είναι αποδοτικότερη.
- Το αρχικό πρόβλημα ονομάζεται πρωτότυπο ή πρωτεύων (primal) και το μετασχηματισμένο δυαδικό ή παράλληλο ή δυϊκό (dual).
- Το δυϊκό πρόβλημα αποτελεί μετασχηματισμό του πρωτεύοντος. Οι παράμετροι του δυϊκού προβλήματος είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange του πρωτεύοντος.

Δυϊκότητα στο γραμμικό προγραμματισμό

- Σε κάθε αρχικό ή πρωτεύον (primal) πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αντιστοιχεί ένα παράλληλο ή δυαδικό ή δυϊκό πρόβλημα (dual) και
- η βέλτιστη λύση του ενός δίνει πληροφόρηση για τη βέλτιστη λύση του άλλου.
- Κλασικές περιπτώσεις εφαρμογής δυϊκότητας:
- Όταν οι περιορισμοί του πρωτεύοντος είναι περισσότεροι από τις μεταβλητές απόφασης (m>n).
- Σε μερική ευελιξία των διαθέσιμων πόρων.
- Στην ανάλυση ευαισθησίας.

Δυϊκότητα στο γραμμικό προγραμματισμό

- Με άλλα λόγια, αντί να λύσουμε το πρωτεύον πρόβλημα μπορούμε να κατασκευάσουμε και να επιλύσουμε το ισοδύναμό του δυϊκό, αντλώντας ουσιαστικά τις ίδιες πληροφορίες καθώς πρόκειται για το ίδιο πρόβλημα.
- Η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη λύση του πρωτεύοντος με τέτοιον τρόπο, ώστε εάν προσδιορίσουμε τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος θα μπορούμε να ανακτήσουμε άμεσα και τη βέλτιστη λύση του δυϊκού.

Δυϊκότητα στο γραμμικό προγραμματισμό

- Η κατάστρωση του δυϊκού προβλήματος:
- είναι πολύ χρήσιμη για προβλήματα με πολλές μεταβλητές απόφασης και λίγους περιορισμούς, διότι το δυϊκό είναι απλούστερο να λυθεί γιατί έχει λίγες μεταβλητές απόφασης.
- έχει εφαρμογή στις αναλύσεις ευαισθησίας.
- έχει μια φυσική ερμηνεία όταν το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού προέρχεται από την περιοχή της οικονομίας ή εξετάζεται υπό το πρίσμα της θεωρίας παιγνίων.

Υπενθύμιση κανονικής μορφής προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

- Είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης.
- Όλοι οι περιορισμοί είναι ανισώσεις της μορφής $\leq$
- Όλες οι μεταβλητές είναι μη-αρνητικές.

- Όλα τα προβλήματα μπορούν να μετατραπούν στην κανονική μορφή. Ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη μεθοδολογία και βιβλιογραφία η κανονική μορφή διαφέρει ελάχιστα.

Πρόβλημα κανονικής μορφής

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

s.t.

$$\begin{array}{llllllll}
a_{11}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{1j}x_j + & \ldots & +a_{1n}x_n + & \ldots. & \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{2j}x_j + & \ldots & +a_{2n}x_n + & \ldots & \leq b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \leq \ldots \\
a_{m1}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{mj}x_j & \ldots & +a_{mn}x_n + & \ldots & \leq b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0,$$

c_j, b_i, a_{ij} (i=1,2,...,m, j=1,2,...,n)

Πρόβλημα κανονικής μορφής (μορφή πινάκων)

$$\pm \max \boldsymbol{c}' \cdot \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{s.t.}$$
$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} \le \mathbf{b}$$
$$\boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}$$

όπου:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n+m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n+m} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{3n+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{m,n+m} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ x_n \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_{n+m} \end{bmatrix}$$

Μετατροπή πρωτεύοντος σε δυϊκό πρόβλημα

Πρωτεύον πρόβλημα	**Δυαδικό πρόβλημα**
$\max Z_x = \underline{C}^T \cdot \underline{X}$	$\min Z_y = \underline{b} \cdot \underline{Y}$
s.t. $\underline{A} \cdot \underline{X} \leq \underline{b}$	s.t. $\underline{A}^T \cdot \underline{Y} \geq \underline{C}^T$
$\underline{X} \geq 0$	$\underline{Y} \geq 0$

όπου

$\underline{C}^T$ διάνυσμα μοναδιαίων αξιών διαστάσεων $1 \times n$

$\underline{X}$ διάνυσμα αρχικών μεταβλητών διαστάσεων $n \times 1$

$\underline{Y}$ διάνυσμα δυαδικών μεταβλητών διαστάσεων $1 \times m$

$\underline{A}$ μητρώο συντελεστών διαστάσεων $m \times n$

$\underline{b}$ διάνυσμα σταθερών στήλης διαστάσεων $m \times 1$.

Παράδειγμα μετατροπής πρωτεύοντος προβλήματος σε δυϊκό

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το δυϊκό του παρακάτω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

$$\max_{x_1, x_2, x_3} Z = 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{s.t.}\\
&8 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_3 \le 40\\
&3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \le 15\\
&11 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \le 18\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Λύση

Με βάση όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, το δυϊκό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού του παραπάνω πρωτεύοντος προβλήματος, μπορεί να διαμορφωθεί ως εξής:

$$\min_{w_1, w_2, w_3} U = 40 \cdot w_1 + 15 \cdot w_2 + 18 \cdot w_3$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{s.t.}\\
&8 \cdot w_1 + 3 \cdot w_2 + 11 \cdot w_3 \ge 6\\
&5 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + 8 \cdot w_3 \ge 3\\
&w_1 + 2 \cdot w_2 + 2 \cdot w_3 \ge 2\\
&w_1, w_2, w_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Δυϊκό πρόβλημα

$$\min_{w_1,\dots w_n} y = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_n w_n$$

s.t.

$$\begin{array}{lllllllll}
a_{11}w_1 + & \dots & \dots & +a_{j1}w_j + & \dots & +a_{m1}w_n + & \dots. & \geq c_1 \\
a_{12}w_1 + & \dots & \dots & +a_{j2}w_j + & \dots & +a_{m2}w_n + & \dots & \geq c_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \geq \dots \\
a_{1n}w_1 + & \dots & \dots & +w_{jm}x_j & \dots & +a_{mn}w_n + & \dots & \geq c_m
\end{array}$$

$$w_1, w_2, \dots, w_n \geq 0,$$

Παρατηρήσεις δυϊκού

1. μια δυϊκή μεταβλητή ορίζεται για καθέναν από τους m περιορισμούς του πρωτεύοντος προβλήματος,
2. ένας δυϊκός περιορισμός ορίζεται για καθεμία από τις n μεταβλητές του πρωτεύοντος προβλήματος,
3. οι συντελεστές των μεταβλητών ενός δυϊκού προβλήματος ισούνται με τους συντελεστές της συνδεόμενης μεταβλητής του πρωτεύοντος προβλήματος,
4. οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος ταυτίζονται με τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος προβλήματος.
5. Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζεται σχηματικά ο μετασχηματισμός του πρωτεύοντος σε δυϊκό καθώς και η σχέση που υπάρχει μεταξύ τους.

Μετατροπή πρωτεύοντος σε δυϊκό

Βήματα μετατροπής προβλήματος ΓΠ στο δυαδικό του είναι τα:

1. Αντικατάσταση των n αρχικών μεταβλητών απόφασης x_j από m δυαδικές μεταβλητές y_i
2. Αναστροφή μητρώου συντελεστών
3. Αντιμετάθεση των b_i και c_j
4. Αντιστροφή ανισοτικών συμβόλων
5. Αλλαγή στόχου βελτιστοποίησης της ΑΣ.

Μετατροπή πρωτεύοντος σε δυϊκό

Πίνακας 6-1 Σχέσεις πρωτεύοντος-δυαδικού προβλήματος

	Πρωτεύον πρόβλημα	Δυαδικό πρόβλημα
Μεταβλητή	x_j	y_i
Αριθμός μεταβλητών	N	m
Αριθμός περιορισμών	M	n
Συντελεστής ΑΣ	c_j	b_i
Μητρώο συντελεστών	$\underline{A}$	$\underline{A}^T$
Συντελεστές	a_{ij}	a_{ji}
Περιορισμοί	$\leq$	$\geq$
Στόχος ΑΣ	max	min

Με τον τρόπο αυτό, προβλήματα ΓΠ *πολλών μεταβλητών και λίγων περιορισμών* μετατρέπονται άμεσα σε προβλήματα *πολλών περιορισμών και λίγων μεταβλητών* και η επίλυσή τους καθίσταται ευκολότερη.

			Πρωτευον Προβλημα					
			Συντελεστές του				Δεξιό Τμήμα	
			x_1	x_2	…	x_n		
Δ ν Π ρ	Συντε-λεστές του	y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\leq b_1$	Συντε-λεστές ΑΣ (min)
		y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$\leq b_2$	
			.	.	.	.	.	
			.	.	.	.	.	
			.	.	.	.	.	
		y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\leq b_m$	
	Δεξιό τμήμα		$\geq c_1$	$\geq c_2$	…	$\geq c_n$		
			Συντελεστές ΑΣ (max)					

Παρατηρείται ότι:

- οι παράμετροι των περιορισμών του ενός προβλήματος αποτελούν τους συντελεστές των μεταβλητών του άλλου,
- οι συντελεστές της ΑΣ του ενός προβλήματος αποτελούν το δεξιό τμήμα των περιορισμών του άλλου.

Example 4.2 Write the dual of the following linear programming problem:

$$\text{Maximize } f = 50x_1 + 100x_2$$

subject to

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 1250 \\ 2x_1 + 5x_2 &\le 1000 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 900 \\ x_2 &\le 150 \end{aligned}\right\} n = 2,\ m = 4$$

where

$x_1 \ge 0 \quad$ and $\quad x_2 \ge 0$

SOLUTION Let y_1, y_2, y_3, and y_4 be the dual variables. Then the dual problem can be stated as

$$\text{Minimize } v = 1250y_1 + 1000y_2 + 900y_3 + 150y_4$$

subject to

$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 50$$

$$y_1 + 5y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 100$$

$$\text{where } y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0,\ \ y_3 \geq 0,\ \text{ and } y_4 \geq 0.$$

Notice that the dual problem has a lesser number of constraints compared to the primal problem in this case. Since, in general, an additional constraint requires more computational effort than an additional variable in a linear programming problem, it is evident that it is computationally more efficient to solve the dual problem in the present case. This is one of the advantages of the dual problem.

Ορισμοί

Ορισμός:

- Ένας περιορισμός ενός ΠΓΠ χαρακτηρίζεται ως δεσμευτικός-αποτελεσματικός αν και μόνο αν η βέλτιστη λύση τον καθιστά ισότητα. Στην αντίθετη περίπτωση, καλείται χαλαρός.

Έστω x^* η βέλτιστη λύση ενός ΠΓΠ και w^* του δυϊκού του. Το συγκεκριμένο αποτελεί συνέπεια του θεωρήματος karush-Kuhn-Tucker και των συνθηκών βελτιστοποίησης οι οποιες εφαρμόζονται σε κυρτά QP προβλήματα (Kuhn and Tucker, 1951). Επίσης, ισχύουν τα εξής:

- οι μεταβλητές του ενός ΠΓΠ που αντιστοιχούν σε χαλαρούς περιορισμούς του άλλου, είναι μη-βασικές μεταβλητές στην βέλτιστη λύση.
- οι μεταβλητές του ενός ΠΓΠ που αντιστοιχούν σε αποτελεσματικούς περιορισμούς του άλλου είναι βασικές μεταβλητές στην βέλτιστη λύση.
- εάν σε κάποιο δεσμευτικό περιορισμό του πρωτεύοντος αντιστοιχεί δυϊκή μεταβλητή με τιμή μηδέν στην βέλτιστη λύση του δυϊκού, τότε το πρωτεύον ΠΓΠ έχει άπειρες λύσεις.

Θεωρήματα

Θεώρημα 1: *Το δυαδικό του δυαδικού προβλήματος ταυτίζεται με το πρωτεύον πρόβλημα.*

Η σχέση μεταξύ πρωτεύοντος και δυαδικού προβλήματος είναι πλήρως συμμετρική. Επιπλέον μπορεί να θεωρηθεί ως πρωτεύον και πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμούς της μορφής "≥".

Θεώρημα 2: *(α) Εάν είτε το πρωτεύον είτε το δυαδικό πρόβλημα έχει πεπερασμένη βέλτιστη δυνατή λύση, τότε και το άλλο έχει πεπερασμένη βέλτιστη δυνατή λύση και η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης των δυο προβλημάτων είναι η ίδια, δηλαδή:*

$$\max Z_x = \min Z_y \text{ ή}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i^* \qquad (6\text{-}11)$$

(β) Εάν ένα από τα δυο προβλήματα έχει μη πεπερασμένη λύση τότε το άλλο δεν έχει δυνατή λύση.

Θεωρήματα

Θεώρημα 3: *Η βέλτιστη τιμή της δυαδικής μεταβλητής* y_i^* *ισούται με την αρνητική (θετική στην περίπτωση που το πρωτεύον είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμούς ≥) τιμή του καθαρού οριακού εισοδήματος της i μεταβλητής απόκλισης του πρωτεύοντος προβλήματος (§5.4.8).*

Οι μεταβλητές y_i για οποιαδήποτε βασική δυνατή λύση του πρωτεύοντος ονομάζονται *πολλαπλασιαστές simplex* και αντιστοιχούν στη λύση αυτή, ενώ μπορούν να λάβουν και αρνητικές τιμές. Τα y_i^* αντιστοιχούν στη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος. Για κάθε βασική δυνατή λύση ισχύει:

$$Y^T = c_B \cdot B^{-1} \text{ ή } (y_1, y_2, \ldots, y_m) = c_B \cdot B^{-1} \qquad (6\text{-}12)$$

Θεώρημα 4: *Η βέλτιστη τιμή της j μεταβλητής απόκλισης του δυαδικού προβλήματος ισούται με την αρνητική (θετική στην περίπτωση που το πρωτεύον είναι πρόβλημα ελαχιστοποιήσεως με περιορισμούς ≥) τιμή του καθαρού οριακού εισοδήματος της j αρχικής μεταβλητής του πρωτεύοντος.*

Θεωρήματα

Πίνακας 6-3 Συσχέτιση μεταβλητών πρωτεύοντος-δυαδικού προβλήματος

Πρωτεύουσα μεταβλητή	Συσχετιζόμενη δυαδική μεταβλητή
x_j (αρχική μεταβλητή)	$(z_j - c_j)$ (surplus μεταβλητή), $j = 1,2,\ldots,n$
x_{n+i} (μεταβλητή απόκλισης)	y_i (αρχική μεταβλητή), $i = 1,2,\ldots,m$

Θεώρημα 5: *Εάν* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *είναι μια δυνατή λύση του πρωτεύοντος και* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *είναι μια δυνατή λύση του δυαδικού, τότε* $Z_x < Z_y$.

Θεώρημα 6: *Εάν το πρωτεύον και το δυαδικό πρόβλημα έχουν πεπερασμένες δυνατές λύσεις και* $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ *είναι μια βασική δυνατή μη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος με αντίστοιχα οριακά καθαρά εισοδήματα* $c_j - z_j$, *τότε η* $(z_1 - c_1, z_2 - c_2, \ldots, z_n - c_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *αποτελεί βασική μη δυνατή λύση του δυαδικού για την οποία* $Z_x = Z_y$.

Theorem 4.1 The dual of the dual is the primal.

Theorem 4.2 Any feasible solution of the primal gives an f value greater than or at least equal to the v value obtained by any feasible solution of the dual.

Theorem 4.3 If both primal and dual problems have feasible solutions, both have optimal solutions and minimum f = maximum v.

Theorem 4.4 If either the primal or the dual problem has an unbounded solution, the other problem is infeasible.

Σχέση πρωτεύοντος - δυϊκού

- Στο πρωτεύον πρόβλημα κανονικής μορφής κάθε ισότητα της μορφής: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , \; i = 1,2,\ldots,m$
- Είναι ισοδύναμη με δύο ανισότητες: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$$

- που αντιστοιχούν σε δύο μεταβλητές του δυϊκού προβλήματος.
- Στο δυϊκό πρόβλημα ο συντελεστής της αντικειμενικής συνάρτησης και οι τεχνολογικοί συντελεστές της μεταβλητής y\` είναι οι ίδιοι με τους αντίστοιχους της μεταβλητής y, αλλά με αντίθετο πρόσημο. Άρα μπορεί να αντικατασταθούν οι y και y\` με μια μεταβλητή y\`\` που λαμβάνει θετικές και αρνητικές τιμές.

- Πόρισμα: εάν ο i περιορισμός του πρωτεύοντος είναι ισότητα, η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή y δεν έχει περιορισμό ως προς το πρόσημο.

Οι ισότητες του πρωτεύοντος προβλήματος δεν επηρεάζουν τις ανισότητες του δυαδικού, αλλά μόνο το πρόσημο των δυαδικών μεταβλητών. Άρα το πρόβλημα ΓΠ

$$\begin{aligned} &\max Z_x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ &\text{s.t. } a_{i1}x_1 + a_{i1}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad \text{για} \quad i = 1,2,\ldots,m \\ &\qquad x_j \geq 0 \quad \text{για κάθε} \quad j = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{6-23}$$

έχει δυαδικό το

$$\begin{aligned} &\min Z_y = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \\ &\text{s.t. } a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \geq c_j \quad \text{για} \quad j = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{6-24}$$

χωρίς περιορισμό ως προς το πρόσημο των y_i.

Αντιστρόφως, εάν η δυαδική μεταβλητή y_i δεν έχει περιορισμό ως προς το πρόσημο, ο αντίστοιχος περιορισμός i του πρωτεύοντος είναι ισότητα. Εναλλάσσοντας το πρωτεύον και το δυαδικό πρόβλημα, σύμφωνα με το θεώρημα 1, προκύπτει η μοναδική περίπτωση εισαγωγής ισότητας σε δυαδικό πρόβλημα (Ξηρόκωστας 1980):

- Πόρισμα: εάν ο i περιορισμός του πρωτεύοντος είναι ισότητα, η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή y δεν έχει περιορισμό ως προς το πρόσημο.
- Πρόταση 1: εάν η μεταβλητή x_j του πρωτεύοντος προβλήματος δεν έχει περιορισμό ως προς το πρόσημο τότε ο j περιορισμός του δυϊκού είναι ισότητα.

Σχέση primal-dual

Table 4.11 Correspondence Rules for Primal–Dual Relations

Primal quantity	Corresponding dual quantity
Objective function: Minimize $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$	Maximize $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$
Variable $x_i \geq 0$	ith constraint $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_i \leq c_i$ (inequality)
Variable x_i unrestricted in sign	ith constraint $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_i = c_i$ (equality)
jth constraint, $\mathbf{A}_j\mathbf{X} = b_j$ (equality)	jth variable y_j unrestricted in sign
jth constraint, $\mathbf{A}_j\mathbf{X} \geq b_j$ (inequality)	jth variable $y_j \geq 0$
Coefficient matrix $\mathbf{A} \equiv [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_m]$	Coefficient matrix $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \equiv [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m]^{\mathrm{T}}$
Right-hand-side vector $\mathbf{b}$	Right-hand-side vector $\mathbf{c}$
Cost coefficients $\mathbf{c}$	Cost coefficients $\mathbf{b}$

Δυϊκή μέθοδος simplex

- Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες αναζητείται η λύση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού για διάφορες περιπτώσεις πινάκων b^i (δεξιό μέρος των εξισώσεων).
- Αντίστοιχα μπορεί να μας ενδιαφέρει να προσθέσουμε επιπλέον περιορισμούς σε πρόβλημα που ήδη γνωρίζουμε τη βέλτιστη λύση.
- Σε τέτοιες περιπτώσεις έχουμε μια μη εφικτή βασική λύση του πρωτεύοντος (primal), της οποίας η αντίστοιχη δυϊκή (dual) λύση είναι εφικτή.

Δυϊκή μέθοδος simplex

- Έχουν προταθεί διάφορες παραλλαγές της simplex, ώστε να επιλυθεί πρόβλημα που ξεκινάει από μη εφικτή λύση στο πρωτεύον.
- Οι πιο δημοφιλείς είναι η δυϊκή μέθοδος simplex του Lemke και η primal-dual μέθοδος των Dantzig, Ford και Fulkerson. Αυτές έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:
- Δεν απαιτούν την 1η φάση της μεθόδου simplex. Αυτό είναι επιθυμητό, αφού η 1η φάση μπορεί να απέχει αρκετά από τη βέλτιστη.
- Λειτουργούν επιδιώκοντας συγχρόνως εφικτότητα (ικανοποίηση των περιορισμών) και βελτιστοποίηση, οπότε αναμένονται λιγότερες επαναλήψεις έως την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

Προβλήματα μεταφορών

- Τα προβλήματα μεταφορών είναι μια ιδιαίτερη κατηγορία των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.
- Το αντικείμενο αυτών των προβλημάτων είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς συγκεκριμένων αγαθών από κάποια σημεία σε κάποια άλλα.
- Τέτοια προβλήματα μπορούν να επιλυθούν με τη μέθοδο simplex, όμως η ειδική δομή τους επιτρέπει την εφαρμογή ιδιαίτερης διαδικασίας με καλύτερη απόδοση.

Προβλήματα μεταφορών

- Έστω ότι υπάρχουν
- m τοποθεσίες $R_1, R_2, \ldots, R_m$ (π.χ. αποθήκες) και
- n προορισμοί $D_1, D_2, \ldots, D_m$ (π.χ. εργοστάσια).
- Έστω
- α_i η ποσότητα από ένα αγαθό που βρίσκεται στην τοποθεσία i ($i = 1, 2, \ldots, m$) και
- b_j η ποσότητα που απαιτείται να μεταφερθεί στον προορισμό j ($j = 1, 2, \ldots, n$).
- Ο στόχος είναι ο καθορισμός της ποσότητας του αγαθού x_{ij} που πρέπει να μεταφερθεί από την τοποθεσία i στον προορισμό j, ώστε το συνολικό κόστος μεταφοράς να ελαχιστοποιηθεί.

Προβλήματα μεταφορών

$$\text{Minimize } f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}$$

Θεωρείται ότι η ζήτηση των αγαθών ισούται με τις ποσότητες που διατίθενται

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

subject to

Το άθροισμα των ποσοτήτων των αγαθών που θα μεταφερθούν από την τοποθεσία i στις τοποθεσίες j θα είναι ίσο με τη διαθέσιμη ποσότητα στο i

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Το άθροισμα των ποσοτήτων των αγαθών που θα φτάσουν στον προορισμό j από όλες τις τοποθεσίες θα είναι ίσο με την ποσότητα που χρειάζεται στο j

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Clearly, this is a LP problem in mn variables and $m + n$ equality constraints.

Το πρόβλημα περιγράφηκε και επιλύθηκε το 1941 από τον Hitchcock και έπειτα το 1947 από τον Koopmans, γι’ αυτό συχνά ονομάζεται ως το πρόβλημα μεταφοράς των Hitchcock-Koopmans

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} && && = a_1 \\
& && x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} && = a_2 \\
& && \vdots && \vdots \\
& && x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} && = a_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
x_{11} & + x_{21} & & + x_{m1} & = b_1 \\
x_{12} & & + x_{22} & + x_{m2} & = b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
x_{1n} & + x_{2n} & & + x_{mn} & = b_n
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots \\
+ c_{m1}x_{m1} + \cdots + c_{mn}x_{mn} = f
\end{aligned}
$$

1. All the nonzero coefficients of the constraints are equal to 1.
2. The constraint coefficients appear in a triangular form.
3. Any variable appears only once in the first m equations and once in the next n equations.

Επίλυση του προβλήματος μεταφοράς

- Η επίλυση του προβλήματος μεταφοράς μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα χειροκίνητα αφού απαιτούνται μόνο προσθαφαιρέσεις.
- Βήμα 1ο: Καθορισμός βασικής εφικτής λύσης.
- Βήμα 2ο: Έλεγχος της λύσης αν είναι βέλτιστη. Αν δεν είναι τότε συνεχίζει η διαδικασία στο επόμενο βήμα.
- Βήμα 3ο: επιλογή μεταβλητής για εισαγωγή στη βάση μεταξύ των μη βασικών μεταβλητών. Επιλογή μεταβλητής για εξαγωγή από τη βάση, χρησιμοποιώντας τη συνθήκη εφικτότητας. Εύρεση νέας εφικτής λύσης και επιστροφή στο βήμα 2.

Πίνακας προβλήματος μεταφοράς

To / From		Destination j: 1	2	3	…	n	Amount available a_i
Origin i	1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	…	x_{1n} c_{1n}	a_1
	2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	x_{23} c_{23}	…	x_{2n} c_{2n}	a_2
	3	x_{31} c_{31}	x_{32} c_{32}	x_{33} c_{33}	…	x_{3n} c_{3n}	a_3
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	x_{m3} c_{m3}	…	x_{mn} c_{mn}	a_m
Amount required b_j		b_1	b_2	b_3	…	b_n	

Μέθοδος Karmarkar (1984)

- Η μέθοδος Karmarkar προτάθηκε για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού μεγάλης κλίμακας.
- Είναι γνωστή και ως μέθοδος εσωτερικού σημείου, διότι βελτιώνει την κατεύθυνση αναζήτησης από το εσωτερικό του συνόλου εφικτών λύσεων.
- Είναι σε αντίθεση με τη μέθοδο simplex, η οποία αναζητά λύσεις στο όριο του συνόλου εφικτών λύσεων, προχωρώντας από τη μία εφικτή κορυφή στην επόμενη έως ότου βρεθεί η βέλτιστη. Σε δύσκολα προβλήματα οι κορυφές μπορεί να είναι πάρα πολλές και η εύρεση της βέλτιστης να απαιτεί σημαντικούς υπολογιστικούς πόρους.
- Η μέθοδος Karmarkar έχει αναφερθεί ότι είναι έως και 50 φορές πιο αποδοτική από τη μέθοδο simplex και έχει χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων με 150.000 μεταβλητές απόφασης και 12.000 περιορισμούς.

Μέθοδος Karmarkar

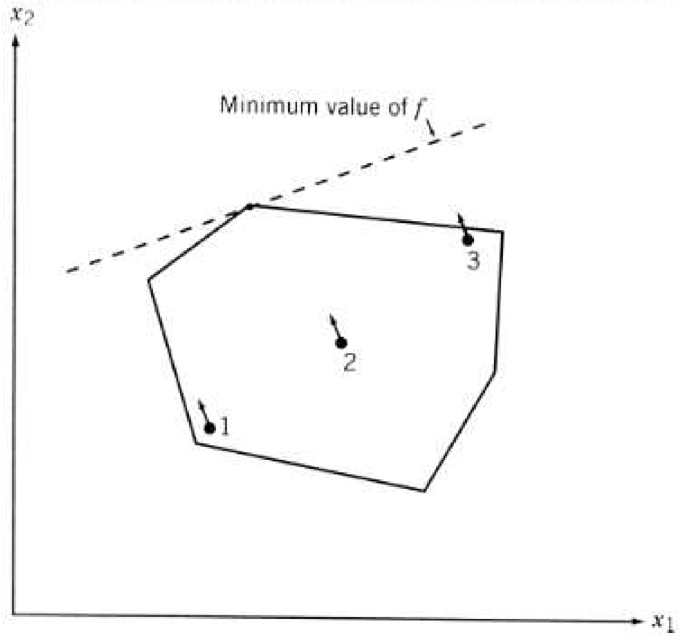

Figure 4.3 Improvement of objective function from different points of a polytope.

Karmarkar's method is based on the following two observations:

1. If the current solution is near the center of the polytope, we can move along the steepest descent direction to reduce the value of f by a maximum amount. From Fig. 4.3, we can see that the current solution can be improved substantially by moving along the steepest descent direction if it is near the center (point 2) but not near the boundary point (points 1 and 3).
2. The solution space can always be transformed without changing the nature of the problem so that the current solution lies near the center of the polytope.

It is well known that in many numerical problems, by changing the units of data or rescaling (e.g., using feet instead of inches), we may be able to reduce the numerical instability. In a similar manner, Karmarkar observed that the variables can be transformed (in a more general manner than ordinary rescaling) so that straight lines remain straight lines while angles and distances change for the feasible space.

Μέθοδος Karmarkar

- Η μέθοδος Karmarkar απαιτεί το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού να είναι στην εξής μορφή:

$$\text{Minimize } f = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$$

subject to

$$[a]\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

where $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}^{\mathrm{T}}$, and $[a]$ is an $m \times n$ matrix. In addition, an interior feasible starting solution to Eqs. (4.59) must be known. Usually,

$$\mathbf{X} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots \frac{1}{n}\right\}^{\mathrm{T}}$$

is chosen as the starting point. In addition, the optimum value of f must be zero for the problem. Thus

$$\mathbf{X}^{(1)} = \left\{\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n}\right\}^{\mathrm{T}} = \text{interior feasible} \tag{4.60}$$

$$f_{\min} = 0$$

Regional Planning

The SOUTHERN CONFEDERATION OF KIBBUTZIM is a group of three kibbutzim (communal farming communities) in Israel. Overall planning for this group is done in its Coordinating Technical Office. This office currently is planning agricultural production for the coming year.

The agricultural output of each kibbutz is limited by both the amount of available irrigable land and the quantity of water allocated for irrigation by the Water Commissioner (a national government official). These data are given in Table 3.8.

The crops suited for this region include sugar beets, cotton, and sorghum, and these are the three being considered for the upcoming season. These crops differ primarily in their expected net return per acre and their consumption of water. In addition, the Ministry of Agriculture has set a maximum quota for the total acreage that can be devoted to each of these crops by the Southern Confederation of Kibbutzim, as shown in Table 3.9.

TABLE 3.9 Crop data for the Southern Confederation of Kibbutzim

Crop	Maximum Quota (Acres)	Water Consumption (Acre Feet/Acre)	Net Return ($/Acre)
Sugar beets	600	3	1,000
Cotton	500	2	750
Sorghum	325	1	250

Because of the limited water available for irrigation, the Southern Confederation of Kibbutzim will not be able to use all its irrigable land for planting crops in the upcoming season. To ensure equity between the three kibbutzim, it has been agreed that every kibbutz will plant the same proportion of its available irrigable land. For example, if kibbutz 1 plants 200 of its available 400 acres, then kibbutz 2 must plant 300 of its 600 acres, while kibbutz 3 plants 150 acres of its 300 acres. However, any combination of the crops may be grown at any of the kibbutzim. The job facing the Coordinating Technical Office is to plan how many acres to devote to each crop at the respective kibbutzim while satisfying the given restrictions. The objective is to maximize the total net return to the Southern Confederation of Kibbutzim as a whole.

TABLE 3.8 Resource data for the Southern Confederation of Kibbutzim

Kibbutz	Usable Land (Acres)	Water Allocation (Acre Feet)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

This problem is another example (like the Wyndor problem) of a *resource-allocation problem*. The first three categories of constraints all are *resource constraints*. The fourth category then adds some side constraints.

Controlling Air Pollution

The NORI & LEETS CO., one of the major producers of steel in its part of the world, is located in the city of Steeltown and is the only large employer there. Steeltown has grown and prospered along with the company, which now employs nearly 50,000 residents. Therefore, the attitude of the townspeople always has been, What's good for Nori & Leets is good for the town. However, this attitude is now changing; uncontrolled air pollution from the company's furnaces is ruining the appearance of the city and endangering the health of its residents.

A recent stockholders' revolt resulted in the election of a new enlightened board of directors for the company. These directors are determined to follow socially responsible policies, and they have been discussing with Steeltown city officials and citizens' groups what to do about the air pollution problem. Together they have worked out stringent air quality standards for the Steeltown airshed.

The three main types of pollutants in this airshed are particulate matter, sulfur oxides, and hydrocarbons. The new standards require that the company reduce its annual emission of these pollutants by the amounts shown in Table 3.12. The board of directors has instructed management to have the engineering staff determine how to achieve these reductions in the most economical way.

The steelworks has two primary sources of pollution, namely, the blast furnaces for making pig iron and the open-hearth furnaces for changing iron into steel. In both cases the engineers have decided that the most effective types of abatement methods are (1) increasing the height of the smokestacks,[6] (2) using filter devices (including gas traps) in the smokestacks, and (3) including cleaner, high-grade materials among the fuels for the furnaces. Each of these methods has a technological limit on how heavily it can be used (e.g., a maximum feasible increase in the height of the smokestacks), but there also is considerable flexibility for using the method at a fraction of its technological limit.

Table 3.13 shows how much emission (in millions of pounds per year) can be eliminated from each type of furnace by fully using any abatement method to its technological limit. For purposes of analysis, it is assumed that each method also can be used less fully to achieve any fraction of the emission-rate reductions shown in this table. Furthermore, the fractions can be different for blast furnaces and for open-hearth furnaces. For either type of furnace, the emission reduction achieved by each method is not substantially affected by whether the other methods also are used.

After these data were developed, it became clear that no single method by itself could achieve all the required reductions. On the other hand, combining all three methods at full capacity on both types of furnaces (which would be prohibitively expensive if the company's products are to remain competitively priced) is much more than adequate. Therefore, the engineers concluded that they would have to use some combination of the methods, perhaps with fractional capacities, based upon the relative costs. Furthermore, because of the differences between the blast and the open-hearth furnaces, the two types probably should not use the same combination.

An analysis was conducted to estimate the total annual cost that would be incurred by each abatement method. A method's annual cost includes increased operating and maintenance expenses as well as reduced revenue due to any loss in the efficiency of the production process caused by using the method. The other major cost is the *start-up cost* (the initial capital outlay) required to install the method. To make this one-time cost commensurable with the ongoing annual costs, the time value of money was used to calculate the annual expenditure (over the expected life of the method) that would be equivalent in value to this start-up cost.

This analysis led to the total annual cost estimates (in millions of dollars) given in Table 3.14 for using the methods at their full abatement capacities. It also was determined that the cost of a method being used at a lower level is roughly proportional to the fraction of the abatement capacity given in Table 3.13 that is achieved. Thus, for any given fraction achieved, the total annual cost would be roughly that fraction of the corresponding quantity in Table 3.14.

The stage now was set to develop the general framework of the company's plan for pollution abatement. This plan specifies which types of abatement methods will be used and at what fractions of their abatement capacities for (1) the blast furnaces and (2) the open-hearth furnaces. Because of the combinatorial nature of the problem of finding a plan that satisfies the requirements with the smallest possible cost, an OR team was formed to solve the problem. The team adopted a linear programming approach, formulating the model summarized next.

TABLE 3.12 Clean air standards for the Nori & Leets Co.

Pollutant	Required Reduction in Annual Emission Rate (Million Pounds)
Particulates	60
Sulfur oxides	150
Hydrocarbons	125

TABLE 3.13 Reduction in emission rate (in millions of pounds per year) from the maximum feasible use of an abatement method for Nori & Leets Co.

	Taller Smokestacks		Filters		Better Fuels	
Pollutant	**Blast Furnaces**	**Open-Hearth Furnaces**	**Blast Furnaces**	**Open-Hearth Furnaces**	**Blast Furnaces**	**Open-Hearth Furnaces**
Particulates	12	9	25	20	17	13
Sulfur oxides	35	42	18	31	56	49
Hydrocarbons	37	53	28	24	29	20

TABLE 3.14 Total annual cost from the maximum feasible use of an abatement method for Nori & Leets Co. ($ millions)

Abatement Method	Blast Furnaces	Open-Hearth Furnaces
Taller smokestacks	8	10
Filters	7	6
Better fuels	11	9