Θεωρία Βελτιστοποίησης

Βασίλειος Μαχαιράς
Πολιτικός Μηχανικός Ph.D.

Γραμμικός προγραμματισμός: μέθοδος simplex

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής

Διάλεξη 4η/2017

Η γεωμετρία των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

- Τα προβλήματα με μόλις 2 μεταβλητές παρουσιάζουν μια απλή περίπτωση, στην οποία η λύση μπορεί να βρεθεί με γραφικές μεθόδους. Η οπτικοποίηση τέτοιων προβλημάτων παρέχει τη φυσική εικόνα από συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού:
- η εφικτή περιοχή είναι κυρτό πολύγωνο,
- η βέλτιστη λύση αν υπάρχει είναι σε μια κορυφή της εφικτής περιοχής.

Γραμμικός προγραμματισμός

- Τι κάναμε στην $3^{η}$ διάλεξη (γεωμετρική επίλυση γραμμικού προγραμματισμού):
- Ορίσαμε τις μεταβλητές σχεδιασμού.
- Ορίσαμε την αντικειμενική συνάρτηση.
- Ορίσαμε τους περιορισμούς.
- Σχεδιάσαμε σε σύστημα αξόνων τις γραμμές των περιορισμών.
- Συνδυάσαμε τις εξισώσεις των περιορισμών για να υπολογίσουμε τα σημεία τομής στην περίμετρο (σύνορο) του συνόλου εφικτών λύσεων.
- Υπολογίσαμε τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για να βρούμε τη βέλτιστη λύση.

Example 3.2 A manufacturing firm produces two machine parts using lathes, milling machines, and grinding machines. The different machining times required for each part, the machining times available on different machines, and the profit on each machine part are given in the following table.

Type of machine	Machining time required (min)		Maximum time available per week (min)
	Machine part I	Machine part II	
Lathes	10	5	2500
Milling machines	4	10	2000
Grinding machines	1	1.5	450
Profit per unit	\$50	\$100	

Determine the number of parts I and II to be manufactured per week to maximize the profit.

- Έστω x και y ο αριθμός των παραγόμενων προϊόντων I και II αντίστοιχα. Αυτές είναι μεταβλητές σχεδιασμού ή απόφασης.
- Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το εβδομαδιαίο κέρδος το οποίο ισούται με: $\$50 \cdot x + \$100 \cdot y$
- Αυτή είναι η αντικειμενική συνάρτηση:
- maximize $f(x,y) = 50 \cdot x + 100 \cdot y$
- Περιορισμοί:

$$10x + 5y \leq 2500 \qquad (E_1)$$

$$4x + 10y \leq 2000 \qquad (E_2)$$

$$x + 1.5y \leq 450 \qquad (E_3)$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (E_4)$$

The optimum solution corresponds to a value of $x^* = 187.5$, $y^* = 125.0$ and a profit of \$21,875.00.

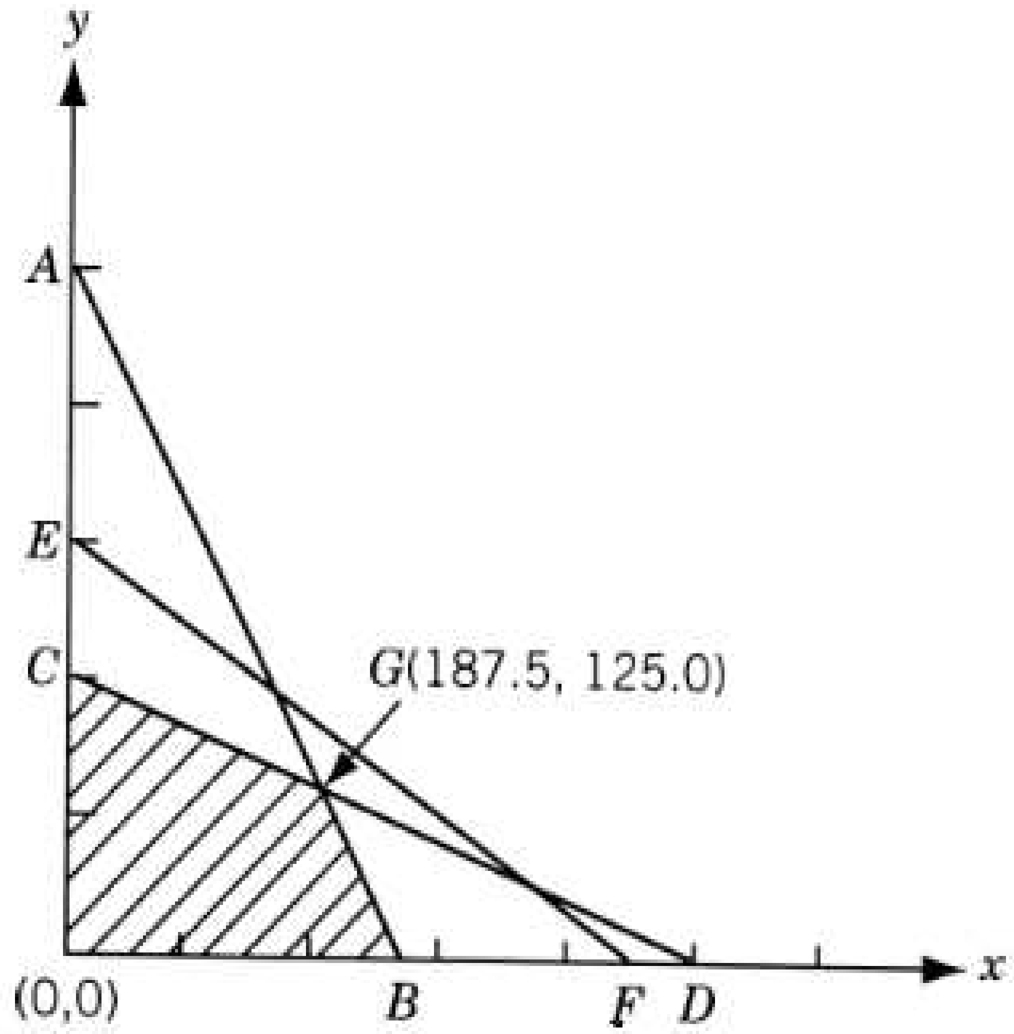


Figure 3.3 Feasible region given by Eqs. (E_1) to (E_4).

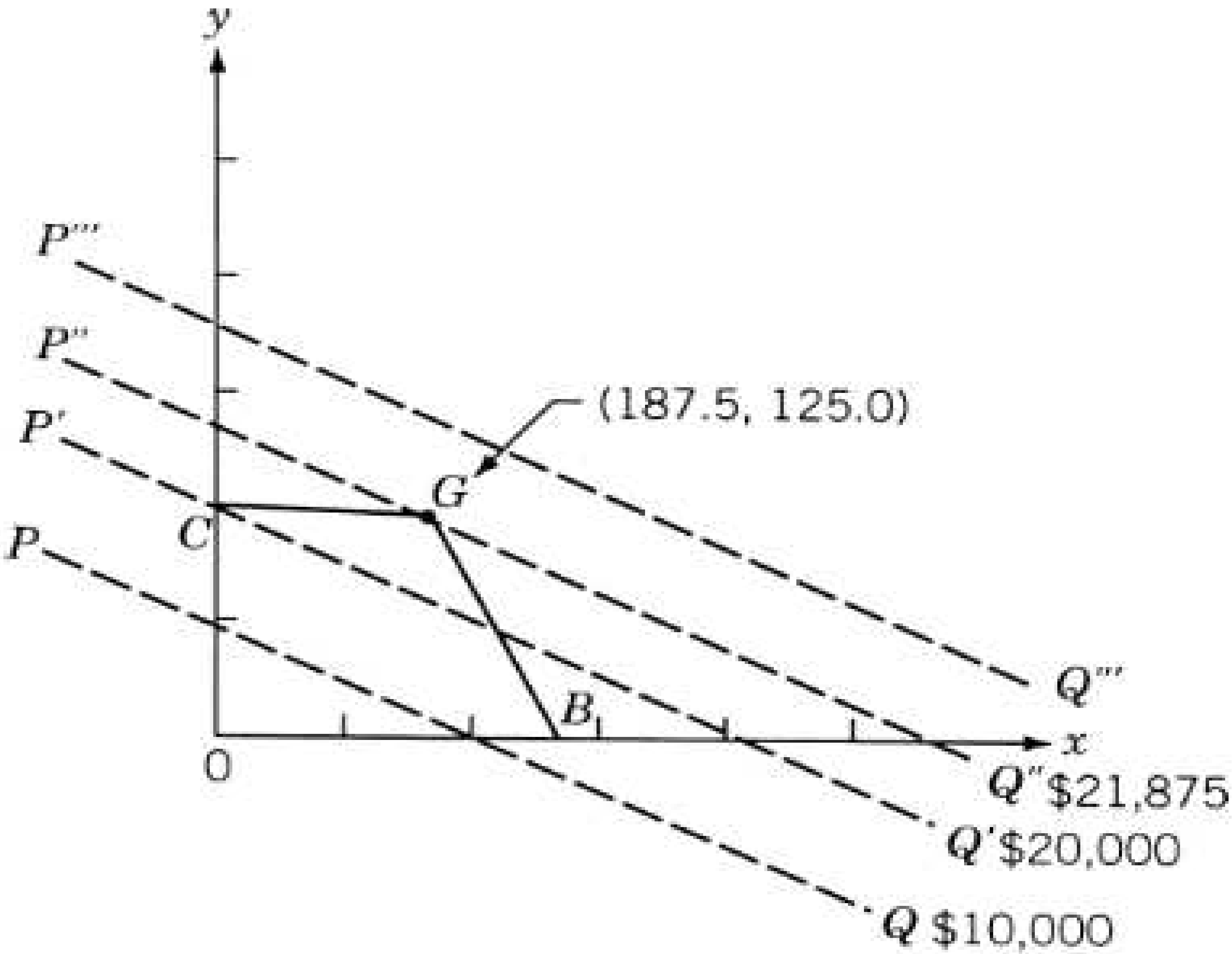


Figure 3.4 Contours of objective function.

In some cases, the optimum solution may not be unique. For example, if the profit rates for the machine parts I and II are \$40 and \$100 instead of \$50 and \$100, respectively, the contours of the profit function will be parallel to side CG of the feasible region as shown in Fig. 3.5. In this case, line $P''Q''$, which coincides with the boundary line CG, will correspond to the maximum (feasible) profit. Thus there is no unique optimal solution to the problem and any point between C and G on line $P''Q''$

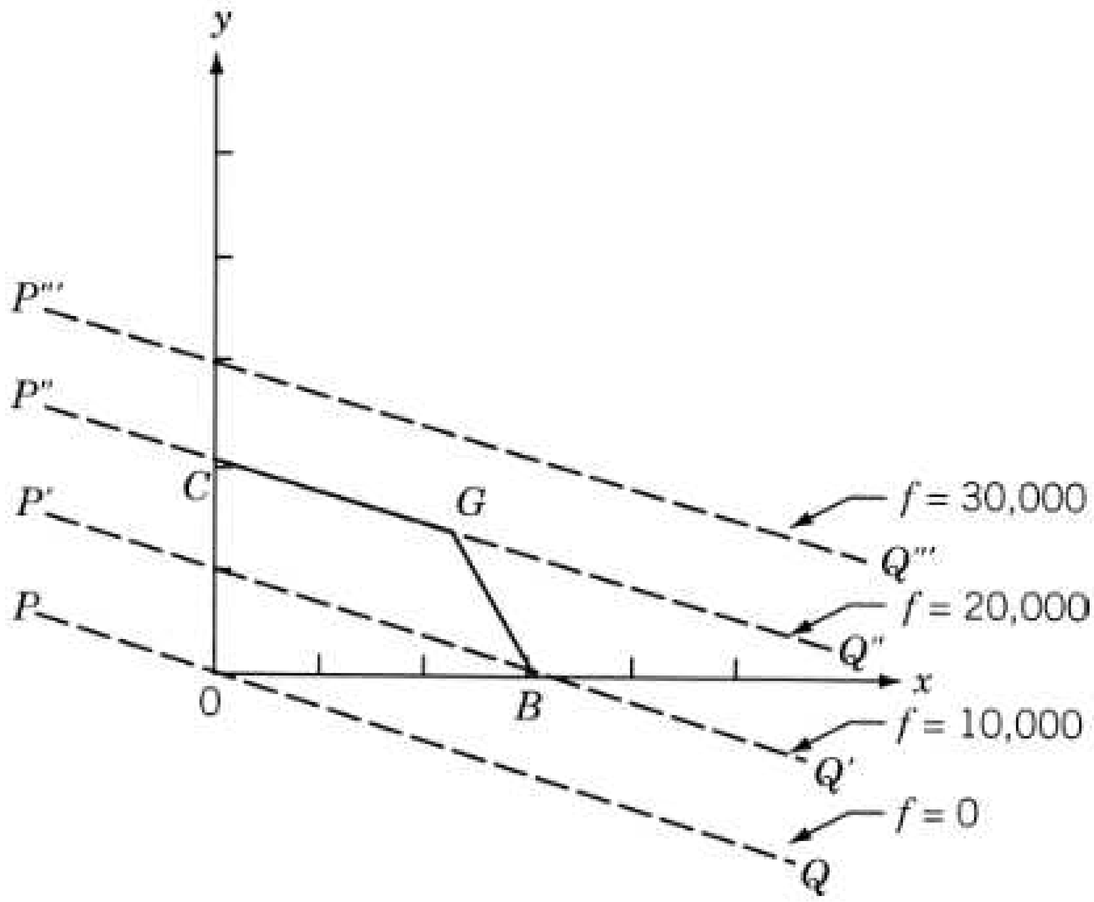


Figure 3.5 Infinite solutions.

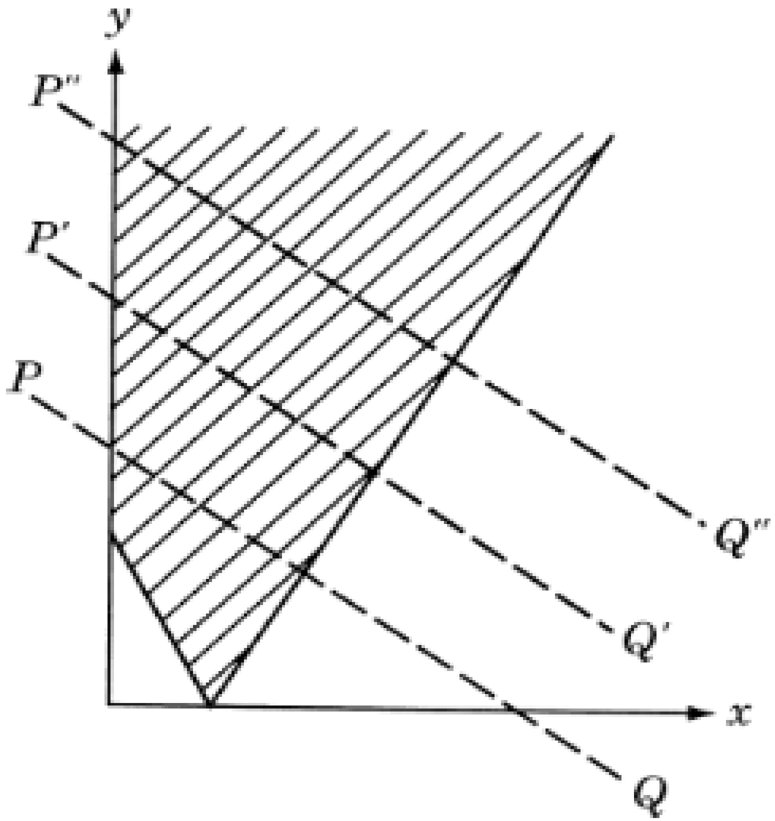


Figure 3.6 Unbounded solution.

Thus a linear programming problem may have (1) a unique and finite optimum solution, (2) an infinite number of optimal solutions, (3) an unbounded solution, (4) no solution, or (5) a unique feasible point. Assuming that the linear programming problem is properly formulated, the following general geometrical characteristics can be noted from the graphical solution:

1. The feasible region is a convex polygon.†
2. The optimum value occurs at an extreme point or vertex of the feasible region.

Μέθοδος simplex

- Εφαρμόζεται σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.

- Ερώτηση: Τι είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού?
- Απάντηση:
- Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχει αντικειμενική συνάρτηση της μορφής: $f=\alpha x+\beta y+\gamma y+\ldots$
- π.χ. $f=3x-2y+z$
- υπό τους *γραμμικούς περιορισμούς* της μορφής:
- $Ax+By+\Gamma z+\ldots\leq$ (ή $\geq$) N (π.χ. $x+y-3z \leq 12$)
- Η ελάχιστη (ή μέγιστη) τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης f ονομάζεται βέλτιστη τιμή και ο συνδυασμός των x, y, z, … που δίνει τη βέλτιστη τιμή ονομάζεται βέλτιστη λύση. Οι μεταβλητές x, y, z… ονομάζονται μεταβλητές απόφασης ή σχεδιασμού.

Κανονική μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

Scalar Form

Ανάλογα με τη βιβλιογραφία μπορεί να είναι maximization

$$\text{Minimize } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{3.1a}$$

subject to the constraints

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.2a}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ &\vdots \\ x_n &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.3a}$$

where c_j, b_j, and $a_{ij}(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ are known constants, and x_j are the decision variables.

Κανονική μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (σε μορφή πινάκων)

Matrix Form

$$\text{Minimize } f(\mathbf{X}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \tag{3.1b}$$

subject to the constraints

$$\mathbf{aX} = \mathbf{b} \tag{3.2b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \tag{3.3b}$$

where

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Κανονική μορφή

- Τα χαρακτηριστικά ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο περιγράφεται στην ***κανονική μορφή*** (standard form) είναι:
- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι προς ελαχιστοποίηση ή προς μεγιστοποίηση (ανάλογα με τη βιβλιογραφία),
- Όλες οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι μη αρνητικές,
- Όλοι οι περιορισμοί είναι τύπου ισότητας.

Όλα τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού μπορούν να μετασχηματιστούν στην ***κανονική μορφή*** χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που περιγράφονται παρακάτω.

Μετασχηματισμός σε τυπική μορφή

- «Η αντικειμενική συνάρτηση είναι προς ελαχιστοποίηση.»

- Οποιοδήποτε πρόβλημα μεγιστοποίησης μπορεί να μετασχηματιστεί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης της ίδιας συνάρτησης προσθέτοντας αρνητικό πρόσημο σ’ αυτή. Για παράδειγμα η συνάρτηση:

  $$\text{minimize } f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

  είναι ισοδύναμη με τη:

  $$\text{maximize } f' = -f = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$$

Παράδειγμα

- Μετατρέψτε την αντικειμενική συνάρτηση *ελαχιστοποίησης:* minimizef=-12x-15y-5z
- σε συνάρτηση που απαιτεί μεγιστοποίηση.
- Λύση: maximizef=12x+15y+5z

Μετασχηματισμός σε τυπική μορφή

- «Όλες οι μεταβλητές σχεδιασμού (ή απόφασης) είναι μη αρνητικές.»

- Σε πολλά τεχνικά προβλήματα οι μεταβλητές σχεδιασμού αφορούν σε φυσικές διαστάσεις, οπότε οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές. Όταν όμως οι μεταβλητές μπορούν να λάβουν οποιοδήποτε πρόσημο τότε:
- Μια μεταβλητή με μη καθορισμένο πρόσημο μπορεί να γραφτεί σαν διαφορά δύο νέων μη αρνητικών μεταβλητών.
- Άρα αν x_j η μεταβλητή χωρίς καθορισμένο πρόσημο μπορεί να γραφτεί ως $x_j = x'_j - x''_j$,

όπου: $x'_j \geq 0$ and $x''_j \geq 0$

Μετασχηματισμός σε τυπική μορφή

- «Όλοι οι περιορισμοί είναι τύπου ισότητας.»
- Οι περιορισμοί με τη μορφή ανισοτήτων του τύπου «μικρότερο ή ίσο» ή «μεγαλύτερο ή ίσο» μπορούν να μετατραπούν σε ισότητες με την προσθήκη μιας νέας μη αρνητικής συμπληρωματικής (slack) ή πλεονασματικής (surplus) μεταβλητής αντίστοιχα (μεταβλητές απόκλισης).
- Άρα στην ανίσωση: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k$
- προστίθεται μια μη αρνητική *slack variable* x_{n+1} και μετασχηματίζεται σε: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + x_{n+1} = b_k$
- Αντίστοιχα στην: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \ge b_k$
- Αφαιρείται μια μη αρνητική *surplus variable* x_{n+1} και μετασχηματίζεται σε: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n - x_{n+1} = b_k$

Παράδειγμα

- Γράψτε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού ως ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων:
- maximizef $= 12x + 15y + 5z$
- υπό τους περιορισμούς:
- $2x + 2y + z \leq 8$
- $- x - 4y + 3z \geq - 12$ ή $x + 4y - 3z \leq 12$
- Απάντηση:
- $2x + 2y + z + s = 8$
- $- x - 4y + 3z - t = - 12$ ή $x + 4y - 3z + t = 12$
- $- 12x - 15y - 5z + f = 0$

Πινακοποίηση των εξισώσεων

Example

For the system

$$\begin{aligned}
4x - 3y + z \quad + s \qquad\qquad &= 3 \\
x + y \quad + z \qquad + t \qquad &= 10 \\
2x + y \quad - z \qquad\qquad + u &= 10 \\
-2x + 3y - 4z \qquad\qquad + p &= 0
\end{aligned}$$

the initial tableau is as follows (notice how we separate the last row using a line).

x	y	z	s	t	u	p	Ans
4	−3	1	1	0	0	0	3
1	1	1	0	1	0	0	10
2	1	−1	0	0	1	0	10
−2	3	−4	0	0	0	1	0

Πινακοποίηση των εξισώσεων

Set up the first tableau for the following LP problem.

Maximize $p = x + 2y + 3z$ subject to the constraints

$$7x + z \leq 6$$
$$x + 2y \leq 20$$
$$3y + 4z \leq 30$$

x	y	z	s	t	u	p	Ans
7	0	1	1	0	0	0	6
1	2	0	0	1	0	0	20
0	3	4	0	0	1	0	30
-1	-2	-3	0	0	0	1	0

Αναγνώριση ενεργών μεταβλητών και βασικών λύσεων

Associated with each tableau (including the initial one above) is a so-called **basic solution**. This is one of the infintely many possible solutions of the system of equations represented by the tableau.

To obtain the basic solution in a tablueau, look for the columns that are **cleared** (all zeros except for one entry). An example is the "t"-column in the above tableau. We assign to the corresponding variable the ratio shown in the example below. We call these variables the **active** variables. All variables whose columns are not cleared are assigned zero and are called **inactive.**

Example

In the following tableau, the active variables are shown in color and their values computed as illustrated.

x	y	z	s	t	u	p	Ans	
0	−3	**1**	1	3	0	0	**3**	**z = 3/1 = 3**
4	1	0	0	1	0	0	**10**	**x = 10/4 = 2.5**
0	1	0	−10	0	**2**	0	**10**	**u = 10/2 = 5**
0	3	0	0	−4	0	**5**	**15**	**p = 15/5 = 3**
								y = 0, s = 0, t = 0 (inactive)

As an additional aid to recognizing which variables are active and which are inactive, we label each row with the name of the corresponding active variable. The complete tableau looks like this:

	x	y	z	s	t	u	p	Ans	
z	0	−3	1	1	3	0	0	3	z = 3/1 = 3
x	4	1	0	0	1	0	0	10	x = 10/4 = 2.5
u	0	1	0	−10	0	2	0	10	u = 10/2 = 5
p	0	3	0	0	−4	0	5	15	p = 15/5 = 3

Βρείτε την 1$^{\eta}$ βασική λύση

x	y	z	s	t	u	p	Ans
7	0	1	1	0	0	0	6
1	2	0	0	1	0	0	20
0	3	4	0	0	1	0	30
−1	−2	−3	0	0	0	1	0

The associated basic solution is:

x = 0 Check   y = 0 Check   z = 0 Check

s = 6 Check   t = 20 Check   u = 30 Check

p = 0 Check   HELP   Clear

Συμπληρώστε τα ονόματα των ενεργών μεταβλητών

	x	y	z	s	t	u	p	Ans
	7	0	1	1	0	0	0	6
	1	2	0	0	1	0	0	20
	0	3	4	0	0	1	0	30
	−1	−2	−3	0	0	0	1	0

Συμπληρώστε τα ονόματα των ενεργών μεταβλητών

	x	y	z	s	t	u	p	Ans
s	7	0	1	1	0	0	0	6
t	1	2	0	0	1	0	0	20
u	0	3	4	0	0	1	0	30
p	−1	−2	−3	0	0	0	1	0

- Η λύση με p=0 δεν είναι η μέγιστη.
- Για να βρούμε τη μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης υλοποιούμε «περιστροφική αναγωγή» (Pivotal reduction) συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους (m<n).
- Τα ενδεικτικά βήματα περιγράφονται έπειτα.

Επιλογή της στήλης «pivot column»

- Κατά κανόνα κοιτάμε τους αριθμούς στην τελευταία σειρά, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η στήλη των αποτελεσμάτων (η τελευταία). Εκεί επιλέγουμε τον αρνητικό αριθμό με τη μεγαλύτερη (απόλυτη) τιμή. Εκεί βρίσκεται το pivot column. Αν υπάρχουν 2 στήλες με ίδιες τιμές επιλέγεται οποιαδήποτε από τις 2. Αν όλοι οι αριθμοί στην τελευταία σειρά είναι μηδενικοί ή θετικοί τότε η διαδικασία έχει ολοκληρωθεί και η βασική λύση είναι και η βέλτιστη.

Επιλογή της στήλης «pivot column»

	x	y	z	s	t	u	p	Ans
s	7	0	1	1	0	0	0	6
t	1	2	0	0	1	0	0	20
u	0	3	4	0	0	1	0	30
p	−1	−2	−3	0	0	0	1	0

Pivot column

Επιλογή της γραμμής pivot

- Η μεταβλητή pivot πρέπει πάντα να είναι θετική. Οπότε αποκλείονται οι μηδενικές τιμές και η τελευταία γραμμή, στην οποία περιλαμβάνεται αρνητική τιμή.
- Για κάθε *θετική* τιμή b της στήλη pivot υπολογίζεται η *δοκιμαστική* αναλογία a/b, όπου a ο αριθμός των αποτελεσμάτων στην τελευταία (δεξιά) στήλη της συγκεκριμένης γραμμής.
- Για κάθε δοκιμαστική αναλογία επιλέγεται η μικρότερη τιμή. Ο αριθμός b είναι ο pivot.

Βρείτε την τιμή pivot

In the following tableau, the pivot column is the "t"-column. Since neither zeros nor negative numbers can serve as a pivot, we must choose between the 3 and the 1 in the "t"-column. The test ratios are shown on the side.

	x	y	z	s	t	u	p	Ans	
z	0	−3	1	1	**3**	0	0	**3**	**test ratio = 3/3 = 1**
x	4	1	0	0	**1**	0	0	**10**	**test ratio = 10/1 =10**
u	0	1	0	−10	**0**	2	0	**10**	
p	0	3	0	0	**−4**	0	5	**15**	

Βρείτε την τιμή pivot

	x	y	z	s	t	u	p	Ans
s	7	0	1	1	0	0	0	6
t	1	2	0	0	1	0	0	20
u	0	3	4	0	0	1	0	30
p	−1	−2	−3	0	0	0	1	0

Q Why did the row label on the left of the first row change from "z" to "t"?.

A After we pivot on the 3 in the t-column, the tableau has t as an active variable ($t = 3/3 = 1$) whereas z is no longer an active variable. z is called the **departing variable** and t is called the **entering variable**. In general, when we pivot, the variable that lables its column ("t" in this example) becomes the entering variable for its row.

Example

In the following tableau, the pivot is shown in color, and we clear its column using the given row operations.

	x	y	z	s	t	u	p	Ans	
z	0	−3	1	1	3	0	0	3	
x	4	1	0	0	1	0	0	10	$3R_2 - R_1$
u	0	1	0	−10	0	2	0	10	
p	0	3	0	0	−4	0	5	15	$3R_4 + 4R_1$

This gives the next tableau:

	x	y	z	s	t	u	p	Ans
t	0	−3	1	1	3	0	0	3
x	12	6	−1	−1	0	0	0	27
u	0	1	0	−10	0	2	0	10
p	0	−3	4	4	0	0	15	57

Here is the first tableau we have been working with in the interactive questions.

	x	y	z	s	t	u	p	Ans
s	7	0	1	1	0	0	0	6
t	1	2	0	0	1	0	0	20
u	0	3	4	0	0	1	0	30
p	−1	−2	−3	0	0	0	1	0

You now know where the first pivot is. Carry out Step 5 to obtain the second tableau. (You can use the Tab key to move from cell to cell. Press "Check" when done.)

	x	y	z	s	t	u	p	Ans

Here is the first tableau we have been working with in the interactive questions.

	x	y	z	s	t	u	p	Ans
s	7	0	1	1	0	0	0	6
t	1	2	0	0	1	0	0	20
u	0	3	4	0	0	1	0	30
p	−1	−2	−3	0	0	0	1	0

You now know where the first pivot is. Carry out Step 5 to obtain the second tableau. (You can use the Tab key to move from cell to cell. Press "Check" when done.)

	x	y	z	s	t	u	p	Ans
z	7	0	1	1	0	0	0	6
t	1	2	0	0	1	0	0	20
u	-28	3	0	-4	0	1	0	6
p	20	-2	0	3	0	0	1	18

- Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου να μην υπάρχουν αρνητικοί αριθμοί στην τελευταία γραμμή.

	x	y	z	s	t	u	p	Ans
z	7	0	1	1	0	0	0	6
t	1	2	0	0	1	0	0	20
u	-28	3	0	-4	0	1	0	6
p	20	-2	0	3	0	0	1	18

	x	y	z	s	t	u	p	Ans	
z	7	0	1	1	0	0	0	6	
t	1	2	0	0	1	0	0	20	$3R_2 - 2R_3$
u	−28	3	0	−4	0	1	0	6	
p	20	−2	0	3	0	0	1	18	$3R_4 + 2R_3$

	x	y	z	s	t	u	p	Ans
z	7	0	1	1	0	0	0	6
t	59	0	0	8	3	−2	0	48
y	−28	3	0	−4	0	1	0	6
p	4	0	0	1	0	2	3	66

The final tableau is

	x	y	z	s	t	u	p	Ans
z	7	0	1	1	0	0	0	6
t	59	0	0	8	3	–2	0	48
y	–28	3	0	–4	0	1	0	6
p	4	0	0	1	0	2	3	66

- Reading across the first row (active variable z), we find z = 6/1 = 6.
- Reading across the second row (active variable t), we find t = 48/3 = 16.
- Reading across the third row (active variable y), we find y = 6/3 = 2.
- Reading across the bottom row (active variable p), we find p = 66/3 = 22.

Since all the other variables are inactive, their values are zero.

x = 0	Check	y = 2	Check	z = 6	Check
s = 0	Check	t = 16	Check	u = 0	Check
p = 22	Check			HELP	Clear

Step1: Using slack variables, convert the LP problem to a system of linear equations.

Step 2: Set up the initial tableau.

Step 3: Select the pivot column.

The rule for the selecting a pivot column is this: Look at all the numbers in the bottom row, excluding the Answer column. From these, choose the negative number with the largest magnitude. Its column is the pivot column. (If there are two candidates, choose either one.) If all the numbers in the bottom row are zero or positive, then you are done, and the basic solution is the optimal solution.

Step 4: Select the pivot in the pivot column.

1) The pivot must always be a *positive* number. (This rules out zeros and negative numbers.)
2) For each positive entry b in the pivot column, compute the ratio a/b, where a is the number in the rightmost column in that row. We call this a test ratio.
3) Of these ratios, choose the smallest one. The corresponding number b is the pivot.

Step 5: Use the pivot to clear the pivot column in the normal manner. This gives the next tableau.

(For quick instructions on how to pivot, press **here**.)

Step 6: Repeat Steps 3-5 until there are no more negative numbers in the bottom row (with the possible exception of the Answer column).

The solution for the LP problem is then the basic solution associated with the final tableau.

Παρατηρήσεις (σχετικά με τη μέθοδο simplex)

- Στην αρχική επαναληπτική διαδικασία γίνεται επιλογή της μη βασικής μεταβλητής που έχει τον μεγαλύτερο αρνητικό συντελεστή. Αν υποτεθεί ότι δύο ή περισσότερες μη-βασικές μεταβλητές έχουν τον ίδιο αρνητικό συντελεστή, τότε η επιλογή γίνεται τυχαία. Η βέλτιστη λύση προκύπτει ανεξάρτητα από την επιλογή.

Παρατηρήσεις (σχετικά με τη μέθοδο simplex)

- Όταν δύο ή περισσότερες μεταβλητές αποτελούν τις εξερχόμενες βασικές μεταβλητές προκύπτει μια εκφυλισμένη βασική δυνατή λύση επειδή οι ισοβάθμιες μεταβλητές που επιλέγονται πρέπει να λάβουν τιμή ίση με το μηδέν. Αν μια τέτοια μεταβλητή επιλεχθεί στη συνέχεια σαν εξερχόμενη βασική μεταβλητή, πριν όμως η τιμή της αλλάξει από την μηδενική, τότε η αντίστοιχη εισερχόμενη βασική μεταβλητή παραμένει μηδέν και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης πρέπει να παραμείνει αμετάβλητη. Η διαδικασία όμως οδηγεί σε ατέρμονα βρόχο (loop), δηλαδή σε κυκλική επαναληπτική διαδικασία χωρίς δυνατότητα εντοπισμού βέλτιστης λύσης. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος υπάρχουν τεχνικές που δεν αναπτύσσονται εδώ.

Παρατηρήσεις (σχετικά με τη μέθοδο simplex)

- Πρόβλημα εμφανίζεται όταν δεν υπάρχει κατάλληλη βασική μεταβλητή που να χαρακτηριστεί ως εξερχόμενη. Το πρόβλημα εντοπίζεται όταν η εισερχόμενη βασική μεταβλητή μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα, χωρίς να δώσει αρνητικές τιμές σε κάποια από τις υπάρχουσες βασικές μεταβλητές. Στην simplex αυτό σημαίνει ότι κάθε συντελεστής της κύριας στήλης είναι είτε αρνητικός είτε μηδέν.
- Αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι ότι οι περιορισμοί δεν εμποδίζουν την συνεχή αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης σε μια ορισμένη διεύθυνση (αρνητική ή θετική) έτσι ώστε να προκύψει διακοπή της διαδικασίας με την ένδειξη ότι η Z δεν ορίζεται. Η ένδειξη ερμηνεύεται σαν λάθος, καθότι δεν υπάρχει πρόβλημα ΓΠ που να δίνει απεριόριστο όφελος. Στην περίπτωση αυτή θεωρείται ότι το πρόβλημα δεν έχει καταστρωθεί σωστά, είτε με παράλειψη περιορισμών είτε με λάθος στην αρχή της διαδικασίας.

Παρατηρήσεις (σχετικά με τη μέθοδο simplex)

- Άλλη περίπτωση είναι η εμφάνιση πολλών βέλτιστων λύσεων. Οποιοδήποτε πρόβλημα αυτής της μορφής έχει τουλάχιστον δύο βέλτιστες βασικές ικανές λύσεις που χρησιμεύουν στον εντοπισμό κάθε άλλης βέλτιστης λύσης. Σε αρκετές εφαρμογές είναι εκ των προτέρων γνωστή η ύπαρξη πολλών βέλτιστων λύσεων. Οπωσδήποτε, σε ένα μοντέλο λήψης αποφάσεων είναι δύσκολος ο συνυπολογισμός συμμετοχής όλων των παραγόντων, εφόσον λαμβάνονται συνήθως μόνο οικονομικοί και τεχνικοί παράγοντες. Έτσι, μετά τον καθορισμό των πλέον αποδεκτών εναλλακτικών λύσεων (βέλτιστες λύσεις ή λύσεις πλησίον της βέλτιστης που προκύπτουν από ανάλυση ευαισθησίας), η τελική επιλογή μεταξύ αυτών εναπόκειται στον λήπτη απόφασης.

Παρατηρήσεις (σχετικά με τη μέθοδο simplex)

- Με την simplex η διαδικασία σταματά μόλις εντοπιστεί η πρώτη βέλτιστη λύση και έτσι δεν εντοπίζονται άλλες βέλτιστες λύσεις εάν υπάρχουν. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με το γεγονός ότι στην περίπτωση ύπαρξης περισσοτέρων της μίας βέλτιστων ικανών λύσεων, τουλάχιστον μια από τις βασικές μεταβλητές έχει ένα συντελεστή ίσο με το μηδέν στην τελική εξίσωση και έτσι η αύξηση μιας τέτοιας μεταβλητής δεν μεταβάλλει την τιμή της Z.
- Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο εντοπισμός και άλλων βέλτιστων λύσεων μπορεί να επιτευχθεί με πρόσθετα επαναληπτικά βήματα και με επιλογή κάθε φορά εκείνης της μη-βασικής μεταβλητής που έχει μηδενικό συντελεστή για την εισερχόμενη βασική λύση. Η μέθοδος προσομοίωσης (simulation) δίνει λύση σε τέτοιες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 1ο

- Ένας αγρότης έχει 240 στρέμματα γεωργικής γης. Θέλει να αποφασίσει πόσα στρέμματα θα φυτεύσει καλαμπόκι και πόσα τριφύλλι. Το καλαμπόκι του αποφέρει κέρδος 40€ από κάθε στρέμμα, ενώ το τριφύλλι 30€ από κάθε στρέμμα. Το καλαμπόκι χρειάζεται περίπου 2 ώρες εργασίας για κάθε στρέμμα, ενώ το τριφύλλι χρειάζεται μόνο 1 ώρα για κάθε στρέμμα. Μπορεί να απασχοληθεί στη γεωργική εργασία συνολικά 320 ώρες. Για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του πόσα στρέμματα θα καλλιεργήσει καλαμπόκι και πόσα τριφύλλι?

Παράδειγμα 2ο

- Στις εξετάσεις του μαθήματος υπάρχουν θέματα τύπου Α, τα οποία αξίζουν 10 βαθμούς και θέματα τύπου Β, τα οποία αξίζουν 15 βαθμούς. Χρειάζεστε 3 λεπτά για κάθε θέμα τύπου Α και 6 λεπτά για κάθε θέμα τύπου Β. Ο συνολικός διαθέσιμος χρόνος είναι 60 λεπτά και δεν σας επιτρέπεται να απαντήσετε σε περισσότερες από 16 ερωτήσεις. Θεωρώντας ότι όλες οι απαντήσεις σας είναι σωστές, πόσες θα πρέπει να επιλέξετε από κάθε τύπο, ώστε να επιτύχετε το μεγαλύτερο βαθμό?

Παράδειγμα 3ο

- Μια καντίνα ψήνει και πουλάει μπιφτέκια και λουκάνικα σε ποδοσφαιρικούς αγώνες. Για να παραμείνει στη δουλειά πρέπει να πουλάει τουλάχιστον 10 μπιφτέκια, αλλά δεν μπορεί να ψήσει περισσότερα από 40. Αντίστοιχα πρέπει να πουλάει τουλάχιστον 30 λουκάνικα, αλλά δεν μπορεί να ψήσει περισσότερα από 70. Επίσης δεν μπορεί να ψήσει για περισσότερα από 90 σάντουιτς συνολικά την ημέρα. Το καθαρό κέρδος από ένα μπιφτέκι είναι 0.33€ και από ένα λουκάνικο 0.21€. Πόσα από κάθε είδος πρέπει να πουλήσει, ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος?

Παράδειγμα 4ο

- Ένα κατάστημα δώρων πουλάει πολυτελή δένδρα τα Χριστούγεννα. Ο προμηθευτής της χρεώνει 80€ για φυσικό δένδρο και 160€ για τεχνητό δένδρο. Λόγω δυσμενούς οικονομικής ρευστότητας το κατάστημα θέλει να επενδύσει στην ελάχιστη ποσότητα δένδρων. Το κατάστημα μπορεί να αγοράσει από 20 έως και 90 φυσικά δένδρα. Μπορεί να αγοράσει έως και 100 τεχνητά δένδρα. Ο προμηθευτής μπορεί να παραδώσει μεταξύ 50 έως και 120 δένδρα στο σύνολο. Το κατάστημα απαιτεί να διαθέτει αριθμό τεχνητών δένδρων τουλάχιστον όσο ο μισός αριθμός των φυσικών δένδρων.

Παράδειγμα 5ο

- Ένας κτηνοτρόφος αναμιγνύει τροφή από 2 προμηθευτές, Α και Β, ώστε να παρέχει στα ζώα του. Σε κάθε τάισμα απαιτούνται τουλάχιστον 60 γραμμάρια πρωτεΐνης και 30 γραμμάρια λίπους. Η τροφή του προμηθευτή Α έχει 15 γραμμάρια πρωτεΐνης και 10 γραμμάρια λίπους και κοστίζει 80 λεπτά το κιλό. Η τροφή του προμηθευτή Β έχει 20 γραμμάρια πρωτεΐνης και 5 γραμμάρια λίπους και κοστίζει 50 λεπτά το κιλό. Πόση τροφή πρέπει να χρησιμοποιήσει από κάθε προμηθευτή, ώστε να ελαχιστοποιήσει το κόστος του?

Παράδειγμα 6ο

- Ένα εργοστάσιο παράγει 2 προϊόντα: το Α και το Β. Το εργοστάσιο διαθέτει 3 παραρτήματα Π1, Π2 και Π3. Το κέρδος από το προϊόν Α είναι 4€ ανά τεμάχιο και από το προϊόν Β 8€ ανά τεμάχιο. Το κάθε παράρτημα έχει τις παρακάτω δυνατότητες:

	ώρες / τμχ Α	ώρες / τμχ Α	μέγιστη δυναμικότητα
Π1	8 ώρες/τμχΑ	10ώρες/τμχΒ	11000ώρες max
Π2	4 ώρες/τμχΑ	10ώρες/τμχΒ	9000ώρες max
Π3	12 ώρες/τμχΑ	6ώρες/τμχΒ	12000ώρες max

Πώς θα μεγιστοποιηθεί το κέρδος?

Βασικά θεωρήματα

- Η τομή οποιουδήποτε αριθμού κυρτών συνόλων (convex sets) είναι επίσης κυρτή.

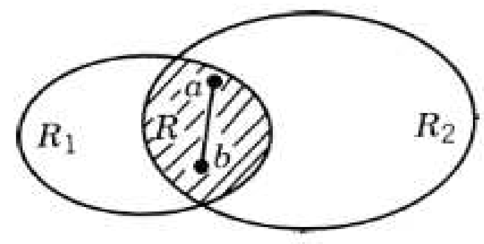


Figure 3.12 Intersection of two convex sets.

- Το σύνολο εφικτών λύσεων ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι κυρτό.
- Ένα τοπικό ελάχιστο που ανήκει σε ένα κυρτό σύνολο είναι και απόλυτο (καθολικό) ελάχιστο.
- Όλες οι βασικές εφικτές λύσεις είναι ακραία σημεία του κυρτού συνόλου εφικτών λύσεων.
- Έστω S ότι είναι κυρτό και κλειστό πολύεδρο. Η ελάχιστη τιμή μιας γραμμικής συνάρτησης στο S θα βρίσκεται στα συνοριακά σημεία του S.

Definitions

1. *Point in n-dimensional space.* A point $\mathbf{X}$ in an n-dimensional space is characterized by an ordered set of n values or coordinates $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. The coordinates of $\mathbf{X}$ are also called the *components* of $\mathbf{X}$.
2. *Line segment in n dimensions (L).* If the coordinates of two points A and B are given by $x_j^{(1)}$ and $x_j^{(2)} (j = 1, 2, \ldots, n)$, the line segment (L) joining these points is the collection of points $\mathbf{X}(\lambda)$ whose coordinates are given by $x_j = \lambda x_j^{(1)} + (1 - \lambda)x_j^{(2)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, with $0 \le \lambda \le 1$.
   Thus

$$L = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}^{(1)} + (1 - \lambda)\mathbf{X}^{(2)}\} \tag{3.4}$$

In one dimension, for example, it is easy to see that the definition is in accordance with out experience (Fig. 3.7):

$$x^{(2)} - x(\lambda) = \lambda[x^{(2)} - x^{(1)}], \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{3.5}$$

whence

$$x(\lambda) = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}, \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{3.6}$$

3. *Hyperplane.* In n-dimensional space, the set of points whose coordinates satisfy a linear equation

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = b \tag{3.7}$$

is called a hyperplane. A hyperplane, H, is represented as

$$H(\mathbf{a}, b) = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = b\} \tag{3.8}$$

A hyperplane has $n-1$ dimensions in an n-dimensional space. For example, in three-dimensional space it is a plane, and in two-dimensional space it is a line. The set of points whose coordinates satisfy a linear inequality like $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b$ is called a *closed half-space*, closed due to the inclusion of an equality sign in the inequality above. A hyperplane partitions the n-dimensional space (E^n) into two closed half-spaces, so that

$$H^{+} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \geq b\} \tag{3.9}$$

$$H^{-} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \leq b\} \tag{3.10}$$

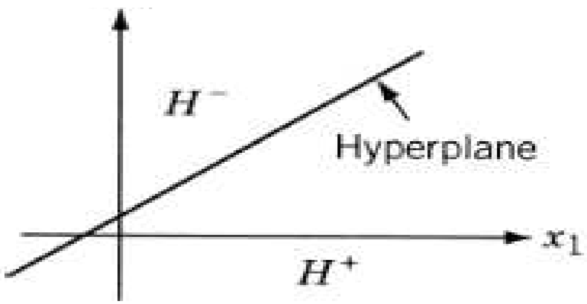


Figure 3.8 Hyperplane in two dimensions.

4. *Convex set.* A convex set is a collection of points such that if $\mathbf{X}^{(1)}$ and $\mathbf{X}^{(2)}$ are any two points in the collection, the line segment joining them is also in the collection. A convex set, S, can be defined mathematically as follows:

$$\text{If } \mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)} \in S, \quad \text{then} \quad \mathbf{X} \in S$$

where

$$\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{X}^{(2)}, \quad 0 \le \lambda \le 1$$

A set containing only one point is always considered to be convex. Some examples of convex sets in two dimensions are shown shaded in Fig. 3.9. On the other hand, the sets depicted by the shaded region in Fig. 3.10 are not convex. The L-shaped region, for example, is not a convex set because it is possible to find two points a and b in the set such that not all points on the line

Figure 3.9 Convex sets.

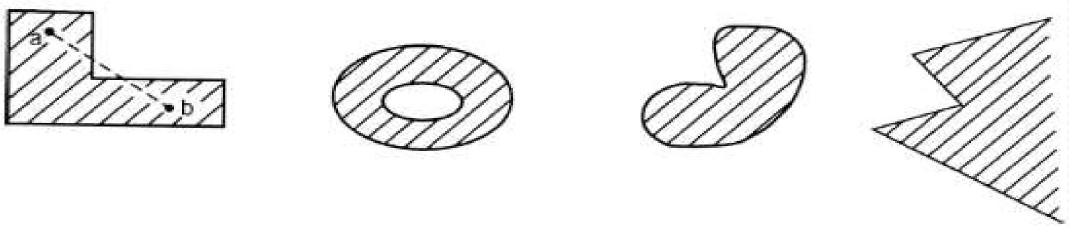
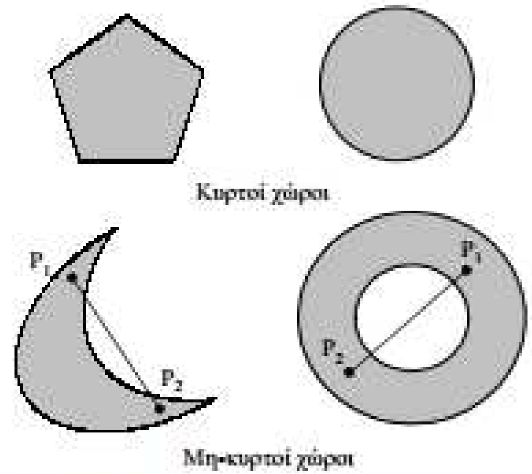


Figure 3.10 Nonconvex sets.



Σχήμα 5-2 Τύποι χώρων πολιτικής

5. *Convex polyhedron and convex polytope.* A convex polyhedron is a set of points common to one or more half-spaces. A convex polyhedron that is bounded is called a convex polytope.

Figure 3.11*a* and *b* represents convex polytopes in two and three dimensions, and Fig. 3.11*c* and *d* denotes convex polyhedra in two and three dimensions. It can be seen that a convex polygon, shown in Fig. 3.11*a* and *c*, can be considered as the intersection of one or more half-planes.

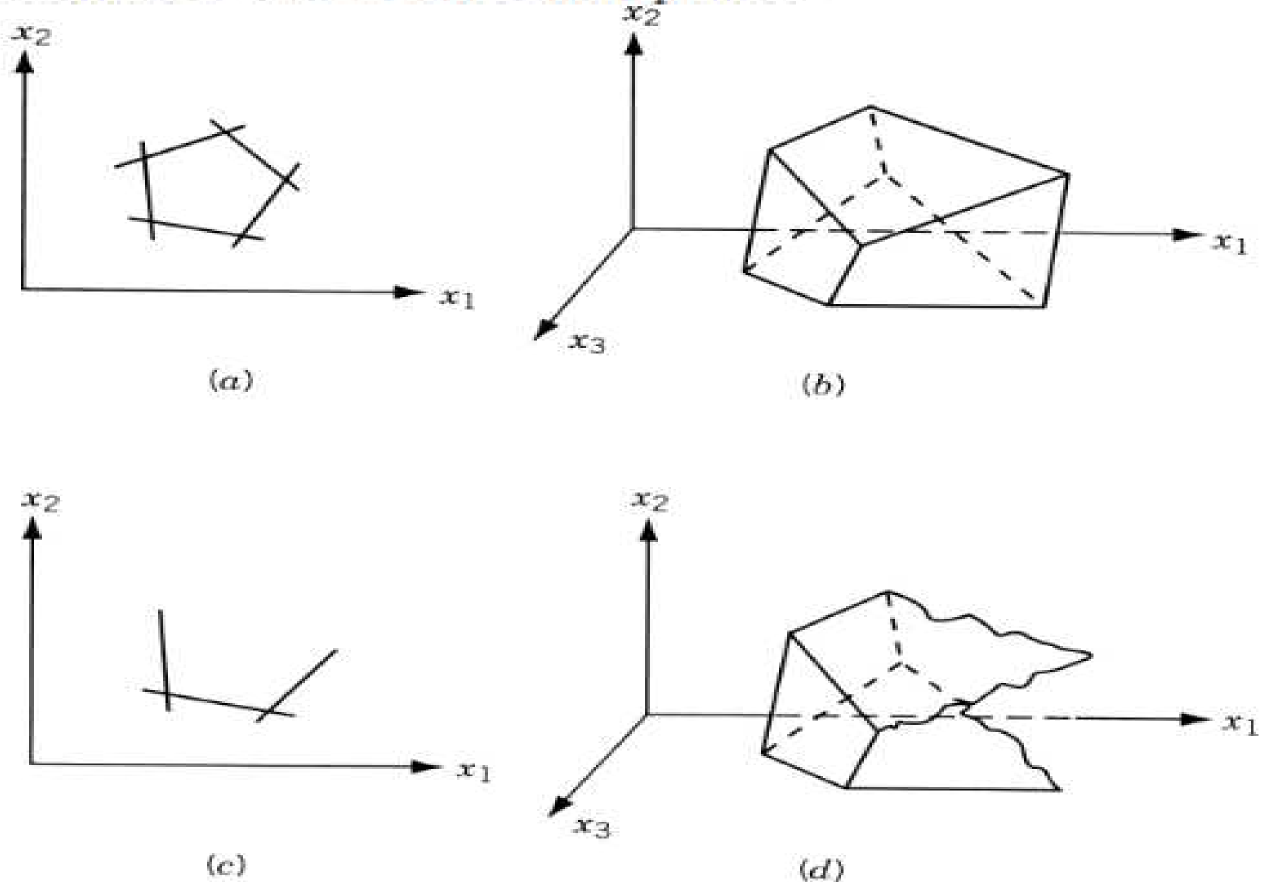


Figure 3.11 Convex polytopes in two and three dimensions (*a*, *b*) and convex polyhedra in two and three dimensions (*c*, *d*).

6. *Vertex or extreme point.* This is a point in the convex set that does not lie on a line segment joining two other points of the set. For example, every point on the circumference of a circle and each corner point of a polygon can be called a vertex or extreme point.
7. *Feasible solution.* In a linear programming problem, any solution that satisfies the constraints

$$\mathbf{aX} = \mathbf{b} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \tag{3.3}$$

is called a feasible solution.
8. *Basic solution.* A basic solution is one in which $n - m$ variables are set equal to zero. A basic solution can be obtained by setting $n - m$ variables to zero and solving the constraint Eqs. (3.2) simultaneously.
9. *Basis.* The collection of variables not set equal to zero to obtain the basic solution is called the basis.

10. *Basic feasible solution.* This is a basic solution that satisfies the nonnegativity conditions of Eq. (3.3).
11. *Nondegenerate basic feasible solution.* This is a basic feasible solution that has got exactly m positive x_i.
12. *Optimal solution.* A feasible solution that optimizes the objective function is called an optimal solution.
13. *Optimal basic solution.* This is a basic feasible solution for which the objective function is optimal.

- Περιστροφική αναγωγή (Pivotal reduction) συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους (m<n)