Θεωρία Βελτιστοποίησης

Βασίλειος Μαχαιράς
Πολιτικός Μηχανικός Ph.D.

Γραμμικός προγραμματισμός: Εισαγωγή

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής

Διάλεξη 3η/2017

Γραμμικός προγραμματισμός

- Είναι μια μεθοδολογία βελτιστοποίησης, η οποία εφαρμόζεται σε προβλήματα, στα οποία η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί εμφανίζονται ως γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών σχεδιασμού.
- Οι εξισώσεις των περιορισμών σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να εμφανίζονται ως ισότητες ή ως ανισότητες.
- Ο γραμμικός προγραμματισμός μας επιτρέπει να επιλέγουμε βέλτιστες αποφάσεις σε πολύπλοκες καταστάσεις. Τουλάχιστον 4 βραβεία Nobel δόθηκαν σε συνεισφορές σχετικές με το γραμμικό προγραμματισμό.

Ιστορία

- Ο γραμμικός προγραμματισμός ως τύπος προβλημάτων βελτιστοποίησης αναγνωρίστηκε το 1930 από οικονομολόγους για τον υπολογισμό της βέλτιστης κατανομής πόρων.
- Στη διάρκεια του 2ου παγκοσμίου πολέμου η αεροπορία των ΗΠΑ εφάρμοσε τις τεχνικές του γραμμικού προγραμματισμού. Ο George B. Dantzig διατύπωσε το γενικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού και εφεύρε το 1947 τη μέθοδο simplex για την επίλυσή του, η οποία επέτρεψε την ευρεία χρήση της μεθόδου.
- Έπειτα τη μεγαλύτερη επιρροή την είχε η συνεισφορά των Kuhn και Tucker με τη θεωρία της δυικότητας και οι εργασίες των Charnes και Cooper για τις βιομηχανικές εφαρμογές τους

Εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού

- Οι εφαρμογές είναι πάρα πολλές για να αναφερθούν όλες. Ενδεικτικά παραδείγματα:
- Διυλιστήρια πετρελαίου, τα οποία προμηθεύονται πετρέλαιο από διαφορετικές πηγές, με διαφορετική σύνθεση και κόστος. Μπορούν να παράγουν διάφορες ποσότητες για πολλά προϊόντα όπως καύσιμο αεροπλάνων, πετρέλαιο κίνησης, βενζίνη κ.α. Παραδείγματα περιορισμών είναι η διαθέσιμη ποσότητα από τις πηγές, η μέγιστη παραγωγική ικανότητα για συγκεκριμένο προϊόν κ.α.

Εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού

- Το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής σε ένα εργοστάσιο μπορεί να αποφασιστεί με γραμμικό προγραμματισμό. Αφού ο αριθμός των πωλήσεων δεν είναι σταθερός η επιχείρηση έχει πολλές επιλογές. Μπορεί να αποθηκεύει τα προϊόντα, ώστε να έχει απόθεμα στη μέγιστη ζήτηση, αλλά αυτό περιλαμβάνει κόστος αποθήκευσης. Μπορεί να πληρώσει υπερωρίες για να επιτύχει περισσότερη παραγωγή στη μεγάλη ζήτηση. Οι περιορισμοί αφορούν τόσο στη δυναμικότητα του εργοστασίου όσο και στη δυναμικότητα των προμηθευτών να παρέχουν τις πρώτες ύλες. Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να λάβει υπόψη όλους τους παράγοντες και να παρέχει τη λύση με το περισσότερο κέρδος… ή με το λιγότερο ρίσκο

Εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού

- Στη βιομηχανία επεξεργασίας τροφής ο γραμμικός προγραμματισμός παρέχει το βέλτιστο σχέδιο προμηθειών και διασποράς των προϊόντων από διάφορα εργοστάσια σε διάφορες αποθήκες.
- Στη βιομηχανία μετάλλων αποφασίζεται η παραγωγή των διατομών για μεγιστοποίηση του κέρδους.
- Η βέλτιστη δρομολόγηση μηνυμάτων σε ένα δίκτυο επικοινωνίας ή η δρομολόγηση αεροπλάνων και πλοίων μπορεί να αποφασιστεί με γραμμικό προγραμματισμό.
- Πολλά τεχνικά προβλήματα μπορούν να επιλυθούν με γραμμικό προγραμματισμό επιτυγχάνοντας βέλτιστα αποτελέσματα.

Κανονική μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

Scalar Form

Ανάλογα με τη βιβλιογραφία μπορεί να είναι maximization

$$\text{Minimize } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{3.1a}$$

subject to the constraints

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.2a}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ &\vdots \\ x_n &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.3a}$$

where c_j, b_j, and $a_{ij} (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ are known constants, and x_j are the decision variables.

Κανονική μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (σε μορφή πινάκων)

Matrix Form

$$\text{Minimize } f(\mathbf{X}) = \mathbf{c}^{T}\mathbf{X} \tag{3.1b}$$

subject to the constraints

$$\mathbf{aX} = \mathbf{b} \tag{3.2b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \tag{3.3b}$$

where

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Κανονική μορφή

- Τα χαρακτηριστικά ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο περιγράφεται στην ***κανονική μορφή*** (standard form) είναι:
- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι προς ελαχιστοποίηση ή προς μεγιστοποίηση (ανάλογα με τη βιβλιογραφία),
- Όλες οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι μη αρνητικές,
- Όλοι οι περιορισμοί είναι τύπου ισότητας.

Όλα τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού μπορούν να μετασχηματιστούν στην ***κανονική μορφή*** χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που περιγράφονται παρακάτω.

Μετασχηματισμός σε τυπική μορφή

- «Η αντικειμενική συνάρτηση είναι προς ελαχιστοποίηση.»

- Οποιοδήποτε πρόβλημα μεγιστοποίησης μπορεί να μετασχηματιστεί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης της ίδιας συνάρτησης προσθέτοντας αρνητικό πρόσημο σ' αυτή. Για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$\text{minimize } f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

είναι ισοδύναμη με τη:

$$\text{maximize } f' = -f = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$$

Μετασχηματισμός σε τυπική μορφή

- «Όλες οι μεταβλητές σχεδιασμού (ή απόφασης) είναι μη αρνητικές.»

- Σε πολλά τεχνικά προβλήματα οι μεταβλητές σχεδιασμού αφορούν σε φυσικές διαστάσεις, οπότε οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές. Όταν όμως οι μεταβλητές μπορούν να λάβουν οποιοδήποτε πρόσημο τότε:
- Μια μεταβλητή με μη καθορισμένο πρόσημο μπορεί να γραφτεί σαν διαφορά δύο νέων μη αρνητικών μεταβλητών.
- Άρα αν x_j η μεταβλητή χωρίς καθορισμένο πρόσημο μπορεί να γραφτεί ως $x_j = x'_j - x''_j$,

  όπου: $x'_j \geq 0$ and $x''_j \geq 0$

Μετασχηματισμός σε τυπική μορφή

- «Όλοι οι περιορισμοί είναι τύπου ισότητας.»
- Οι περιορισμοί με τη μορφή ανισοτήτων του τύπου «μικρότερο ή ίσο» ή «μεγαλύτερο ή ίσο» μπορούν να μετατραπούν σε ισότητες με την προσθήκη μιας νέας μη αρνητικής συμπληρωματικής (slack) ή πλεονασματικής (surplus) μεταβλητής αντίστοιχα (μεταβλητές απόκλισης).
- Άρα στην ανίσωση: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \leq b_k$
- προστίθεται μια μη αρνητική *slack variable* x_{n+1} και μετασχηματίζεται σε: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + x_{n+1} = b_k$
- Αντίστοιχα στην: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \geq b_k$
- Αφαιρείται μια μη αρνητική *surplus variable* x_{n+1} και μετασχηματίζεται σε: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n - x_{n+1} = b_k$

Η γεωμετρία των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

- Τα προβλήματα με μόλις 2 μεταβλητές παρουσιάζουν μια απλή περίπτωση, στην οποία η λύση μπορεί να βρεθεί με γραφικές μεθόδους. Η οπτικοποίηση τέτοιων προβλημάτων παρέχει τη φυσική εικόνα από συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού:
- η εφικτή περιοχή είναι κυρτό πολύγωνο,
- η βέλτιστη λύση αν υπάρχει είναι σε μια κορυφή της εφικτής περιοχής.

Example 3.2 A manufacturing firm produces two machine parts using lathes, milling machines, and grinding machines. The different machining times required for each part, the machining times available on different machines, and the profit on each machine part are given in the following table.

Type of machine	Machining time required (min)		Maximum time available per week (min)
	Machine part I	Machine part II	
Lathes	10	5	2500
Milling machines	4	10	2000
Grinding machines	1	1.5	450
Profit per unit	\$50	\$100	

Determine the number of parts I and II to be manufactured per week to maximize the profit.

- Έστω x και y ο αριθμός των παραγόμενων προϊόντων I και II αντίστοιχα. Αυτές είναι μεταβλητές σχεδιασμού ή απόφασης.
- Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το εβδομαδιαίο κέρδος το οποίο ισούται με: $50 · x + $100 · y
- Αυτή είναι η αντικειμενική συνάρτηση:
- maximize f(x,y) = 50 · x + 100 · y
- Περιορισμοί:

$$10x + 5y \leq 2500 \quad (E_1)$$

$$4x + 10y \leq 2000 \quad (E_2)$$

$$x + 1.5y \leq 450 \quad (E_3)$$

$$\left.\begin{aligned} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{aligned}\right. \quad (E_4)$$

The optimum solution corresponds to a value of $x^* = 187.5$, $y^* = 125.0$ and a profit of \$21,875.00.

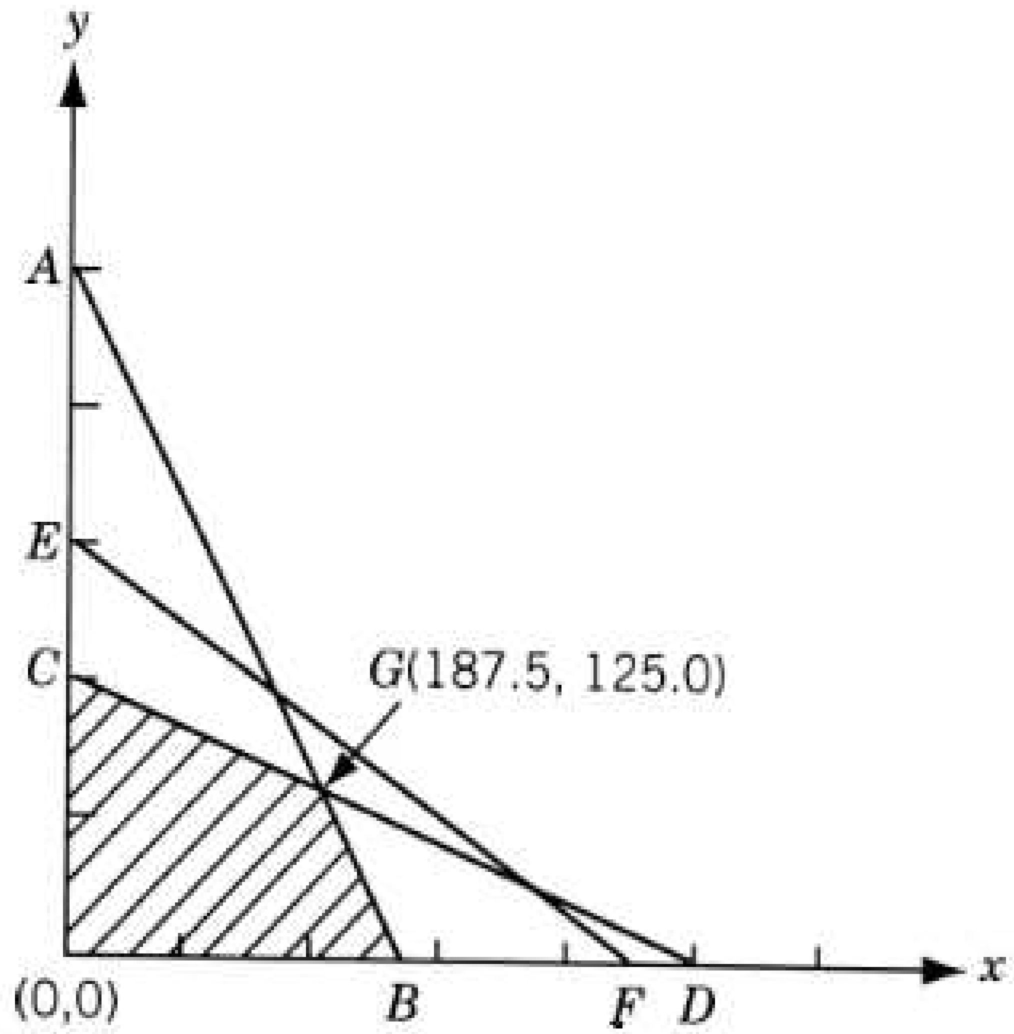


Figure 3.3 Feasible region given by Eqs. (E_1) to (E_4).

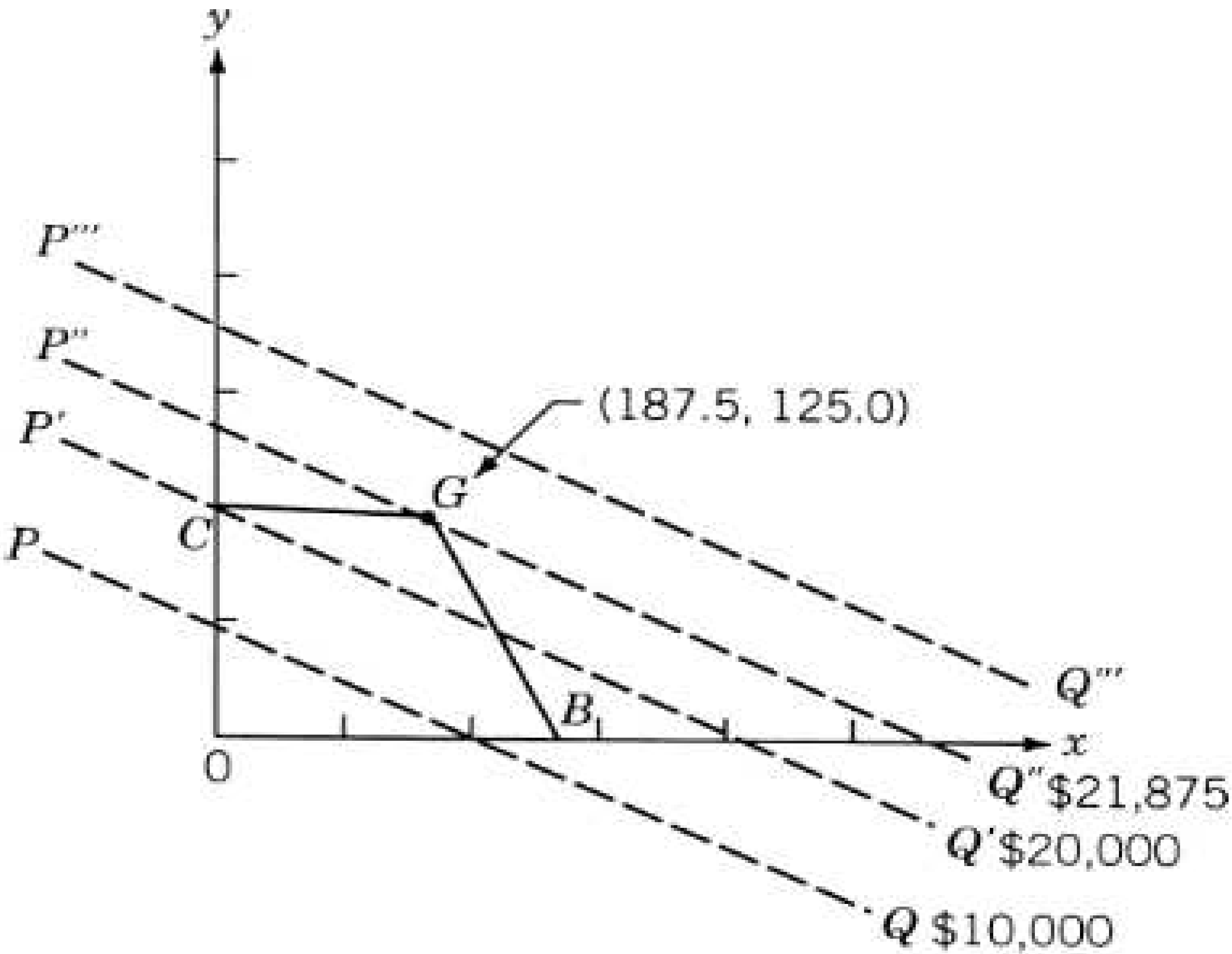


Figure 3.4 Contours of objective function.

In some cases, the optimum solution may not be unique. For example, if the profit rates for the machine parts I and II are \$40 and \$100 instead of \$50 and \$100, respectively, the contours of the profit function will be parallel to side CG of the feasible region as shown in Fig. 3.5. In this case, line $P''Q''$, which coincides with the boundary line CG, will correspond to the maximum (feasible) profit. Thus there is no unique optimal solution to the problem and any point between C and G on line $P''Q''$

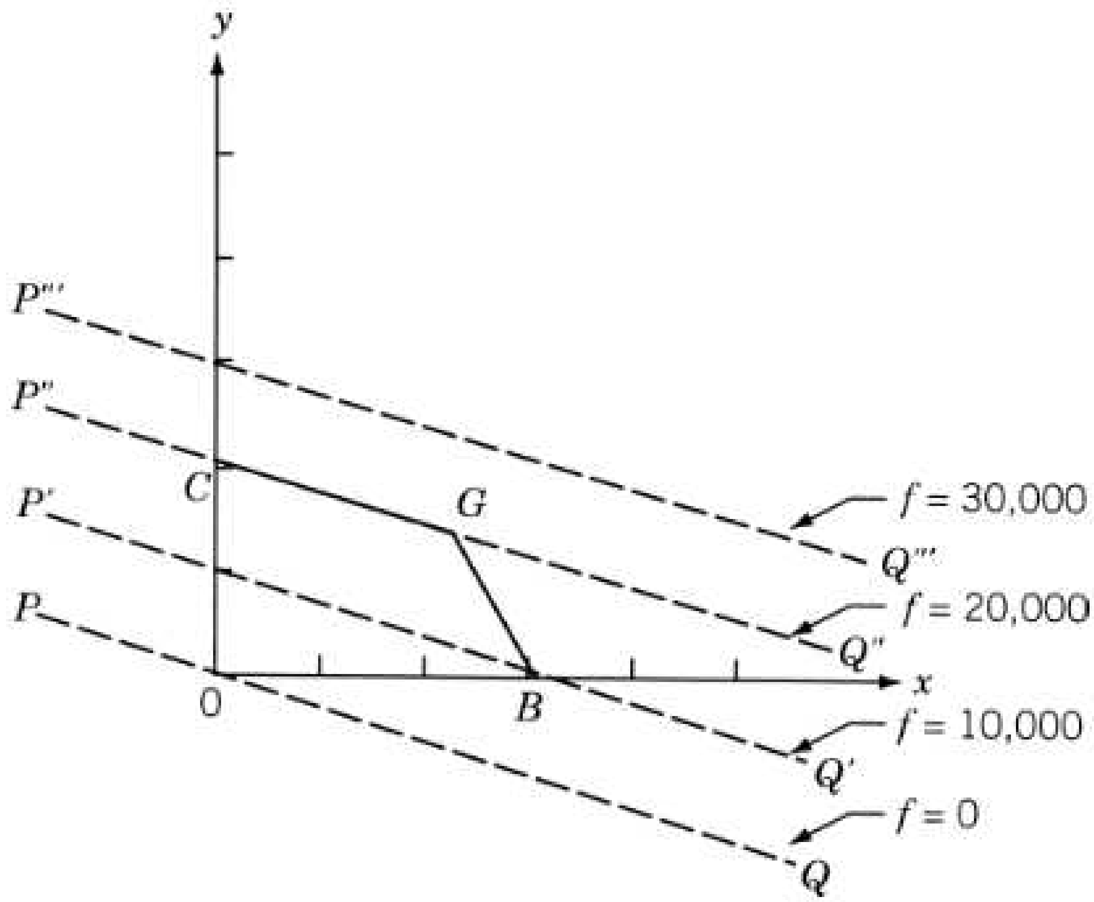


Figure 3.5 Infinite solutions.

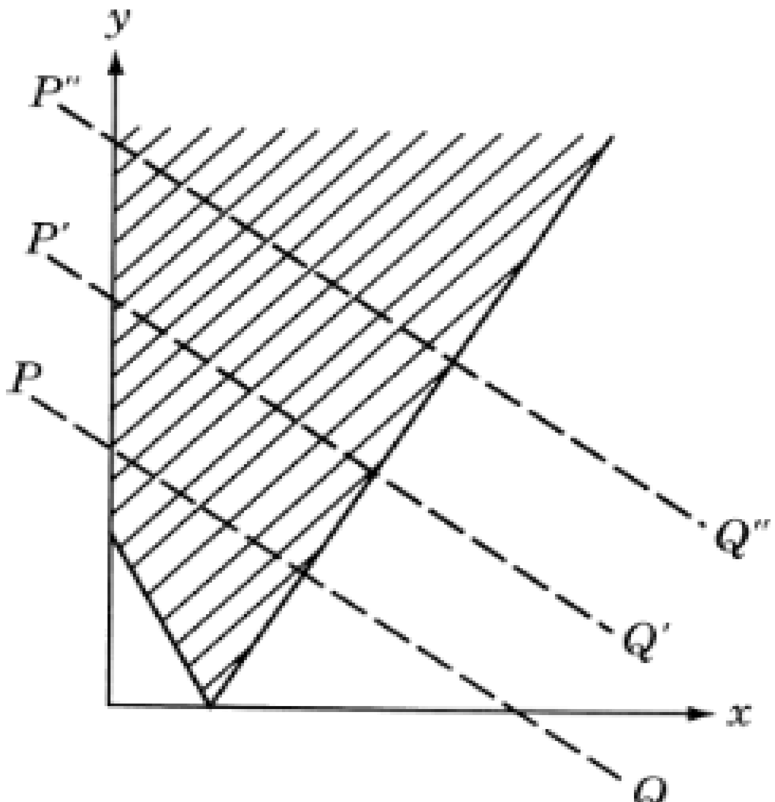


Figure 3.6 Unbounded solution.

Thus a linear programming problem may have (1) a unique and finite optimum solution, (2) an infinite number of optimal solutions, (3) an unbounded solution, (4) no solution, or (5) a unique feasible point. Assuming that the linear programming problem is properly formulated, the following general geometrical characteristics can be noted from the graphical solution:

1. The feasible region is a convex polygon.†
2. The optimum value occurs at an extreme point or vertex of the feasible region.

Παράδειγμα 1ο

- Ένας αγρότης έχει 240 στρέμματα γεωργικής γης. Θέλει να αποφασίσει πόσα στρέμματα θα φυτεύσει καλαμπόκι και πόσα τριφύλλι. Το καλαμπόκι του αποφέρει κέρδος 40€ από κάθε στρέμμα, ενώ το τριφύλλι 30€ από κάθε στρέμμα. Το καλαμπόκι χρειάζεται περίπου 2 ώρες εργασίας για κάθε στρέμμα, ενώ το τριφύλλι χρειάζεται μόνο 1 ώρα για κάθε στρέμμα. Μπορεί να απασχοληθεί στη γεωργική εργασία συνολικά 320 ώρες. Για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του πόσα στρέμματα θα καλλιεργήσει καλαμπόκι και πόσα τριφύλλι?

Παράδειγμα 2ο

- Στις εξετάσεις του μαθήματος υπάρχουν θέματα τύπου Α, τα οποία αξίζουν 10 βαθμούς και θέματα τύπου Β, τα οποία αξίζουν 15 βαθμούς. Χρειάζεστε 3 λεπτά για κάθε θέμα τύπου Α και 6 λεπτά για κάθε θέμα τύπου Β. Ο συνολικός διαθέσιμος χρόνος είναι 60 λεπτά και δεν σας επιτρέπεται να απαντήσετε σε περισσότερες από 16 ερωτήσεις. Θεωρώντας ότι όλες οι απαντήσεις σας είναι σωστές, πόσες θα πρέπει να επιλέξετε από κάθε τύπο, ώστε να επιτύχετε το μεγαλύτερο βαθμό?

Παράδειγμα 3ο

- Μια καντίνα ψήνει και πουλάει μπιφτέκια και λουκάνικα σε ποδοσφαιρικούς αγώνες. Για να παραμείνει στη δουλειά πρέπει να πουλάει τουλάχιστον 10 μπιφτέκια, αλλά δεν μπορεί να ψήσει περισσότερα από 40. Αντίστοιχα πρέπει να πουλάει τουλάχιστον 30 λουκάνικα, αλλά δεν μπορεί να ψήσει περισσότερα από 70. Επίσης δεν μπορεί να ψήσει για περισσότερα από 90 σάντουιτς συνολικά την ημέρα. Το καθαρό κέρδος από ένα μπιφτέκι είναι 0.33€ και από ένα λουκάνικο 0.21€. Πόσα από κάθε είδος πρέπει να πουλήσει, ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος?

Παράδειγμα 4ο

- Ένα κατάστημα δώρων πουλάει πολυτελή δένδρα τα Χριστούγεννα. Ο προμηθευτής της χρεώνει 80€ για φυσικό δένδρο και 160€ για τεχνητό δένδρο. Λόγω δυσμενούς οικονομικής ρευστότητας το κατάστημα θέλει να επενδύσει στην ελάχιστη ποσότητα δένδρων. Το κατάστημα μπορεί να αγοράσει από 20 έως και 90 φυσικά δένδρα. Μπορεί να αγοράσει έως και 100 τεχνητά δένδρα. Ο προμηθευτής μπορεί να παραδώσει μεταξύ 50 έως και 100 δένδρα στο σύνολο. Το κατάστημα απαιτεί να διαθέτει αριθμό τεχνητών δένδρων τουλάχιστον όσο ο μισός αριθμός των φυσικών δένδρων.

Παράδειγμα 5ο

- Ένας κτηνοτρόφος αναμιγνύει τροφή από 2 προμηθευτές, Α και Β, ώστε να παρέχει στα ζώα του. Σε κάθε τάισμα απαιτούνται τουλάχιστον 60 γραμμάρια πρωτεΐνης και 30 γραμμάρια λίπους. Η τροφή του προμηθευτή Α έχει 15 γραμμάρια πρωτεΐνης και 10 γραμμάρια λίπους και κοστίζει 80 λεπτά το κιλό. Η τροφή του προμηθευτή Β έχει 20 γραμμάρια πρωτεΐνης και 5 γραμμάρια λίπους και κοστίζει 50 λεπτά το κιλό. Πόση τροφή πρέπει να χρησιμοποιήσει από κάθε προμηθευτή, ώστε να ελαχιστοποιήσει το κόστος του?

Παράδειγμα 6ο

- Ένα εργοστάσιο παράγει 2 προϊόντα: το Α και το Β. Το εργοστάσιο διαθέτει 3 παραρτήματα Π1, Π2 και Π3. Το κέρδος από το προϊόν Α είναι 4€ ανά τεμάχιο και από το προϊόν Β 8€ ανά τεμάχιο. Το κάθε παράρτημα έχει τις παρακάτω δυνατότητες:

	ώρες / τμχ Α	ώρες / τμχ Α	μέγιστη δυναμικότητα
Π1	8 ώρες/τμχΑ	10ώρες/τμχΒ	11000ώρες max
Π2	4 ώρες/τμχΑ	10ώρες/τμχΒ	9000ώρες max
Π3	12 ώρες/τμχΑ	6ώρες/τμχΒ	12000ώρες max

Πώς θα μεγιστοποιηθεί το κέρδος?

Βασικά θεωρήματα

- Η τομή οποιουδήποτε αριθμού κυρτών συνόλων (convex sets) είναι επίσης κυρτή.

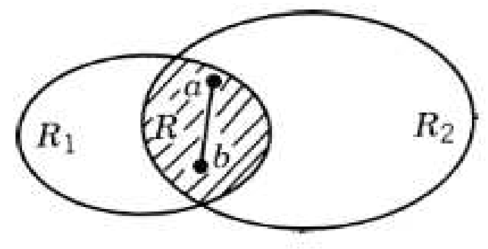


Figure 3.12 Intersection of two convex sets.

- Το σύνολο εφικτών λύσεων ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι κυρτό.
- Ένα τοπικό ελάχιστο που ανήκει σε ένα κυρτό σύνολο είναι και απόλυτο (καθολικό) ελάχιστο.
- Όλες οι βασικές εφικτές λύσεις είναι ακραία σημεία του κυρτού συνόλου εφικτών λύσεων.
- Έστω S ότι είναι κυρτό και κλειστό πολύεδρο. Η ελάχιστη τιμή μιας γραμμικής συνάρτησης στο S θα βρίσκεται στα συνοριακά σημεία του S.

Definitions

1. *Point in n-dimensional space.* A point $\mathbf{X}$ in an n-dimensional space is characterized by an ordered set of n values or coordinates $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. The coordinates of $\mathbf{X}$ are also called the *components* of $\mathbf{X}$.
2. *Line segment in n dimensions (L).* If the coordinates of two points A and B are given by $x_j^{(1)}$ and $x_j^{(2)} (j = 1, 2, \ldots, n)$, the line segment (L) joining these points is the collection of points $\mathbf{X}(\lambda)$ whose coordinates are given by $x_j = \lambda x_j^{(1)} + (1 - \lambda)x_j^{(2)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, with $0 \leq \lambda \leq 1$.
Thus

$$L = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}^{(1)} + (1 - \lambda)\mathbf{X}^{(2)}\} \tag{3.4}$$

In one dimension, for example, it is easy to see that the definition is in accordance with out experience (Fig. 3.7):

$$x^{(2)} - x(\lambda) = \lambda[x^{(2)} - x^{(1)}], \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{3.5}$$

whence

$$x(\lambda) = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{3.6}$$

3. *Hyperplane.* In n-dimensional space, the set of points whose coordinates satisfy a linear equation

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \mathbf{a}^T\mathbf{X} = b \tag{3.7}$$

is called a hyperplane. A hyperplane, H, is represented as

$$H(\mathbf{a}, b) = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{a}^T\mathbf{X} = b\} \tag{3.8}$$

A hyperplane has $n - 1$ dimensions in an n-dimensional space. For example, in three-dimensional space it is a plane, and in two-dimensional space it is a line. The set of points whose coordinates satisfy a linear inequality like $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \le b$ is called a *closed half-space*, closed due to the inclusion of an equality sign in the inequality above. A hyperplane partitions the n-dimensional space (E^n) into two closed half-spaces, so that

$$H^+ = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{a}^T\mathbf{X} \ge b\} \tag{3.9}$$

$$H^- = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{a}^T\mathbf{X} \le b\} \tag{3.10}$$

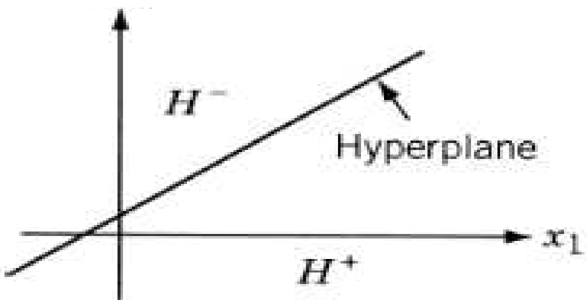


Figure 3.8 Hyperplane in two dimensions.

4. *Convex set.* A convex set is a collection of points such that if $\mathbf{X}^{(1)}$ and $\mathbf{X}^{(2)}$ are any two points in the collection, the line segment joining them is also in the collection. A convex set, S, can be defined mathematically as follows:

$$\text{If } \mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)} \in S, \quad \text{then} \quad \mathbf{X} \in S$$

where

$$\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{X}^{(2)}, \quad 0 \le \lambda \le 1$$

A set containing only one point is always considered to be convex. Some examples of convex sets in two dimensions are shown shaded in Fig. 3.9. On the other hand, the sets depicted by the shaded region in Fig. 3.10 are not convex. The L-shaped region, for example, is not a convex set because it is possible to find two points *a* and *b* in the set such that not all points on the line

Figure 3.9 Convex sets.

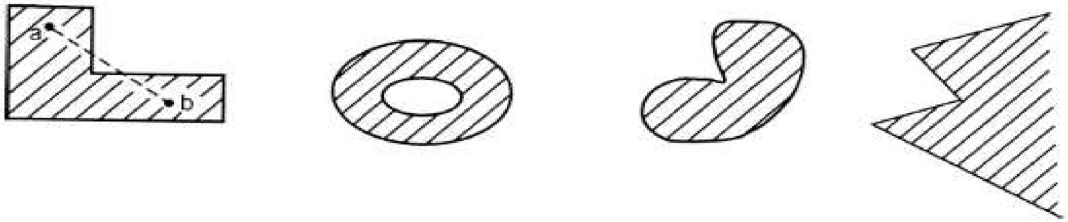
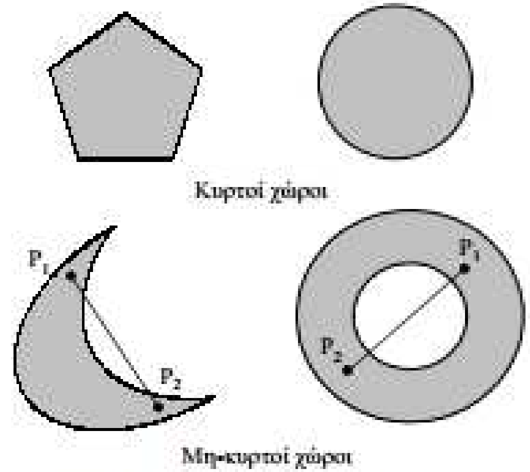


Figure 3.10 Nonconvex sets.



Σχήμα 5-2 Τύποι χώρων πολιτικής

5. *Convex polyhedron and convex polytope.* A convex polyhedron is a set of points common to one or more half-spaces. A convex polyhedron that is bounded is called a convex polytope.

Figure 3.11*a* and *b* represents convex polytopes in two and three dimensions, and Fig. 3.11*c* and *d* denotes convex polyhedra in two and three dimensions. It can be seen that a convex polygon, shown in Fig. 3.11*a* and *c*, can be considered as the intersection of one or more half-planes.

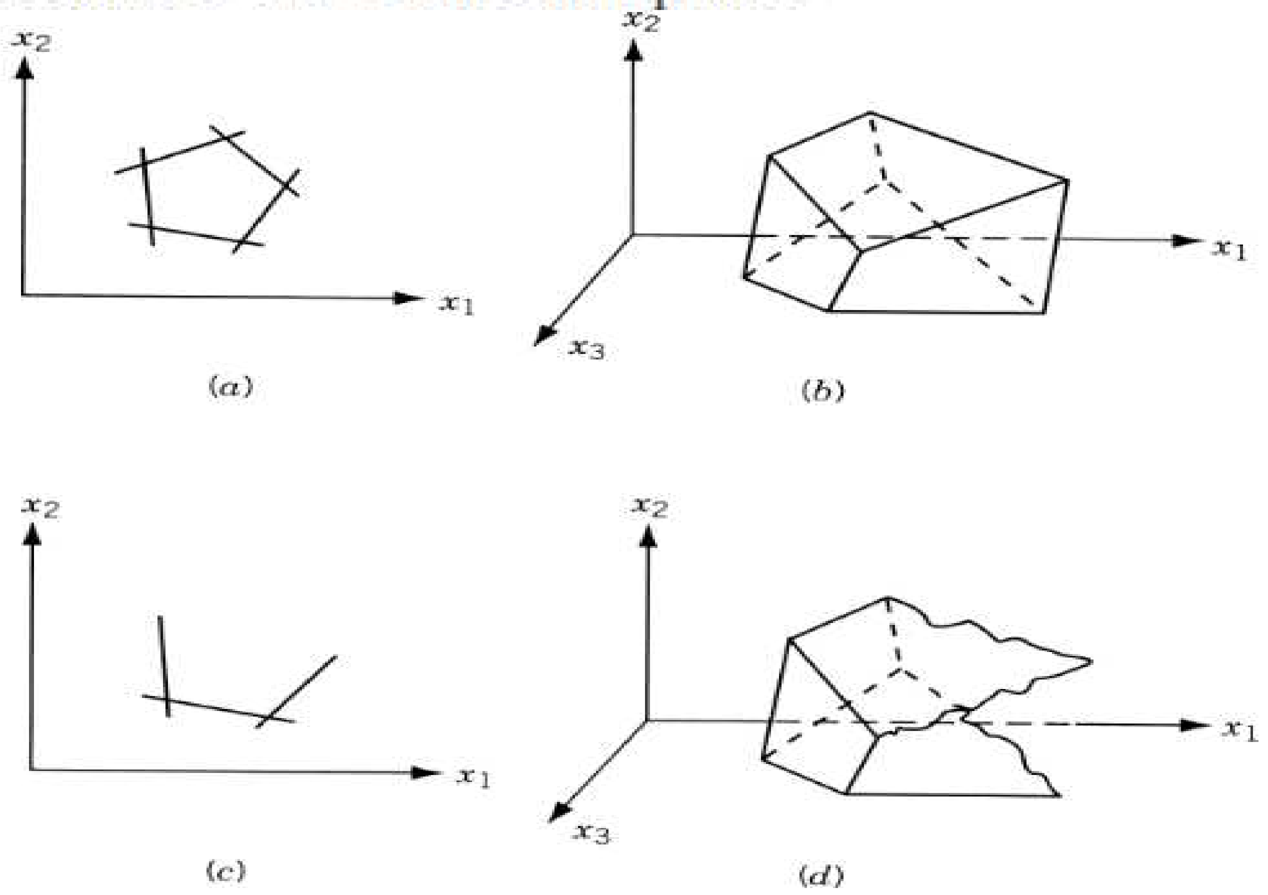


Figure 3.11 Convex polytopes in two and three dimensions (*a*, *b*) and convex polyhedra in two and three dimensions (*c*, *d*).

6. *Vertex or extreme point.* This is a point in the convex set that does not lie on a line segment joining two other points of the set. For example, every point on the circumference of a circle and each corner point of a polygon can be called a vertex or extreme point.
7. *Feasible solution.* In a linear programming problem, any solution that satisfies the constraints

$$\mathbf{aX} = \mathbf{b} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \tag{3.3}$$

is called a feasible solution.
8. *Basic solution.* A basic solution is one in which $n - m$ variables are set equal to zero. A basic solution can be obtained by setting $n - m$ variables to zero and solving the constraint Eqs. (3.2) simultaneously.
9. *Basis.* The collection of variables not set equal to zero to obtain the basic solution is called the basis.

10. *Basic feasible solution.* This is a basic solution that satisfies the nonnegativity conditions of Eq. (3.3).

11. *Nondegenerate basic feasible solution.* This is a basic feasible solution that has got exactly m positive x_i.

12. *Optimal solution.* A feasible solution that optimizes the objective function is called an optimal solution.

13. *Optimal basic solution.* This is a basic feasible solution for which the objective function is optimal.

- Περιστροφική αναγωγή (Pivotal reduction) συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους (m<n)