3ο Μάθημα – Συστήματα Συντεταγμένων και Μετασχηματισμοί στις 2Δ και 3Δ

Γραφικα

Ευάγγελος Σπύρου

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ακ. Έτος 2018-19

Σύνοψη του σημερινού μαθήματος

Εισαγωγή

- Στα γραφικά είναι πολλές φορές απαραίτητο να αλλάξει η **μορφή** των αντικειμένων ή να αλλάξει το **σύστημα** των συντεταγμένων
- Για παράδειγμα, η ψηφιακή μορφή ενός αυτοκινήτου μπορεί να χρησιμοποιηθεί **πολλές** φορές στο μοντέλο μιας σκηνής
- Μπορεί να είναι τοποθετημένο σε διάφορες **θέσεις**, **προσανατολισμούς**, αλλά και να έχει διάφορα **μεγέθη**
- Στη **συνθετική** κίνηση, ένα αντικείμενο μπορεί να αλλάζει από καρέ σε καρέ
- Αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να εμπλέκει τη **θέση**, τον **προσανατολισμό**, το **μέγεθος**, ακόμη και το **σχήμα** του

Εισαγωγή

- Όλες οι παραπάνω αλλαγές χρησιμοποιούν για την υλοποίησή τους **μετασχηματισμούς συντεταγμένων**
- Είναι το πιο **σημαντικό** και κλασικό θέμα στα γραφικά
- Είναι τα “εργαλεία της **αλλαγής**”

Εισαγωγή

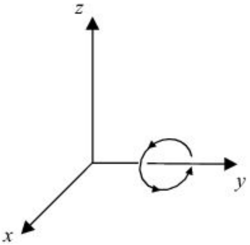
- Τα **σημεία** στον 3Δ Ευκλίδειο χώρο θα παριστάνονται σαν διανύσματα **στήλες** 3×1
- Δηλαδή:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

- Ενώ οι γραμμικοί **μετασχηματισμοί** σαν **πίνακες** 3×3 που πολλαπλασιάζονται από **αριστερά** με ένα σημείο, παράγοντας ένα άλλο **σημείο**

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Εισαγωγή



- Τα συστήματα συντεταγμένων που θα χρησιμοποιούμε θα είναι **δεξιόστροφα**

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί

- Στα μαθηματικά, **μετασχηματισμός** ονομάζεται μια απεικόνιση στην οποία τα πεδία ορισμού και τιμών είναι το **ίδιο** σύνολο, π.χ. από το $\mathbb{E}^3$ στο $\mathbb{E}^3$
  - Στα γραφικά μας ενδιαφέρουν κυρίως οι **συσχετισμένοι** μετασχηματισμοί οι οποίοι **διατηρούν** σημαντικές γεωμετρικές ιδιότητες των αντικείμενων
  - Διατηρούν τους συσχετισμένους συνδυασμούς που περιλαμβάνουν **ευθύγραμμα** τμήματα και κυρτά **πολύγωνα** (δομικά στοιχεία των μοντέλων μας)
- Για ένα σύνολο από σημεία $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{E}^3$, ορίζεται ο **συσχετισμένος συνδυασμός** τους ως

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{p}_i$$

με $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί

- Στην προηγούμενη σχέση, τα $a_0, a_1, \ldots a_n$ είναι οι συσχετισμένες **συντεταγμένες** του $\mathbf{p}$ σε σχέση με τα $\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n$
- Ένας συσχετισμένος συνδυασμός είναι **κυρτός** αν όλες οι συσχετισμένες συντεταγμένες a_i είναι **μη αρνητικές**
- Στην περίπτωση αυτή, ο συσχετισμένος συνδυασμός $\mathbf{p}$ είναι **εντός** της κυρτής περιβάλλουσας των αρχικών σημείων $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$
- Τα ευθύγραμμα τμήματα, τα τρίγωνα, τα τετράεδρα (βασικά δομικά στοιχεία για την κατασκευή των αντίστοιχων μοντέλων) είναι **ειδικές** περιπτώσεις συσχετισμένων συνδυασμών
- Οι συνήθεις **πράξεις** στα γραφικά (π.χ., στροφή, μετατόπιση) είναι **συσχετισμένοι μετασχηματισμοί**

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί

Ορισμός

*Μια απεικόνιση $\Phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^3$ ονομάζεται **συσχετισμένος μετασχηματισμός**, εάν αφήνει **αναλλοίωτους** τους συσχετισμένους συνδυασμούς. Με άλλα λόγια, εάν $\mathbf{p} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{p}_i$ ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός, τότε:*

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi(\mathbf{p}_i)$$

- Το αποτέλεσμα της εφαρμογής ενός συσχετισμένου μετασχηματισμού πάνω στο αποτέλεσμα $\mathbf{p}$ ενός συσχετισμένου συνδυασμού πρέπει να **ισούται** με τον συσχετισμένο συνδυασμό των αποτελεσμάτων της εφαρμογής του συσχετισμένου μετασχηματισμού, πάνω στα **αρχικά** σημεία, με τα ίδια βάρη a_i

Πρακτική σημασία

- Ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός μπορεί να εφαρμοσθεί πάνω σε ένα συσχετισμένο συνδυασμό εφαρμοζόμενος **μόνο** πάνω στα σημεία ορισμού και όχι στα “εσωτερικά” σημεία του
- Π.χ., για να εφαρμοσθεί ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός σε ένα τρίγωνο, είναι αρκετό θεωρητικά να εφαρμοσθεί στις 3 **κορυφές** του και δε χρειάζεται να εφαρμοσθεί στα **άπειρα** εσωτερικά του σημεία

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί

- Έστω $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ ένα **σημείο**, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί με 3×1 πίνακα ως $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$
- Ένας συσχετισμένος **μετασχηματισμός** Φ είναι $\Phi(\mathbf{p}) = A \cdot \mathbf{p} + \vec{t}$
- A είναι **πίνακας** 3×3, π.χ., $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
- $\vec{t}$ είναι ένα **διάνυσμα** 3×1 με $\vec{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$

Μεταφορά

Ορισμός

Η ***μεταφορά*** *εκφράζει* ***μετακίνηση*** *κατά συγκεκριμένη απόσταση και σε συγκεκριμένη κατεύθυνση. Και τα δύο ορίζονται από το* ***διάνυσμα μεταφοράς****. Μια μεταφορά του σημείου* $\mathbf{p}(x, y) \in \mathbb{E}^2$*, κατά το* $\vec{d} = (d_x, d_y) \in \mathbb{R}^2$*, ώστε το* $\mathbf{p}$ *να βρεθεί στο* $\mathbf{p}'(x', y') \in \mathbb{E}^2$*:*

$$x' = x + d_x, \quad y' = y + d_y \ .$$

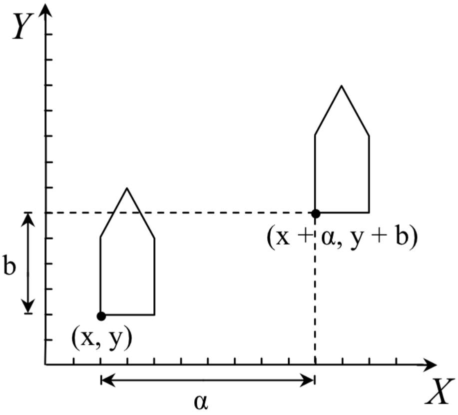
Θεωρώντας 2×1 *πίνακες*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \vec{d} \ ,$$

όπου

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} \ .$$

Μεταφορά



Μεταφορά κατά το διάνυσμα (a, b)

Αλλαγή Κλίμακας

Ορισμός

*Η **αλλαγή κλίμακας** αλλάζει το **μέγεθος** των αντικειμένων. Μπορεί να αφορά μεγεύθυνση ή σμίκρυνση των συντεταγμένων του* $\mathbf{p}(x, y)$*, μέσω των* s_x *και* s_y*, οι οποίοι επιδρούν κατά μήκος των αξόνων* x *και* y*, αντίστοιχα:*

$$x' = s_x \cdot x, \quad y' = s_y \cdot y \; .$$

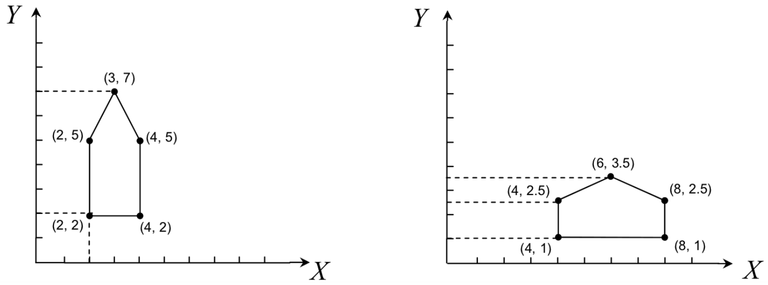
Θεωρώντας 2×1 *πίνακες για τα σημεία και* 2×2 *για την αλλαγή κλίμακας*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}(s_x, s_y)\mathbf{p} \; ,$$

όπου

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \; .$$

Αλλαγή Κλίμακας



Αλλαγή κλίμακας κατά $s_x = 2$ και $s_y = 1/2$ στους άξονες x και y, αντίστοιχα
Δεν είναι δυνατόν να **παρατηρηθεί** αλλαγή κλίμακας σε σημείο!
Έχει ως **παρενέργεια** μια μεταφορά, η οποία εξαρτάται από τον αντίστοιχο παράγοντα!

Αλλαγή Κλίμακας

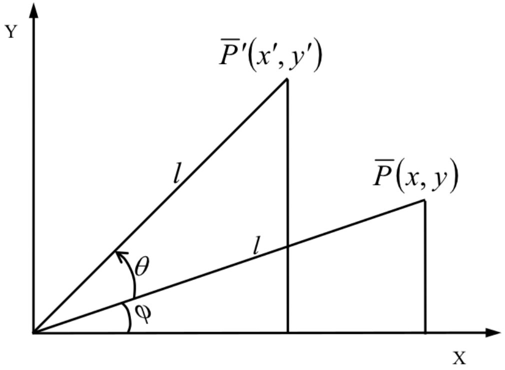
- Αν $s_x < 1$ ή $s_y < 1$, τότε γίνεται **σμίκρυνση** και **μετακίνηση προς** το κέντρο κατά τον αντίστοιχο άξονα
- Αν $s_x > 1$ ή $s_y > 1$, τότε γίνεται **μεγεύθυνση** και **απομάκρυνση από** το κέντρο κατά τον αντίστοιχο άξονα
- Αν $s_x \neq s_y$, τότε **αλλάζουν** οι αναλογίες
- Αν $s_x = s_y$, τότε **δεν αλλάζουν** οι αναλογίες (**ισοτροπική** αλλαγή κλίμακας)
- Για αλλαγή κλίμακας με παράγοντα -1 παρατηρείται **κατοπτρισμός** προς τον αντίστοιχο άξονα
- Αντικείμενα “κεντραρισμένα” στο $\mathbf{O}$ δεν αλλάζουν θέση, παρά μόνο **μέγεθος**!

Περιστροφή Σημείου

Ορισμός

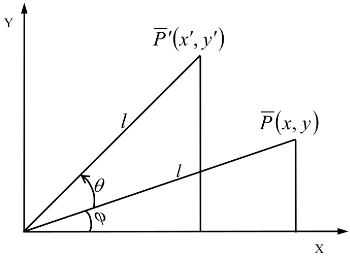
*Η **περιστροφή** περιστρέφει αντικείμενα γύρω από το κέντρο συντεταγμένων, χωρίς να αλλάζει η απόσταση από αυτό. Η περιστροφή σημείου* $\mathbf{p}(x, y)$ *κατά γωνία* θ, *γύρω από την αρχή των αξόνων κατά τη μαθηματική φορά (αντίθετη των δεικτών του ρολογιού), δηλαδή κατά θετική γωνία, φέρνει το* $\mathbf{p}$ *στη θέση* $\mathbf{p}'(x', y')$

Περιστροφή Σημείου



Περιστροφή σημείου κατά (θετική) γωνία θ

Περιστροφή Σημείου



- Από το σχήμα:
  $x' = l\cos(\phi+\theta) = l(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$
  $y' = l\sin(\phi+\theta) = l(\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta$
- Άρα $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ή $\mathbf{p}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{p}$, $\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
- Για **αρνητικές** γωνίες, ο πίνακας περιστροφής γίνεται

$$\mathbf{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Στρέβλωση

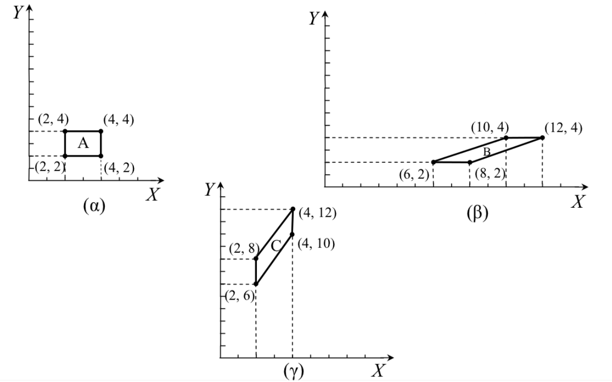
Ορισμός

*Η **στρέβλωση** έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή μιας συντεταγμένης αντικειμένου κατά ποσό που εξαρτάται από την τιμή της άλλης συντεταγμένης, επί τον παράγοντα στρέβλωσης. Μια στρέβλωση του* $\mathbf{p}(x, y)$ *κατά μήκος του* x *άξονα με παράγοντα στρέβλωσης* a*, φέρνει το* $\mathbf{p}$ *στο* $\mathbf{p}'(x, y)$*, με* $x' = x + ay, \quad y' = y$ *.*
Θεωρώντας 2×1 *πίνακες για τα σημεία και* 2×2 *για τη στρέβλωση* $\mathbf{p}' = \mathbf{SH}_x\mathbf{p}$ *, όπου*

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{SX}_x(a) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Αντίστοιχα, για στρέβλωση κατά μήκος του y *άξονα, κατά παράγοντα* b*, θα πρέπει* $\mathbf{SH}_y(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$.

Στρέβλωση



Στρέβλωση του τετραγώνου A κατά μήκος του x και του y άξονα κατά $a = 2$ και $b = 2$

Πρακτικοί μετασχηματισμοί

- Οι **πρακτικά** χρήσιμοι μετασχηματισμοί στα γραφικά, **σπάνια** αποτελούνται από έναν απλό βασικό μετασχηματισμό
- Συνήθως αποτελούνται από δύο η **περισσότερα** βήματα
- Τέτοιοι μετασχηματισμοί πρέπει να εφαρμοσθούν στα αντικείμενα μιας **σκηνής**, τα οποία μπορεί να απαρτίζονται από χιλιάδες ή και **εκατομμύρια** κορυφές
- Π.χ., αν επιθυμούμε να **περιστρέψουμε** ένα αντικείμενο κατά 45° και στη συνέχεια να του αλλάξουμε **κλίμακα** ισοτροπικά κατά παράγοντα 2, θα πρέπει να εφαρμόσουμε πρώτα τον πίνακα περιστροφής $\mathbf{R}(45^\circ)$ και έπειτα τον πίνακα αλλαγής κλίμακας $\mathbf{S}(2,2)$

Εφαρμογή διαδοχικών μετασχηματισμών

- Είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς **διαδοχικά** σε κάθε κορυφή $\mathbf{p}$ ως: $\mathbf{S}(2,2)\cdot(\mathbf{R}(45°)\cdot\mathbf{p})$
- Ωστόσο, είναι πιο **αποτελεσματικό** να εκμεταλλευτούμε την **προσεταιριστική** ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων
- Έτσι, μπορούμε να εφαρμόσουμε το **σύνθετο** μετασχηματισμό (πίνακα) στις κορυφές $(\mathbf{S}(2,2)\cdot\mathbf{R}(45°))\cdot\mathbf{p}$
- Ο σύνθετος μετασχηματισμός υπολογίζεται μόνο **μία** φορά και εφαρμόζεται **διαδοχικά** στις κορυφές
- **Μειώνεται** έτσι το υπολογιστικό κόστος

Εφαρμογή διαδοχικών μετασχηματισμών

- Ο πολλαπλασιασμός πινάκων **δεν** έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα – η **σειρά** του γινομένου των βασικών πινάκων του μετασχηματισμού είναι σημαντική
- Καθώς έχουμε επιλέξει την παράσταση ενός σημείου ως διάνυσμα-**στήλη**, οι πίνακες των μετασχηματισμών πολλαπλασιάζονται από **αριστερά** με τα σημεία
- Έτσι, πρέπει να γράψουμε τη σύνθεση πινάκων με σειρά **αντίστροφη** της εφαρμογής τους
- Στο προηγούμενο παράδειγμα, για να εφαρμόσουμε **πρώτα** την περιστροφή και **μετά** την αλλαγή κλίμακας, υπολογίζουμε τον σύνθετο πίνακα $\mathbf{S}(2,2) \cdot \mathbf{R}(45°)$
- Γενικά, για την εφαρμογή της **ακολουθίας** μετασχηματισμών $T_1, T_2, \cdots, T_m$ υπολογίζουμε τον σύνθετο πίνακα $\mathbf{T_m} \cdot \ldots \cdot \mathbf{T_2} \cdot \mathbf{T_1}$

Ομογενείς Συντεταγμένες

- Η μεταφορά **δεν** μπορεί να παρασταθεί με πολλ/μό πινάκων, π.χ. για μεταφορά από το $\mathbf{O}$ θα είχαμε:

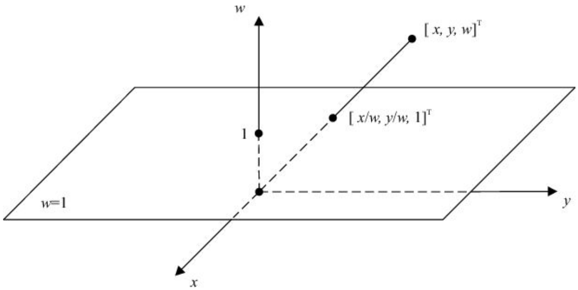
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Για την αναπαράσταση και της μεταφοράς με πολλ/μό, πρέπει να **αλλαχθεί** το σταθερό σημείο
- Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται οι **ομογενείς συντεταγμένες**
- Σε κάθε σημείο εισάγεται μια **τρίτη** συντεταγμένη και έτσι το $(x, y) \mapsto (x, y, w), \;\; w \neq 0$
- Για την ακρίβεια, η **τριάδα** (x, y, w) παριστάνει τις ομογενείς συντεταγμένες του $(x/w, y/w) \in \mathbb{E}^2$
- Κάθε σημείο έχει **άπειρες** παραστάσεις!

Ομογενείς Συντεταγμένες

- Για $w = 1$, προκύπτει η **βασική παράσταση** και το $\mathbf{p}(x, y)$ έχει ομογενείς συντεταγμένες τις $(x, y, 1)$
- Έτσι, με ομογενείς συντεταγμένες, το $(0, 0, 1)$ μπορεί να μετασχηματιστεί όπως **οποιοδήποτε** άλλο σημείο
- Οι τριάδες (x, y, w) και (tx, ty, tw) παριστάνουν το **ίδιο** σημείο
- Η τριάδα $(0, 0, 0)$ **δεν** είναι επιτρεπτή

Ομογενείς συντεταγμένες



Θέτοντας πάντα $w = 1$, διατηρούμε την αρχική διάσταση του χώρου, αφού χρησιμοποιούμε την τομή $w = 1$

Στην 2Δ περίπτωση, χρησιμοποιούμε το επίπεδο $w = 1$ αντί του xy

Ομογενείς Συντεταγμένες

- Θεωρώντας όλες τις τριάδες $(tx, ty, tw), \ t \neq 0$, (παριστάνουν το ίδιο σημείο) σχηματίζουν μια **ευθεία** στον 3Δ χώρο
- **Ομογενοποιώντας**, προκύπτει τριάδα της μορφής $(x, y, 1)$
- Τα ομογενοποιημένα αυτά σημεία σχηματίζουν το **επίπεδο** $w = 1$ του (x, y, w) συστήματος συντεταγμένων
- Σημεία στο άπειρο $(w = 0)$ **δεν** μπορουν να παρασταθούν!

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

- Με ομογενείς συντεταγμένες, ένα σημείο του $\mathbb{E}^2$ περιγράφεται με 3×1 **πίνακα**
- Είναι προφανές ότι οι **γραμμικοί** μετασχηματισμοί πρέπει να περιγράφονται με 3×3 πίνακες

Μεταφορά σε Ομογενείς Συντεταγμένες

- Οι εξισώσεις **μεταφοράς** γράφονται:
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$
- ή $\mathbf{p}' = \mathbf{T}(\vec{d})\mathbf{p}$, με $\mathbf{T}(\vec{d}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Επειδή $\mathbf{T}^{-1}(\vec{d}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, προκύπτει ότι ο **αντίστροφος** μετασχηματισμός είναι η **μεταφορά** κατά διάνυσμα $-\vec{d} = (-d_x, -d_y)$
- Δηλαδή $\mathbf{T}^{-1}(\vec{d}) = \mathbf{T}(-\vec{d})$

Μεταφορά σε Ομογενείς Συντεταγμένες

- Η **διαδοχική** εκτέλεση δύο μεταφορών κατά τα διανύσματα $\vec{d_1} = (d_{x_1}, d_{y_1})$ και $\vec{d_2} = (d_{x_2}, d_{y_2})$ υπολογίζεται ως εξής:
  1. $\mathbf{p}' = \mathbf{T}(d_{x_1}, d_{y_1})\mathbf{p}$
  2. $\mathbf{p}'' = \mathbf{T}(d_{x_2}, d_{y_2})\mathbf{p}' = \mathbf{T}(d_{x_2}, d_{y_2})\mathbf{T}(d_{x_1}, d_{y_1})\mathbf{p}$
- Όμως:

$$\mathbf{T}(d_{x_2}, d_{y_2})\mathbf{T}(d_{x_1}, d_{y_1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x_1} + d_{x_2} \\ 0 & 1 & d_{y_1} + d_{y_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Άρα η **συνολική** μετατόπιση θα είναι $\mathbf{T}(\vec{d_1} + \vec{d_2})$

Αλλαγή Κλίμακας σε Ομογενείς Συντεταγμένες

- Η εξίσωση αλλαγής **κλίμακας** σε ομογενείς συντεταγμένες γράφεται

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Για τον **αντίστροφο** $\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y)$ του $\mathbf{S}(s_x, s_y)$ ισχύει ότι

$$\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(1/s_x, 1/s_y)$$

Αλλαγή Κλίμακας σε Ομογενείς Συντεταγμένες

- Η **διαδοχική** εκτέλεση δύο πράξεων αλλαγής κλίμακας με παράγοντες (s_{x1}, s_{y1}) και (s_{x2}, s_{y2}), περιγράφεται από τον πίνακα που προκύπτει από τον **πολλαπλασιασμό** των $\mathbf{S}(s_{x_1}, s_{y_1})$ και $\mathbf{S}(s_{x_2}, s_{y_2})$

$$\mathbf{S}(s_{x_2}, s_{y_2})\mathbf{S}(s_{x_1}, s_{y_1}) = \begin{bmatrix} s_{x_1}s_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_1}s_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(s_{x_1}s_{x_2}, s_{y_1}s_{y_2})$$

Περιστροφή σε Ομογενείς Συντεταγμένες

- Η εξίσωση **περιστροφής** σε ομογενείς συντεταγμένες γράφεται

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Για τον **αντίστροφο** $\mathbf{R}^{-1}(\theta)$ του $\mathbf{R}(\theta)$ ισχύει ότι

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Προφανώς $\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}^{T}(\theta)$

Περιστροφή σε Ομογενείς Συντεταγμένες

- Η **διαδοχική** εκτέλεση δύο περιστροφών πρώτα κατά γωνία θ_1 και έπειτα κατά γωνία θ_2 περιγράφεται από τον πίνακα

$$\mathbf{R}(\theta_2)\mathbf{R}(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\theta_1+\theta_2)$$

Στρέβλωση σε Ομογενείς Συντεταγμένες

- Για την περίπτωση της **στρέβλωσης**, οι πίνακες $\mathbf{SH}_x$ και $\mathbf{SH}_y$ γράφονται

$$\mathbf{SH}_x(a) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{SH}_y(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στρέβλωση σε Ομογενείς Συντεταγμένες

- Για την αντιστροφή της στρέβλωσης χρησιμοποιείται ο **αντίθετος παράγοντας** στρέβλωσης:

$$\mathbf{SH}_x^{-1}(a) = \mathbf{SH}_x(-a) = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{SH}_y^{-1}(b) = \mathbf{SH}_y(-b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ = b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σύνθεση Μετασχηματισμών

- Κάνοντας χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού πινάκων, μια **ακολουθία** μετασχηματισμών που εφαρμόζονται σε μια εικόνα μπορεί να αναπαρασταθεί με **μόνο έναν** πίνακα
- Π.χ., η αλλαγή κλίμακας ως προς σημείο $\mathbf{c} = (c_x, c_y, 1)$ (και όχι με το $\mathbf{O}$), επιτυγχάνεται σε 3 **βήματα**:
  1. **Μεταφορά** του αντικειμένου κατά διάνυσμα $-\vec{c} = \mathbf{O} - \mathbf{c}$, ώστε να έρθει το $\mathbf{c}$ στο $\mathbf{O}$
  2. **Αλλαγή κλίμακας** με παράγοντες (s_x, s_y)
  3. **Μεταφορά** του αντικειμένου κατά διάνυσμα $\vec{c} = \mathbf{O} - \mathbf{c}$, ώστε το σημείο $\mathbf{c}$ να **επιστρέψει** στην αρχική του θέση
- Ο **συνολικός** μετασχηματισμός εκφράζεται ως

$$\mathbf{S}_{all} = \mathbf{T}(c_x, c_y)\mathbf{S}(s_x, s_y)\mathbf{T}(-c_x, -c_y) = \ldots = \begin{bmatrix} s_x & 0 & c_x(1-s_x) \\ 0 & s_y & c_y(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σύνθεση Μετασχηματισμών

- Άρα, η εφαρμογή ενός μετασχηματισμού πάνω σε ένα **αντικείμενο** (μετασχηματισμός αντικειμένου) είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή του **αντίστροφου** μετασχηματισμού πάνω στο **σύστημα συντεταγμένων** (μετασχηματισμός άξονα)
  - π.χ., ισοτροπική αλλαγή κλίμακας **αντικειμένου** κατά 2 είναι ισοδύναμη με την αλλαγή κλίμακας του **συστήματος συντεταγμένων** κατά $1/2$ (σμίκρυνση)
- Επίσης, ισχύουν οι εξής χρήσιμες **ιδιότητες**:
  - $T(x_1, y_1)T(x_2, y_2) = T(x_2, y_2)T(x_1, y_1) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
  - $S(s_{x_1}, s_{y_1})S(s_{x_2}, s_{y_2}) = S(s_{x_2}, s_{y_2})S(s_{x_1}, s_{y_1}) = S(s_{x_1}s_{x_2}, s_{y_1}s_{y_2})$
  - $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1) = R(\theta_1 + \theta_2)$
  - $S(s_x, s_y)R(\theta) = R(\theta)S(s_x, s_y)$, **μόνο** εάν $s_x = s_y$
- Στις περιπτώσεις αυτές ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, η οποία γενικά **ΔΕΝ** ισχύει

Πίνακες Μετασχηματισμού στον 3Δ χώρο

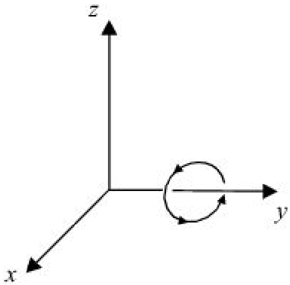
- Ανάλογα με την περίπτωση των 2Δ, ένα σημείο του **3Δ** χώρου που εώς τώρα συμβολιζόταν με τον 3×1 πίνακα $(x, y, z)^T$ με ομογενείς συντεταγμένες, τώρα συμβολίζεται με τον 4×1 πίνακα $(x, y, z, w)^T$
- Έτσι, δύο τετράδες παριστάνουν το **ίδιο** σημείο όταν π.χ. $(x, y, z, w)^T$ και $(xt, yt, zt, wt)^T, t \neq 0$
- Το σημείο έχει **βασική** παράσταση $(x/w, y/w, z/w, 1)^T$
- Η παράσταση αυτή χρησιμοποιείται **συνήθως** στα γραφικά

Πίνακες Μετασχηματισμού στον 3Δ χώρο

- Άρα, ανάλογα με την 2Δ περίπτωση, οι ομογενείς συντεταγμένες $(x, y, z, w)^T$ του $\mathbb{E}^3$ μπορούν να θεωρηθούν ως **καρτεσιανές** σημείου του $\mathbb{E}^4$
- Η τετράδα $(0, 0, 0, 0)^T$ **δεν** είναι επιτρεπτή
- Όλες οι τετράδες $(xt, yt, zt, wt)^T, t \neq 0$ που παριστάνουν το ίδιο σημείο του $\mathbb{E}^3$ αντιστοιχούν σε μια **ευθεία** του $\mathbb{E}^4$
- Η ομογενοποίηση οδηγεί σε 3Δ **υποχώρο** του 4Δ χώρου (προβολή στο επίπεδο $w = 1$ του $\mathbb{E}^4$)
- Σημεία με $w = 0$ (στο άπειρο) **δεν** μπορούν να παρασταθούν στο $w = 1$

Πίνακες Μετασχηματισμού στον 3Δ χώρο

- Χρησιμοποιείται **δεξιόστροφο** σύστημα συντεταγμένων



- **Θετική** στροφή: αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού
- Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί παριστάνονται με 4×4 **πίνακες**

Μεταφορά στον 3Δ χώρο

- Η **μεταφορά** του $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ με ομογενείς συντεταγμένες $(x, y, z, 1)^T$, κατά το $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$ γίνεται με τον πίνακα

$$\mathbf{T}(\vec{d}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Έτσι το $\mathbf{p}$ μεταφέρεται στο $\mathbf{p}'(x', y', z')$ με

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\vec{d}) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αλλαγή Κλίμακας στον 3Δ χώρο

- Η **αλλαγή κλίμακας** του $\mathbf{P} \in \mathbb{E}^3$ με ομογενείς συντεταγμένες $(x, y, z, 1)^T$, με τρεις παράγοντες s_x, s_y, s_z κατά μήκος των αξόνων x, y, z, αντίστοιχα, γίνεται με τον πίνακα

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Έτσι το $\mathbf{P}$ μεταφέρεται στο $\mathbf{P}'(x', y', z')$ με

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Περιστροφή στον 3Δ χώρο

- Η 3Δ περιστροφή είναι αρκετά **διαφορετική** από την 2Δ
- Αυτό, καθώς το αντικείμενο που περιστρέφουμε είναι ένας **άξονας** και όχι ένα σημείο
- Ο άξονας περιστροφής μπορεί να είναι **τυχαίος**, αλλά οι βασικοί μετασχηματισμοί περιστροφής στρέφουν γύρω από τους **κύριους** άξονες x, y, z
- Αυτοί μπορούν να **συνδυαστούν** για περιγράψουν περιστροφή γύρω από **τυχαίο** άξονα
- Σε **δεξιόστροφο** σύστημα συντεταγμένων, η περιστροφή γύρω από άξονα a είναι **θετική**, αν είναι **αντίστροφη** της φοράς των δεικτών του ρολογιού, όταν την παρατηρούμε από το θετικό τμήμα του άξονα ως προς το κέντρο
- Κατά την 3Δ περιστροφή, η **απόσταση** από τον άξονα περιστροφής **δεν** μεταβάλλεται

Περιστροφή στον 3Δ χώρο

- Οι πίνακες $\mathbf{R}_x(\theta), \mathbf{R}_y(\theta), \mathbf{R}_z(\theta)$ που χρησιμοποιούνται για **στροφές** γύρω από τους άξονες x, y, z, αντιστοιχα, ορίζονται ως
  - $\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 \\ 0 & sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Στροφή στον 3Δ χώρο

- Είναι φανερό ότι στροφή κατά γωνία θ γύρω π.χ. από τον z-άξονα αντιστοιχεί σε στροφή στις **δύο** διαστάσεις:
  - $$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta x - sin\theta y \\ sin\theta x + cos\theta y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$
  - αντίστοιχα με
    $$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta x - sin\theta y \\ sin\theta x + cos\theta y \\ 1 \end{bmatrix}$$
  - **Ανάλογη** θεώρηση μπορεί να γίνει και για τους $\mathbf{R}_x(\theta), \mathbf{R}_y(\theta)$

Στρέβλωση στον 3Δ χώρο

- Ο 3Δ μετασχηματισμός στρέβλωσης “στρεβλώνει” αντικείμενα ως προς **ένα** από τα κύρια επίπεδα
- Με άλλα λόγια, **αυξάνει τις δύο** συντεταγμένες κατά ποσό **ίσο με την τρίτη** συντεταγμένη, επί τους αντίστοιχους **παράγοντες** στρέβλωσης
- Συνεπώς, υπάρχουν **3** περιπτώσεις στρέβλωσης στον **3Δ** χώρο
  01. Στρέβλωση στο (XY)-επίπεδο
  02. Στρέβλωση στο (YZ)-επίπεδο
  03. Στρέβλωση στο (XZ)-επίπεδο

Στρέβλωση στο (XY)-επίπεδο

- Η $z-$συντεταγμένη παραμένει **αμετάβλητη**
- Αν a, b οι παράγοντες στρέβλωσης κατά μήκος των αξόνων x, y, αντίστοιχα, η στρέβλωση με **ομογενείς** συντεταγμένες περιγράφεται ως εξής

$$\mathbf{SH}_{x,y}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Δηλαδή, ο μετασχηματισμός $\mathbf{SH}_{x,y}(a,b)$ στο σημείο $(x, y, z, 1)^T$ το **μεταφέρει** στο $(x', y', z', 1)^T$ ως εξής

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{SH}_{x,y}(a,b) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + az \\ y + az \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Στρέβλωση στο (YZ)-επίπεδο

- Η $x-$συντεταγμένη παραμένει **αμετάβλητη**
- Αν a, b οι παράγοντες στρέβλωσης κατά μήκος των αξόνων y, z, αντίστοιχα, η στρέβλωση με **ομογενείς** συντεταγμένες περιγράφεται ως εξής

$$\mathbf{SH}_{y,z}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Δηλαδή, ο μετασχηματισμός $\mathbf{SH}_{y,z}(a,b)$ στο σημείο $(x,y,z,1)^T$ το **μεταφέρει** στο $(x',y',z',1)^T$ ως εξής

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{SH}_{y,z}(a,b) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y+ax \\ z+bx \\ 1 \end{bmatrix}$$

Στρέβλωση στο (XZ)-επίπεδο

- Η $y-$συντεταγμένη παραμένει **αμετάβλητη**
- Αν a, b οι παράγοντες στρέβλωσης κατά μήκος των αξόνων x, z, αντίστοιχα, η στρέβλωση με **ομογενείς** συντεταγμένες περιγράφεται ως εξής

$$\mathbf{SH}_{x,z}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Δηλαδή, ο μετασχηματισμός $\mathbf{SH}_{x,z}(a,b)$ στο σημείο $(x,y,z,1)^T$ το **μεταφέρει** στο $(x',y',z',1)^T$ ως εξής

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{SH}_{x,z}(a,b) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+ay \\ y \\ z+by \\ 1 \end{bmatrix}$$

Γεωμετρικές Ιδιότητες

- Οι μετασχηματισμοί μετατόπισης, περιστροφής, αλλαγής κλίμακας και στρέβλωσης είναι **συσχετισμένοι**
- Η ευρεία αποδοχή των συσχετισμένων μετασχηματισμών στα γραφικά και την οπτικοποίηση οφείλεται στο γεγονός ότι **διατηρούν** σημαντικές γεωμετρικές **ιδιότητες** των αντικειμένων
- Δηλαδή, αν Φ ένας από τους παραπάνω μετασχηματισμούς, και $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ δύο σημεία, τότε

$$\Phi(\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q}) = \lambda\Phi(\mathbf{p}) + (1-\lambda)\Phi(\mathbf{q}), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

- Το σύνολο $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q}$ είναι το **ευθύγραμμο** τμήμα ανάμεσα στα $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$

Γεωμετρικές Ιδιότητες - Συμπεράσματα

Συμπέρασμα

*Η προηγούμενη σχέση δηλώνει ότι η απεικόνιση ευθύγραμμου τμήματος από τον F είναι και πάλι ευθύγραμμο τμήμα και η σχέση $\lambda/(1-\lambda)$ παραμένει **αναλλοίωτη** (διατηρούνται οι λόγοι αποστάσεων).*

Συμπέρασμα

*Παράλληλες ευθείες παραμένουν **παράλληλες** κάτω από συσχετισμένους μετασχηματισμούς*

Συμπέρασμα

*Αρκεί να απεικονίζονται μόνο τα **άκρα** $(\mathbf{p}, \mathbf{p})$ των ευθυγράμμων τμημάτων. Τα υπόλοιπα σημεία προκύπτουν με **παρεμβολή** στα $(\Phi(\mathbf{p}), \Phi(\mathbf{p}))$*

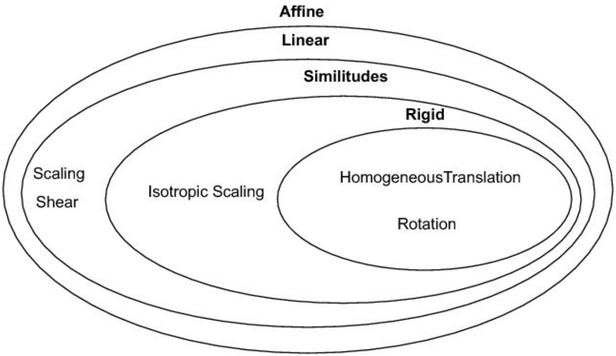
Γεωμετρικές Ιδιότητες - Συνοπτικά

Ιδιότητα	Συσχετισμένοι	Γραμμικοί	Ομοιότητος	Στερεοί
Γωνίες	Όχι	Όχι	Ναι	Ναι
Αποστάσεις	Όχι	Όχι	Όχι	Ναι
Λόγοι Αποστάσεων	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
Παραλληλία Ευθειών	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
Συσχετισμένοι Συνδυασμοί	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
Ευθείες γραμμές	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
Λόγοι αναλογιών	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι

Μετασχηματισμοί

- Οι γραμμικοί συσχετισμοί μπορούν να παρασταθούν με έναν πίνακα $\mathbf{A}$ ο οποίος πολλαπλασιάζεται από **αριστερά** με το σημείο που μετασχηματίζεται
- Όλοι οι **ομογενείς** μετασχηματισμοί είναι **γραμμικοί**
- Από τους μη ομογενείς, η **μεταφορά** είναι μη γραμμική
- Οι **συσχετισμένοι** και οι **γραμμικοί** μετασχηματισμοί **διατηρούν** τις περισσότερες σημαντικές γεωμετρικές ιδιότητες, εκτός από τις γωνίες και τις αποστάσεις
- Οι μετασχηματισμοί ομοιότητος διατηρούν την **ομοιότητα** των αντικειμένων εκτός ίσως από το μέγεθος
- Η πιο περιοριστική κατηγορία είναι οι **στερεοί** μετασχηματισμοί που διατηρούν όλα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των αντικείμενων
  - οποιαδήποτε **σύνθεση** περιστροφών και ομογενών μεταφορών είναι ένας στερεός μετασχηματισμός

Μετασχηματισμοί



Από μέσα προς τα έξω: στερεοί, ομοιότητος, γραμμικοί, συσχετισμένοι