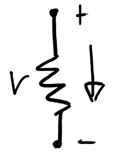
Γραμμικά Κυκλωματικά Στοιχεία

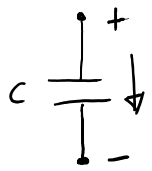
Αντίσταση/αγωγιμότητα



$u(t) = r\, i(t)$

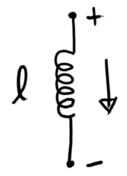
ή $i(t) = g\, u(t)$, $g = \frac{1}{r}$

Χωρητικότητα (πυκνωτής)



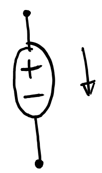
$i(t) = c \frac{du(t)}{dt}$

Αυτεπαγωγή



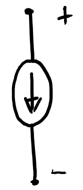
$u(t) = \ell \frac{di(t)}{dt}$

Ανεξάρτητη πηγή τάσης



$u(t) = a + f(t) \equiv s(t)$

Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος



$i(t) = a + f(t) \equiv s(t)$

Remark 1

a: σταθερά (<u>dc</u> συνιστώσα)
$f(t)$: γνωστή συνάρτηση του t (<u>μεταβατική</u> συνιστώσα)

<u>Συμβολισμοί</u>

a: βαθμωτή ποσότητα
A: πίνακας, A^T: ανάστροφος του A
$\underline{a} = [a_1, \ldots, a_n]^T$: διάνυσμα
$a(t)$: βαθμωτή συνάρτηση του χρόνου
$\underline{a}(t)$: διάνυσμα συναρτήσεων του χρόνου

---

u: τάση κατά μήκος ενός κλάδου
i: ρεύμα —— // ——
v: δυναμικό ενός κόμβου (ως προς τον κόμβο αναφοράς/γείωσης)

Κύκλωμα με $n-1$ κόμβους $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ (<u>εκτός</u> του κόμβου αναφοράς/γείωσης) και m κλάδους $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Ελαττωμένος πίνακας πρόσπτωσης (ως προς τον κόμβο αναφοράς):

Πίνακας A με στοιχεία $a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{εάν ο κλάδος } j \text{ εξέρχεται από τον κόμβο } i \\ -1, & \text{εάν ο κλάδος } j \text{ εισέρχεται στον κόμβο } i \\ 0, & \text{εάν ο κλάδος } j \text{ δεν συνδέεται με τον κόμβο } i \end{cases}$

Διαστάσεις ελαττ. πίνακα πρόσπτωσης A: $(n-1) \times m$ (κόμβοι χωρίς γείωση × κλάδοι)

$u(t) = [u_1(t)$

Διαστάσεις Ελαττ. πίνακα πρόσπτωσης $A: (n-1)\times m$ $\left(\begin{array}{c}\text{κόμβοι} \\ \text{χωρίς γείωση}\end{array} \times \text{κλάδοι}\right)$

$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$ διάνυσμα τάσεων κατά μήκος των m κλάδων

$\underline{i}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ \vdots \\ i_m(t) \end{bmatrix}$ διάνυσμα ρευμάτων κατά μήκος των m κλάδων

$\underline{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_{n-1}(t) \end{bmatrix}$ διάνυσμα δυναμικών των n-1 κόμβων (ως προς τη γείωση)

<u>Εξισώσεις τοπολογίας κυκλωμάτων</u> (σε μορφή πινάκων/διανυσμάτων):

<u>Νόμος Τάσεων Kirchhoff (KVL)</u>: $\boxed{\underline{u}(t) = A^T \underline{v}(t)}$

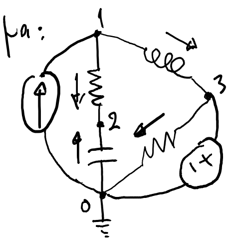
(σε κάθε κλάδο η τάση κατά μήκος του είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των κόμβων όπου συνδέεται $\Longleftrightarrow$ το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων κλάδων σε κλειστό βρόχο είναι ίσο με 0)

<u>Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff (KCL)</u>: $\boxed{A\underline{i}(t) = 0}$

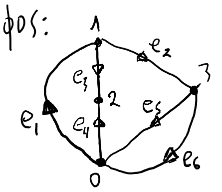
(σε κάθε κόμβο το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων των κλάδων που προσπίπτουν σε αυτόν είναι ίσο με 0)

<u>Παράδειγμα</u>

Κύκλωμα:



Γράφος:



SPICE netlist:

```
I1 0 1 ...
L1 1 3 ...
R1 1 2 ...
C1 0 2 ...
R2 3 0 ...
V1 3 0 ...
```

Ελαττωμένος πίνακας πρόσπτωσης:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

Νόμος Τάσεων Kirchhoff:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff:

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Τροποποιημένη Ανάλυση Κόμβων (Modified Nodal Analysis ή MNA)</u>

Τα m στοιχεία/κλάδοι του κυκλώματος χωρίζονται σε δύο ομάδες με m_1 και m_2 στοιχεία αντίστοιχα ($m = m_1 + m_2$):

1) Στοιχεία των οποίων η εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς το ρεύμα

κλάδου $i_k(t)$ (με σκοπό να γίνει απαλοιφή του), δηλ.

$$i_k(t) = g_k u_k(t) + c_k \frac{du_k(t)}{dt} + s_k(t), \quad k=1,\dots,m_1$$

Περιλαμβάνονται: <u>αντιστάσεις</u> (όπου $g_k = \frac{1}{r_k}$ και $c_k = 0$, $s_k(t)=0$)

<u>χωρητικότητες</u> (όπου $g_k = 0$, $s_k(t) = 0$)

<u>πηγές ρεύματος</u> (όπου $g_k = c_k = 0$ και $s_k(t) = a_k + f_k(t)$ γνωστή συνάρτηση)

2) Στοιχεία των οποίων η εξίσωση <u>δεν</u> μπορεί να λυθεί ως προς το ρεύμα κλάδου.

Περιλαμβάνονται: <u>αυτεπαγωγές</u> και <u>πηγές τάσης</u>.

Χωρισμός του πίνακα A και των διανυσμάτων $\underline{u}(t)$, $\underline{i}(t)$ σε υποπίνακες/υποδιανύσματα που αντιστοιχούν στις δύο ομάδες στοιχείων:

$$A = [\underbrace{A_1}_{(n-1)\times m_1} \ \underbrace{A_2}_{(n-1)\times m_2}] \qquad \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} \underline{u}_1(t) \\ \underline{u}_2(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1\times 1 \\ m_2 \times 1 \end{matrix} \qquad \underline{i}(t) = \begin{bmatrix} \underline{i}_1(t) \\ \underline{i}_2(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1\times 1 \\ m_2 \times 1 \end{matrix}$$

KCL γράφεται:

$$A\,\underline{i}(t) = 0 \Leftrightarrow A_1 \underline{i}_1(t) + A_2 \underline{i}_2(t) = 0 \quad (1)$$

KVL γράφεται:

$$\underline{u}(t) = A^T \underline{v}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{u}_1(t) = A_1^T \underline{v}(t) & (2a) \\ \underline{u}_2(t) = A_2^T \underline{v}(t) & (2b) \end{cases} \qquad \left(\text{καθώς } A^T = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix}\right)$$

Εξισώσεις στοιχείων ομάδας-1 υπό μορφή πίνακα:

$$\underline{i}_1(t) = G\,\underline{u}_1(t) + C_1 \frac{d\underline{u}_1(t)}{dt} + \underline{s}_1(t) \quad (3)$$

όπου G: <u>διαγώνιος</u> $m_1\times m_1$ πίνακας αγωγιμοτήτων κλάδων (με μηδενικά στη διαγώνιο στις θέσεις των m_1 στοιχείων όπου βρίσκονται χωρητικότητες και πηγές ρεύματος)

C_1: <u>διαγώνιος</u> $m_1\times m_1$ πίνακας χωρητικοτήτων κλάδων (με μηδενικά στη διαγώνιο στις θέσεις των m_1 στοιχείων όπου βρίσκονται αγωγιμότητες και πηγές ρεύματος)

$\underline{s}_1(t)$: διάνυσμα $m_1\times 1$ (με μηδενικά στις θέσεις των m_1 στοιχείων όπου βρίσκονται αγωγιμότητες και χωρητικότητες)

Εξισώσεις στοιχείων ομάδας-2 υπό μορφή πίνακα:

$$\underline{u}_2(t) = L \frac{d\underline{i}_2(t)}{dt} + \underline{s}_2(t) \quad (4)$$

όπου L: <u>διαγώνιος</u> $m_2\times m_2$ πίνακας αυτεπαγωγών κλάδων (με μηδενικά στη διαγώνιο στις θέσεις των m_2 στοιχείων όπου βρίσκονται πηγές τάσης)

$\underline{s}_2(t)$: διάνυσμα $m_2\times 1$ (με μηδενικά στις θέσεις των m_2 στοιχείων όπου βρίσκονται αυτεπαγωγές)

Αντικαθιστώντας τη (2α) στην (3), και την προκύπτουσα εξίσωση στην (1):

$$A_1 G A_1^T \underline{v}(t) + A_1 C A_1^T \frac{d\underline{v}(t)}{dt} + A_2 \underline{i}_2(t) = -A_1 \underline{s}_1(t) \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας επίσης τη (2β) στην (4):

$$A_2^T \underline{v}(t) - L \frac{d\underline{i}_2(t)}{dt} = \underline{s}_2(t) \quad (6)$$

Η (5) είναι γραφή υπό μορφή πίνακα ενός συστήματος $(n-1)$ εξισώσεων.
Η (6) ——— // ——— m_2 εξισώσεων.

Ο συνδυασμός τους δίνει ένα σύστημα $(n-1)+m_2$ εξισώσεων με $(n-1)+m_2$ άγνωστες ποσότητες (τις $(n-1)$ συναρτήσεις $\underline{v}(t)$ και τις m_2 συναρτήσεις $\underline{i}_2(t)$)
που γράφεται υπό μορφή σύνθετου πίνακα $[(n-1)+m_2]\times[(n-1)+m_2]$:

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ A_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}(t) \\ \underline{i}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 C A_1^T & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\underline{v}(t)}{dt} \\ \frac{d\underline{i}_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \underline{s}_1(t) \\ \underline{s}_2(t) \end{bmatrix}}$$

Σύστημα MNA για <u>μεταβατική</u> ανάλυση

Εάν οι διεγέρσεις των πηγών τάσης και ρεύματος είναι στατικές (έχουν μόνο dc συνιστώσα $s_k(t)=a_k$), τότε το σύστημα MNA γίνεται:

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ A_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \underline{s}_1 \\ \underline{s}_2 \end{bmatrix}}$$

Σύστημα MNA για <u>στατική (DC)</u> ανάλυση

και είναι ένα γραμμικό σύστημα $(n-1)+m_2$ εξισώσεων με $(n-1)+m_2$ αγνώστους, της μορφής $A\underline{x}=\underline{b}$ όπου

$$A \equiv \begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ A_2^T & 0 \end{bmatrix}$$ πίνακας συστήματος

$$\underline{x} \equiv \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{i}_2 \end{bmatrix}$$ διάνυσμα αγνώστων
(δυναμικά των n-1 κόμβων και ρεύματα κλάδων της ομάδας-2)

$$\underline{b} \equiv \begin{bmatrix} -A_1 \underline{s}_1 \\ \underline{s}_2 \end{bmatrix}$$ δεξί μέλος
*(διεγέρσεις από τις πηγές τάσης και ρεύματος)

* <u>Κατασκευή συστήματος MNA</u> *

(κατά τη διάσχιση της συνδεδεμένης λίστας από το στάδιο-1, κάθε κυκλωμ. στοιχείο-εγγραφή της λίστας έχει τις δικές του συνεισφορές στον πίνακα συστήματος και/ή στο δεξί μέλος)

(στοιχείο-εγγραφή της λίστας έχει τις τιμές του συνεισφορές στον πίνακα συστήματος και/ή στο δεξί μέλος)

$$
\begin{array}{c}
\\ \langle + \rangle \\ \\ \langle - \rangle \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & \langle + \rangle & & \langle - \rangle & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
 & \vdots & & \vdots & & \\
\cdots & +g_k & \cdots & -g_k & \cdots & \vdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \\
\cdots & -g_k & \cdots & +g_k & \cdots & \vdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \\
\hline
 & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}\right]
\end{array}
\left[\begin{array}{c}
\vdots \\ v_{\langle + \rangle} \\ \vdots \\ v_{\langle - \rangle} \\ \vdots \\ \hline \vdots
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \hline \vdots
\end{array}\right]
$$

Συνεισφορές αντιστάσεων ή αγωγιμοτήτων $g_k = \frac{1}{r_k}$

(μόνο στον άνω αριστερά υποπίνακα $A_1 G A_1^T$ του πίνακα συστήματος)

Remark 2

$$
\begin{array}{c}
\\ \langle + \rangle \\ \\ \langle - \rangle \\ \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cc|c}
 & & \\
 & \vdots & \vdots \\
 & & \\
 & \vdots & \vdots \\
 & & \\
\hline
 & \vdots & \vdots
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\vdots \\ v_{\langle + \rangle} \\ \vdots \\ v_{\langle - \rangle} \\ \vdots \\ \hline \vdots
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\vdots \\ -s_k \\ \vdots \\ +s_k \\ \vdots \\ \hline \vdots
\end{array}\right]
$$

Συνεισφορές ανεξάρτητων πηγών ρεύματος

(μόνο στο άνω υποδιάνυσμα του δεξιού μέλους)

$$
\begin{array}{c}
\langle + \rangle \\ \\ \langle - \rangle \\ \\ (n-1)+k \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
 & \vdots & & \vdots & & \cdots +1 \cdots \\
 & & & & & \vdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \cdots -1 \cdots \\
 & & & & & \vdots \\
\hline
\cdots & +1 & \cdots & -1 & \cdots & \vdots
\end{array}\right] \\
\begin{array}{ccccc} & \langle + \rangle & & \langle - \rangle & \quad (n-1)+k \end{array}
\end{array}
\left[\begin{array}{c}
\vdots \\ v_{\langle + \rangle} \\ \vdots \\ v_{\langle - \rangle} \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ i_k \\ \vdots
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \hline \vdots \\ +s_k \\ \vdots
\end{array}\right]
$$

Συνεισφορές ανεξάρτητων πηγών τάσης

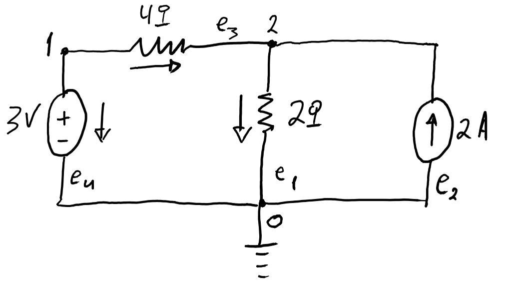
(στους κάτω αριστερά και άνω δεξιά υποπίνακες του πίνακα συστήματος, και στο κάτω υποδιάνυσμα του δεξιού μέλους)

* (Εδώ, $k=1,\ldots,m_2$ είναι η ξεχωριστή αρίθμηση των στοιχείων της ομάδας-2)

Παράδειγμα

Παράδειγμα

Κύκλωμα:



SPICE netlist:

R1	2	0	2
I1	0	2	2
R2	1	2	4
V1	1	0	3

Πλήθος κόμβων χωρίς γείωση: $n-1=2$

Πλήθος στοιχείων-κλάδων ομάδας-2 : $m_2=1$

* (Υπολογίζονται κατά το parsing του netlist και γίνεται αρχική δέσμευση στη μνήμη του πίνακα συστήματος διαστάσεων $[(n-1)+m_2]\times[(n-1)+m_2]$, εδώ 3×3, και του δεξιού μέλους διαστάσεων $[(n-1)+m_2]\times 1$, εδώ 3×1) *

Κατασκευή συστήματος MNA:

(από τις συνεισφορές των κυκλωματικών στοιχείων κατά τη διατρέξη της συνδεδεμένης λίστας)

Κλάδος-στοιχείο R1 (αντίσταση)

Πίνακας MNA: θέση $(2,2)$ $+1/2$

Κλάδος-στοιχείο I1 (πηγή ρεύματος)

Δεξί μέλος: θέση $(2,1)$ $+2$

Κλάδος-στοιχείο R2 (αντίσταση)

Πίνακας MNA: θέση $(1,1)$ $+1/4$

θέση $(1,2)$ $-1/4$

θέση $(2,1)$ $-1/4$

θέση $(2,2)$ $+1/4$

Κλάδος στοιχείο V1 (πηγή τάσης)

Πίνακας MNA: θέση $(1,3)$ $+1$

θέση $(3,1)$ $+1$

Δεξί μέλος: θέση $(3,1)$ $+3$

Σύστημα MNA:

$$\begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 3/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Στάδιο 2 (άσκηση 2.10 βιβλίου Najm)

Να υλοποιηθεί τμήμα κώδικα σε γλώσσα C, το οποίο για δοθέν netlist εισόδου διατρέχει τη συνδεδεμένη λίστα που δημιουργεί ο parser του σταδίου-1 και κατασκευάζει το <u>DC σύστημα</u> MNA (να ελεγχθεί ο κώδικας στο netlist του σταδίου-1)

<u>ΣΗΜ.</u> 1) Η δέσμευση στη μνήμη του πίνακα συστήματος και του δεξιού μέλους (με διαστάσεις $[(n-1)+m_2]\times[(n-1)+m_2]$ και $[(n-1)+m_2]\times 1$ αντίστοιχα) γίνεται <u>πριν</u> το "γέμισμά" τους από τις συνεισφορές των στοιχείων με διάτρεξη της συνδεδεμένης λίστας.

* 2) Στο <u>DC</u> σύστημα MNA οι χωρητικότητες <u>ανοικτοκυκλώνονται</u> ($\Leftrightarrow$ <u>αγνοούνται</u>) και οι αυτεπαγωγές <u>βραχυκυκλώνονται</u> ($\Leftrightarrow$ αντικαθίστανται από <u>πηγές τάσης</u> <u>με τιμή 0</u> : βραχυκυκλώματα)

3) Οι κόμβοι του κυκλώματος πρέπει να αριθμηθούν από 1 έως $n-1$ (ακριβέστερα, από 0 έως $n-2$ στη <u>zero-offset</u> εσωτερική αναπαράσταση διανυσμάτων της γλώσσας C), και οι κλάδοι-στοιχεία της ομάδας-2 (πηγές τάσης και αυτεπαγωγές - επίσης ως πηγές τάσης σε DC ανάλυση) από 1 έως m_2, ώστε να κατασκευαστεί (και να επιλυθεί στο επόμενο στάδιο) το σύστημα MNA.

Η αρίθμηση των κλάδων μπορεί να γίνει κατά το parsing του netlist.

* Όμως η αρίθμηση των κόμβων απαιτεί τη χρήση μιας ρουτίνας <u>hash-table</u> η οποία δημιουργεί μια 1-προς-1 αντιστοίχιση των μοναδικών ονομάτων των κόμβων του netlist σε μη αρνητικούς ακεραίους (μια τέτοια ρουτίνα θα τοποθετηθεί στο site του project, αλλά μπορεί εύκολα να βρεθεί και με αναζήτηση στο διαδίκτυο)