

# Εντοπισμός αντικειμένου σε εικόνα

Μάθημα: Υπολογιστική όραση  
Κ. Δελημπασης

# Περιγραφείς σχημάτων

- Αναγνώριση αντικειμένων με χρήση ροπών
- Περιγραφείς Fourier
- Στατιστική διακύμανση σχημάτων
- Αναζήτηση σε εικόνα τυχαίου σχήματος
  - Ο μετασχηματισμός απόστασης

# Αναγνώριση αντικειμένων με χρήση ροπών

## Moment Image descriptors

- Εισήχθηκαν από τον Hu (1962), με ευρεία εφαρμογή
- Περιγράφουν σχήματα με μικρό πλήθος περιγραφέων
- Η υπολογιστική πολυπλοκότητα αυξάνει όσο αυξάνει η τάξη της ροπής.
- Μη ορθογώνιες ροπές
- Άλλες ορθογώνιες ροπές: Legendre moments, geometrical moments, Zernike moments, pseudo-Zernike moments and Orthogonal Fourier-Mellin moments are evaluated

# Ορισμός

- Ροπές τάξης  $p+q$  μίας 2D συνάρτησης  $f(x,y)$  με πεδίο ορισμού  $D$ :

$$M_{pq} = \iint_D p_{pq}(x,y) f(x,y) dx dy$$

- Οι ροπές υπάρχουν αρκεί το  $D$  να είναι φραγμένο
- Αν  $p_{pq}(x,y)=x^p y^q$ , τότε προκύπτουν οι γεωμετρικές ροπές

$$M_{pq} = \iint_D x^p y^q f(x,y) dx dy$$

- Τα μονώνυμα αποτελούν τις συναρτήσεις βάσης. Αν η ταξη είναι  $n=p+q : p+q \leq n$ , πλήθους  $(n+1)(n+2)/2$ .

- Κεντρικές ροπές: αμετάβλητες κατά την μετατόπιση (translation invariant)

$$\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y), \bar{x} = \frac{M_{10}}{M_{00}}, \bar{y} = \frac{M_{01}}{M_{00}}$$

- Ροπές αματάβλητες κατά την αλλαγή κλίμακας (scale invariant)

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^\gamma}, \gamma = \frac{p + q}{2} + 1$$

- Ροπές Hu (1962) αμετάβλητες (invariant) σε affine μετασχηματισμούς

$$\varphi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$

$$\varphi_2 = (\eta_{20} + \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2$$

$$\varphi_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2$$

$$\varphi_4 = (\eta_{30} + \eta_{12}) + (\eta_{21} + \eta_{03})^2$$

$$\varphi_5 = (\eta_{03} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12}) \left[ (\eta_{03} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2 \right] +$$

$$(3\eta_{21} + \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03}) \left[ 3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2 \right]$$

$$\varphi_6 = (\eta_{20} - \eta_{02}) \left[ (\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2 \right] +$$

$$4\eta_{11} (\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})$$

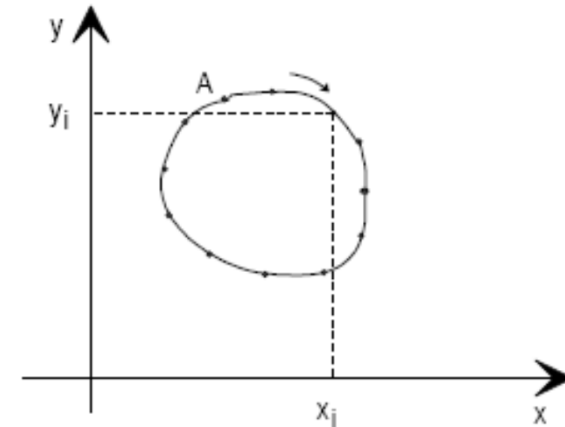
# Πίνακας ροπών 2<sup>ης</sup> τάξης

- Εστω σύνολο μη-μηδενικών pixel μίας εικόνας (πλήρες δυαδικό αντικείμενο, ή περίγραμμα)

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2 & \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \\ \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) & \sum_{i=1}^N (y_i - \mu_y)^2 \end{pmatrix}$$

# Περιγραφείς Fourier (Fourier Descriptors -FD)

- Ισχυρή μέθοδος περιγραφής περιγραμμάτων και εξαγωγής χαρακτηριστικών των αντικειμένων
- Έστω ότι η καμπύλη του σχήματος αντιστοιχεί στο όριο ενός αντικειμένου ξεκινώντας από ένα αρχικό σημείο A, με ωρολογιακή φορά παίρνουμε μια ακολουθία σημείων  $(x_n, y_n)$ ,  $n=0,1,\dots,N-1$ , με N το πλήθος των εικονοστοιχείων του ορίου.





# Ορισμός FDs

- Εστω η μιγαδική ακολουθία:

$$z(n)=x(n)+jy(n), n=0,1,\dots,N-1$$

- Από τον ορισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT) της  $z(n)$  :

$$a(k) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)$$

- Με τον αντίστροφο DFT (IDFT) ανακατασκευάζεται η  $z(n)$  :

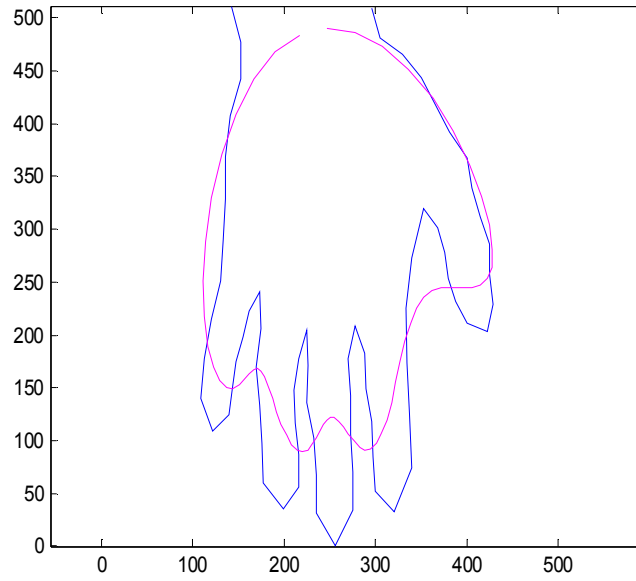
$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a(k) \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right)$$

- Οι μιγαδικοί συντελεστές  $\alpha(k)$  καλούνται περιγραφείς Fourier (Fourier Descriptors – FD).
- Για ομαλά σχήματα, η περισσότερη πληροφορία του σχήματος είναι αποθηκευμένη στις χαμηλότερες αρμονικές
- Όσους περισσότερους συντελεστές χρησιμοποιούμε, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση και η αναπαράσταση / ανακατασκευή της καμπύλης.
- Η σύγκριση δύο σχημάτων για τα οποία έχουν προσδιοριστεί οι FDs μπορεί να γίνει με την άμεση σύγκριση των FDs, αφού ληφθεί υπόψη η αμεταβλητότητα / συμμεταβλητότητα ως προς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς και αρίθμηση.

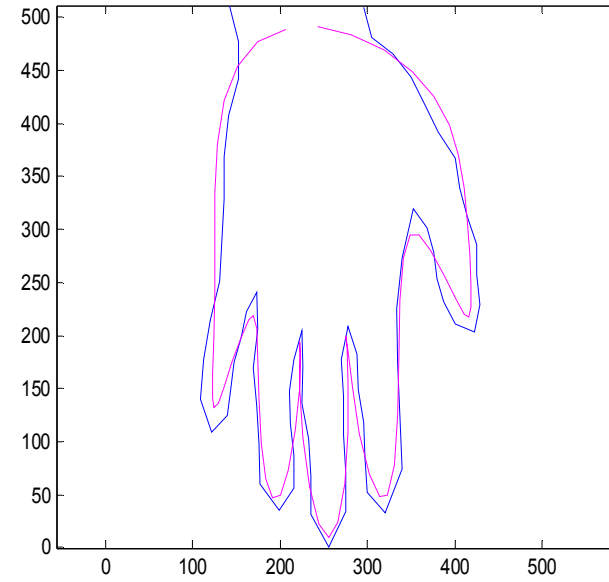
# Αμεταβλητότητα / Συμμεταβλητότητα Invariance / covariance

- Αν κάποια καμπύλη μετατεθεί κατά  $x_0, y_0$  τότε οι FDs παραμένουν ίδιοι, εκτός της μηδενικής αρμονικής
- Αλλαγή κλίμακας του περιγράμματος συνεπάγεται ίδια αλλαγή κλίμακας των FDs.
  - Αν τα FDs κανονικοποιηθούν με τα μέτρα τους  $a(k)/|a(k)|$  γίνονται ανεξάρτητα της αλλαγής κλίμακας
- Περιστροφή κατά γωνία  $\theta$  του περιγράμματος:  $a_k \leftarrow a_k e^{j\theta}$ .
- Αλλαγή της αρίθμησης των σημείων:

$$a_k \leftarrow a_k \exp(2\pi k n_0 / N).$$



Αρχικό περίγραμμα,  
Περίγραμμα με 5 συντελεστές



Αρχικό περίγραμμα,  
Περίγραμμα με 8 συντελεστές

# Στατιστική διακύμανση σχημάτων

- Συχνά τα αντικείμενα ενδιαφέροντος παρουσιάζουν μεταβολές στο σχήμα τους, πχ ίδια ανατομική δομή μεταξύ διαφορετικών ανθρώπων.
- Active Shape models –ASM: βασίζεται σε Principal Component Analysis -PCA, για να εκπαιδεύσει ένα σύστημα ώστε να παράγει στατιστικά πιθανά σχήματα, δεδομένου ενός συνόλου σχημάτων (αντικειμένων ίδιου τύπου)

# ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΈΝΝΟΙΕΣ

- Μέση τιμή  $\mu_X = E(X)$ : 
$$\mu_x = E(X) = \frac{1}{n} \sum_i x_i$$
- Διασπορά  $\sigma_x^2 = E\left(X - E[X]\right)^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_i x_i^2 - \left( \sum_i x_i \right)^2 \right)$
- Συμμεταβλητότητα ((συνδιακύμανση ή συνδιασπορά) 2 μεταβλητών,  $X, Y$ ):
$$Cov(X, Y) = E\left[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$
- Σημ. Το  $(1/N)$  μπορεί να αντικατασταθεί από  $1/(N-1)$ , αν θεωρούμε ότι τα διαθέσιμα είναι μέρος του συνόλου των σημείων του αντικείμενου

- Συσχέτιση δύο μεταβλητών
- Συνδιασπορά  $>0 \rightarrow$  οι 2 μεταβλητές συσχετισμένες:
  - Όταν αυξάνει η μία, αυξάνει και η άλλη
- Συνδιασπορά  $<0 \rightarrow$  οι 2 μεταβλητές συσχετισμένες:
  - Όταν αυξάνει (μειώνεται) η μία, μειώνεται (αυξάνει) και η άλλη
- Συντελεστής συσχέτισης: κανονικοποιούμε τη συνδιασπορά με τις αποκλίσεις των 2 μεταβλητών

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y}$$

- Πίνακας συμμεταβλητότητας (συνδιακύμανση ή συνδιασπορά) δύο μεταβλητών  $X, Y$  με  $N$  τιμές έκαστη:
  - Αν  $\mu_X, \mu_Y$  οι μέσες τιμές, τότε ορίζεται ο συμμετρικός πίνακας  $2 \times 2$ :

$$C = \begin{pmatrix} x_1 - \mu_x & x_2 - \mu_x & \cdots & x_n - \mu_x \\ y_1 - \mu_y & y_2 - \mu_y & \cdots & y_n - \mu_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_x & y_1 - \mu_y \\ x_2 - \mu_x & y_2 - \mu_y \\ \vdots & \vdots \\ x_n - \mu_x & y_n - \mu_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2 & \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \\ \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) & \sum_{i=1}^N (y_i - \mu_y)^2 \end{pmatrix}$$

- Αν ο πίνακας είναι διαγώνιος  $\rightarrow$  οι  $X, Y$  ασυσχέτιστες



# Συνδιακύμανση σχημάτων ίδιου αντικειμένου

- Εστω  $N$  αντικείμενα, κάθε ένα από τα οποία έχει  $D$  σημεία περιγράμματος

$$\left\{ \left( x_i^k, y_i^k \right) \right\}, \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, D \\ k = 1, 2, \dots, N \end{matrix}$$

- Τα βήματα που ακολουθούν εφαρμόζονται είτε ξεχωριστά για τις  $X$  και  $Y$  συντεταγμένες, είτε ταυτόχρονα, θεωρώντας ένα διάνυσμα μήκους  $2D$  ( $x$  πρώτα και  $y$  μετά)

- Εστω  $\mathbf{p}_k = \begin{bmatrix} x_i^k, y_i^k \end{bmatrix}^T, 2N \times 1, \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, D \\ i = 1, 2, \dots, N \end{matrix}$

- Μεταφέρουμε το σύστημα συντεταγμένων κάθε αντικειμένου στο κέντρο μάζας του  $(\bar{x}^k, \bar{y}^k)$

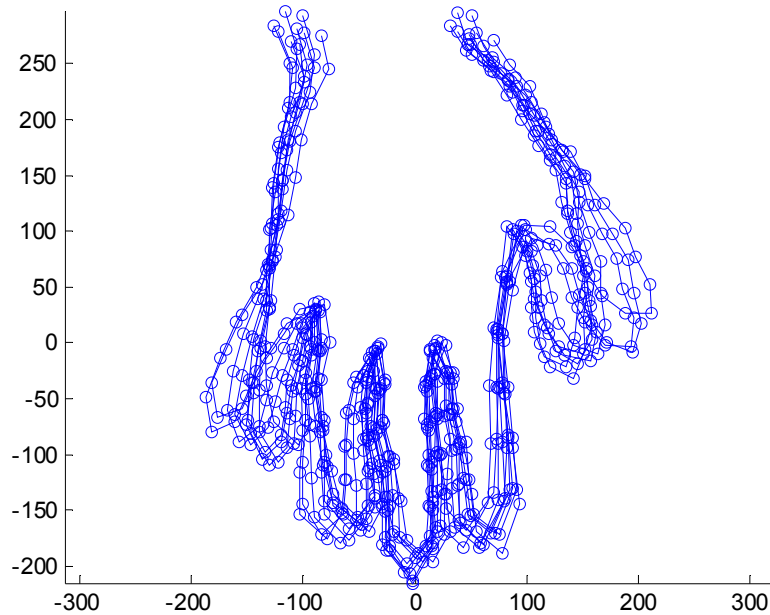
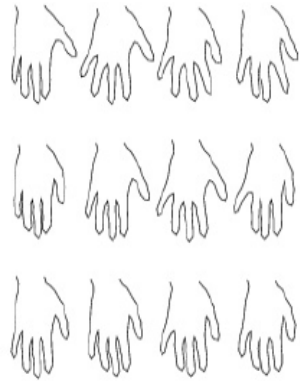
$$\mathbf{p}_k = \begin{bmatrix} x_i^k - \bar{x}^k, y_i^k - \bar{y}^k \end{bmatrix}^T, 2N \times 1$$

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα

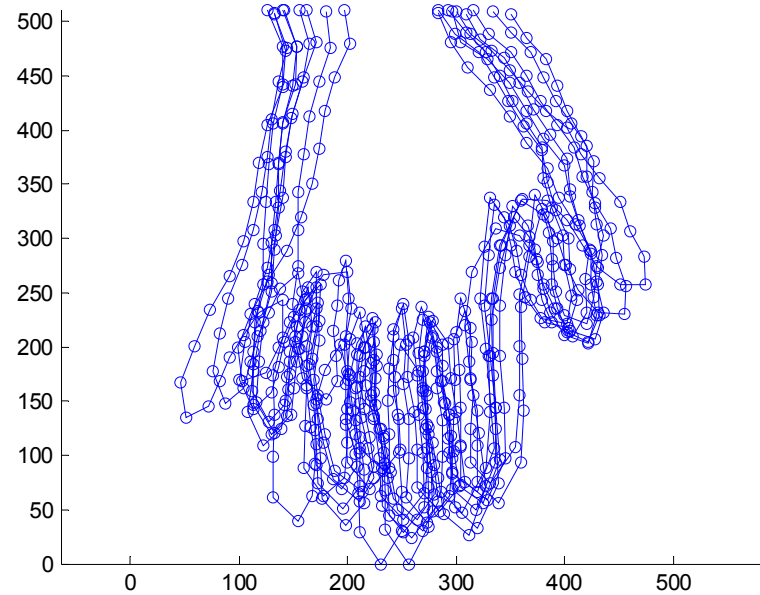
$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_D]^T, 2N \times D$$

# Παράδειγμα

Σύνολο περιγραμμάτων ενός αντικειμένου με μεταβολή στο σχήμα



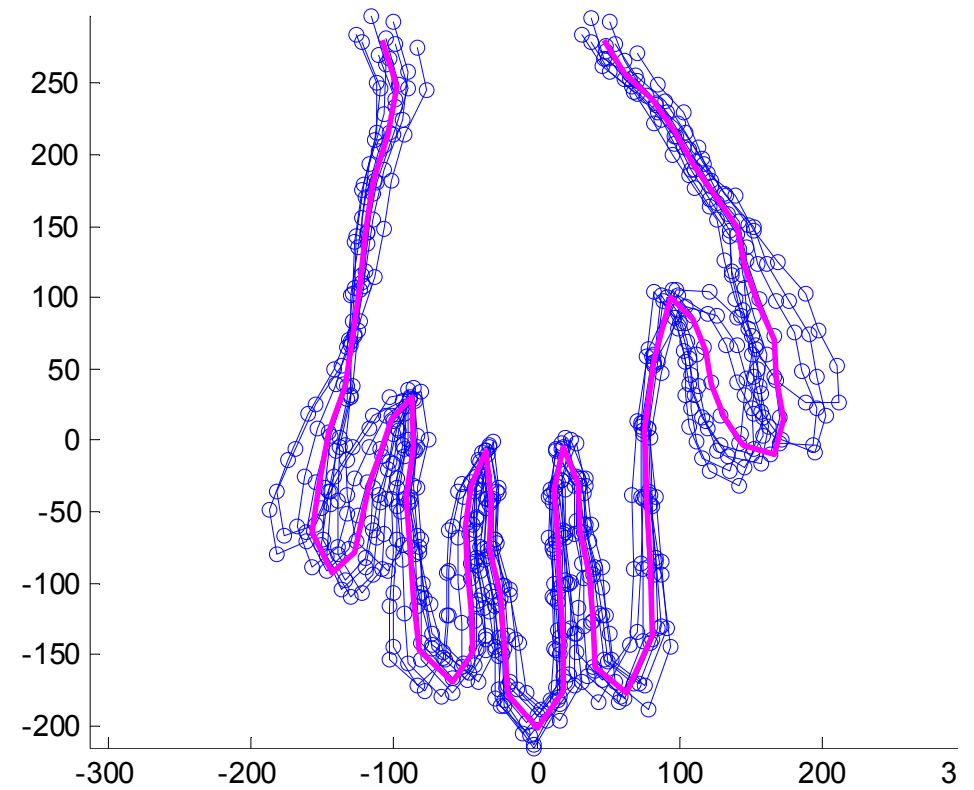
Τα περιγράμματα σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες



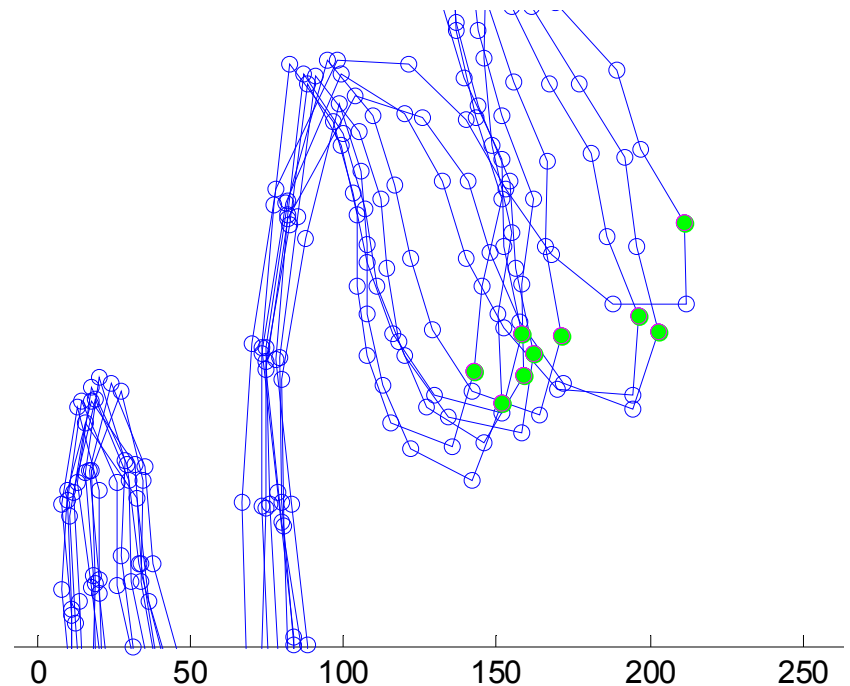
Παράδειγμα:  $K=9$  περιγράμματα χεριών, με  $N=72$  σημεία το κάθε ένα

- Υπολογισμός μέσου σχήματος

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^D \mathbf{p}_k, 2N \times 1$$



- Κατασκευάζεται πίνακας  $\mathbf{P}$ , διάστασης  $2N \times D$ .
- Ο πίνακας  $\mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T$  ( $2N \times 2N$ ) δείχνει τη συμμεταβλητότητα των αντίστοιχων σημείων, μεταξύ των διαφορετικών χεριών
- Ο πίνακας  $\mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T$  ( $2N \times 2N$ ) θα έχει  $\text{rank}(\mathbf{M}) = 2N$ ,  $\Leftrightarrow D > 2N$ , Αλλιώς,  $\text{rank}(\mathbf{M}) = D$



Διαφορετικές θέσεις του σημείου 12 για 10 περιγράμματα χεριών

# Συμπύεση πληροφορίας σχήματος με χρήση του ASM

- Εστω  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N})$  με μήκος  $2N$  και
- $\mathbf{Q}$  ο πίνακας που οι στήλες του είναι τα ιδιοδιανύσματα του  $\mathbf{M}$ , σε φθίνουσα διάταξη των ιδιοτιμών του

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2N}]^T, 2N \times 2N,$$

$$\text{ιδιοτιμές του } \mathbf{M}: d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{2N}$$

- Για κάθε τυχαίο σχήμα  $\mathbf{q}$ , υπάρχουν  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N})$ , ώστε να μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{M} \cdot [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}]^T, 2N \times 1 =$$

$$\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{M} \cdot \Lambda$$

- Εστω ότι δεν χρησιμοποιούμε όλες τις ιδιοτιμές, αλλά τις  $T$  μεγαλύτερες, όπου

$$\sum_{i=1}^T d_i > 0.9 \sum_{i=1}^{2N} d_i$$

- Εστω ότι ο  $\mathbf{Q}$  περιέχει τα ιδιοδιανύσματα με τις  $T$  ιδιοτιμές

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_T]^T, 2N \times T,$$

$$\text{ιδιοτιμές του } \mathbf{M}: d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_T \dots \geq d_{2N}$$

- Τώρα, ένα τυχαίο σχήμα  $\mathbf{q}$ , περιγράφεται από  $T$  αριθμούς  $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T)$ , ως

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{p}} + \underset{2N \times T}{\mathbf{M}} \cdot \underset{2T \times 1}{\Lambda},$$

$$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T]^T$$

- Για να καλύπτουμε το 98% της μεταβολής του σχήματος, επιλέγουμε

$$\lambda_i \in \left[ d_i - 3\sqrt{d_i}, d_i + 3\sqrt{d_i} \right], i \leq T$$

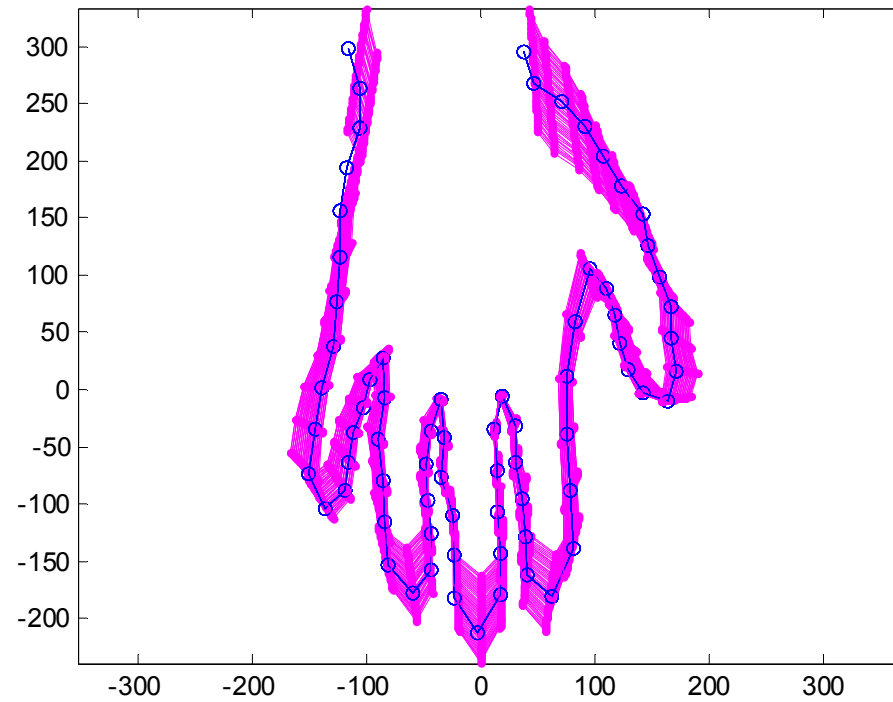
- Αντίστροφα, δοθέντος του  $\mathbf{q}$ , τα  $\Lambda$  υπολογίζονται (διότι  $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M} = \mathbf{I}$ )

$$\Lambda = \mathbf{M}^T \cdot (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{p}})$$

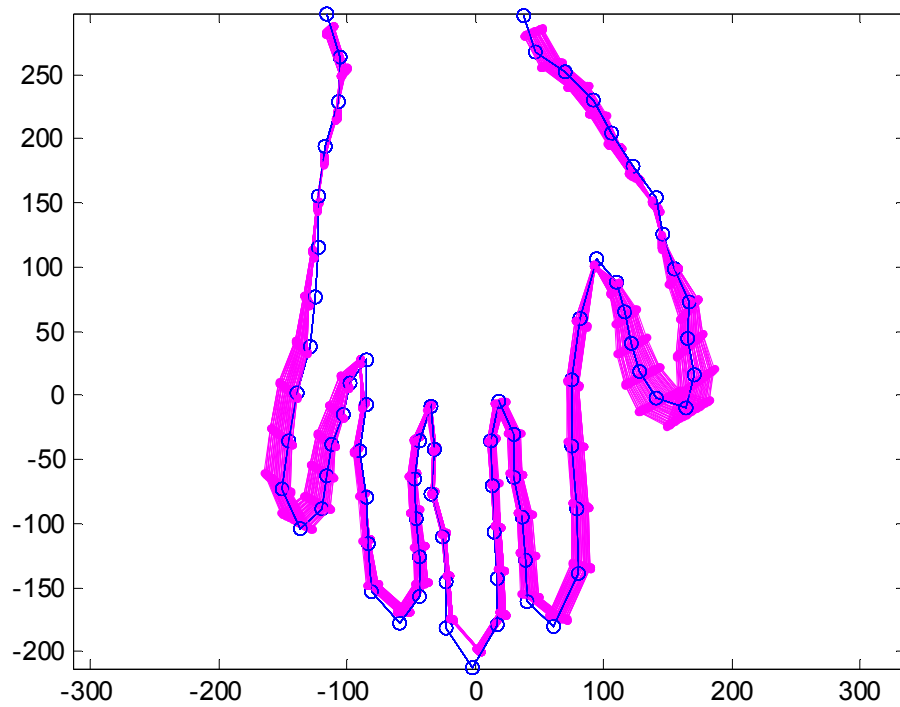


# Συμπέρασμα

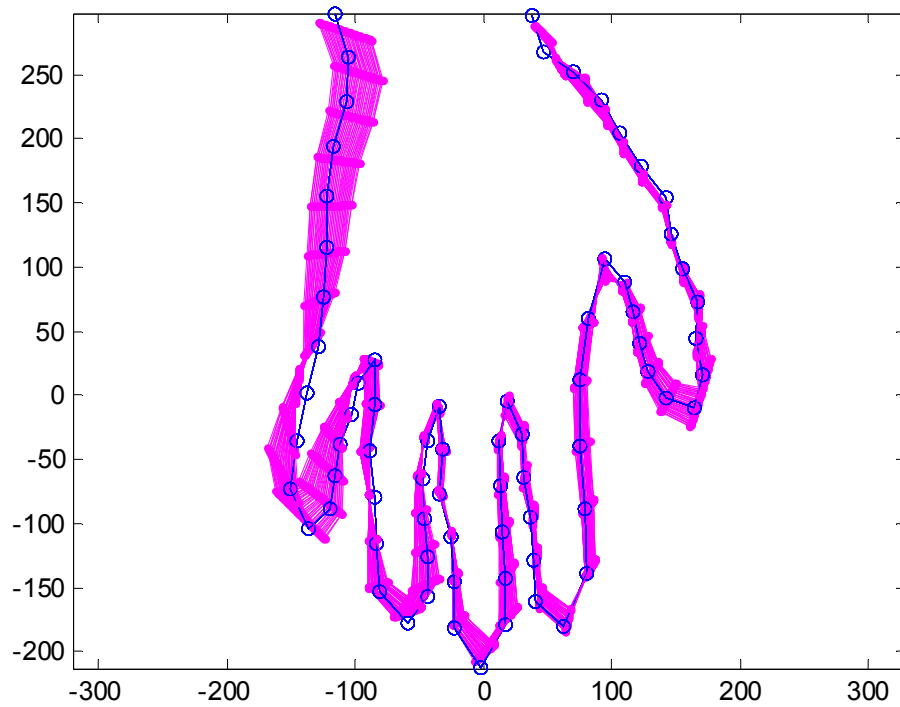
- Η περισσότερη πληροφορία του σχήματος υπάρχει συγκεντρωμένη στα ιδιοδυναύσματα του  $\mathbf{M}$  που έχουν τις  $T$  μεγαλύτερες ιδιοτιμές
- Κάθε ιδιοδιάνυσμα «αποτυπώνει» ένα τρόπο μεταβολής (mode of variation)
- Για ομαλά σχήματα,  $N \ll T$ ,  $\rightarrow$  περιγράφουμε ένα σχήμα με πολύ λιγότερους αριθμούς από τις συντεταγμένες των σημείων του
- Μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργια σχήματα επιλέγοντας  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T)$ ,



Μεταβολή σχήματος που κωδικοποιείται από το 1<sup>ο</sup>  
ιδιοδιάνυσμα



Μεταβολή σχήματος που κωδικοποιείται από το 2<sup>ο</sup>  
ιδιοδιάνυσμα



Μεταβολή σχήματος που κωδικοποιείται από το 3<sup>ο</sup>  
ιδιοδιάνυσμα

# Αναζήτηση σε εικόνα τυχαίου σχήματος με μετατόπιση, αλλαγή κλίμακας και περιστροφή

- Κατασκευή του τυχαίου σχήματος με χρήση ASM ( $T$  παράμετροι)
- Περιστροφή, αλλαγή κλίμακας και μετατόπιση (περίπτωση 2D:  $1 + 2 + 2 = 5$  παράμετροι)
- Υπολογισμός παραμέτρων με βελτιστοποίηση μιάς συνάρτησης (ταιριάσματος, ή λάθους)
  - Μία πρακτική προσέγγιση: Μετασχηματισμός απόστασης / Chamfer matching

# Chamfer Matching: Εντοπισμός αντικειμένου σε εικόνα

- Εστω ότι αναζητούμε ένα αντικείμενο (πχ παλάμη) σε μία εικόνα.
- Υπολογίζουμε τις ακμές της εικόνας
- Θεωρούμε ότι το αντικείμενο ανιχνεύεται όταν το περίγραμμά του βρίσκεται πολύ κοντά σε ακμές της εικόνας
- Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται ο Μετασχηματισμός Απόστασης (Distance Transform)

# Συνάρτηση σφάλματος εντοπισμού αντικειμένου

- Εστω τα σημεία ενός αντικειμένου

$$(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N$$

- Αν  $BW$  η δυαδική εικόνα ακμών της εικόνας  $I$  και  $D=DT(I)$  ο μετασχ απόστασης
- Η συνάρτηση σφάλματος εντοπισμού του αντικειμένου μπορεί να οριστεί:

$$err = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D(x_i, y_i)$$

# Δυαδικές εικόνες: Μετασχηματισμός Απόστασης (Distance Transform)

- Έστω δυαδική εικόνα  $I(i,j)$  η οποία περιέχει pixel ακμών με τιμή 0 (ενώ τιμή υποβάθρου θεωρείται η μέγιστη (big\_value πχ 255)). Σε περίπτωση που η εικόνα ακμών είναι δυαδική με τιμή 1 (ακμή) και 0 (υπόβαθρο), κάνουμε τον απαραίτητο μετασχηματισμό.
- Ο DT παράγει μία εικόνα της οποίας το κάθε pixel περιέχει την απόσταση του από το κοντινότερο pixel ακμών.
- Ο DT είναι χρήσιμος για την ταύτιση αντικειμένων με ψηφιακές εικόνες.
- “Αφελής (naïve) προσέγγιση”: Υπολογισμός απόστασης κάθε pixel μη-υποβάθρου από κάθε κάθε pixel υποβάθρου:
  - Brute force DT:  $O(N^2)$



- Παρουσιάζονται 2 αλγόριθμοι:
  1. Μη βέλτιστος (χρειάζεται πολλαπλά περάσματα της εικόνας και δεν υπολογίζει ευκλείδεια απόσταση), παρουσιάζεται λόγω απλότητας.
  2. Βέλτιστος, 2 διπλά περάσματα,  $O(N)$

# Αλγόριθμος με πολλαπλά περάσματα της εικόνας

Αλγόριθμος Μετασχηματισμού απόστασης Manhattan

Εισοδος:  $I$  εικόνα ακμών (δυναδική)

Εξοδος:  $D$  εικόνα απόστασης (ακέραιες τιμές)

Αρχικοποίηση: για κάθε pixel  $\mathbf{p}$  ,  $D(\mathbf{p})=\text{big\_value}$

$k=0$

while (υπάρχουν pixel  $\mathbf{p}$  με  $D(\mathbf{p})=\text{big\_value}$ )

$k=k+1$ ;

    Για κάθε pixel  $\mathbf{p}$  της εικόνας

        Αν  $D(\mathbf{p})==\text{big\_value}$  (pixel υποβάθρου)

            Για κάθε ένα από τους 4 γείτονες  $\mathbf{n}$  του  $\mathbf{p}$

                Αν  $D(\mathbf{n})==k-1$  then  $D(\mathbf{p})=I(\mathbf{n})+1$ ;

            end

        end

    end

end

# Παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου DT

- Εστω η εικόνα  $I$ :

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	1

	1	2	3	4
1	0	255	255	255
2	255	255	255	255
3	255	255	255	255
4	255	255	255	0

Αρχικοποίηση  $D$   
(big\_value=255)

	1	2	3	4
1	0	1	255	255
2	1	255	255	255
3	255	255	255	1
4	255	255	1	0

Εικόνα  $D$  μετά το  
1<sup>ο</sup> βήμα ( $k=1$ ).

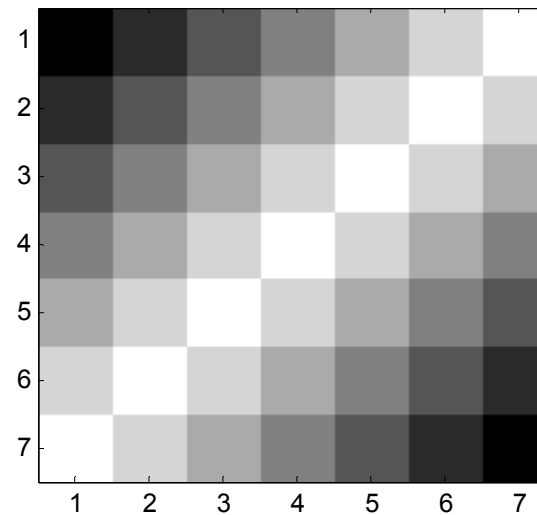
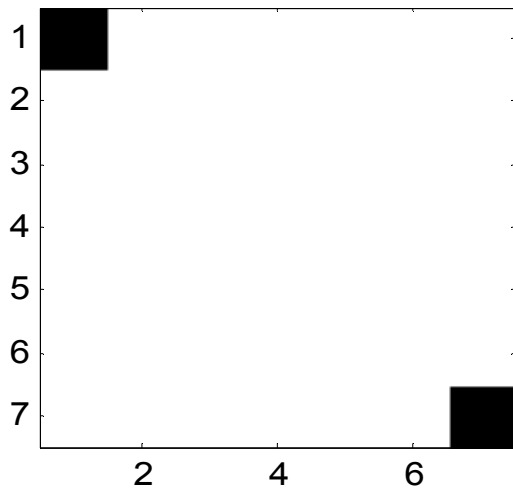
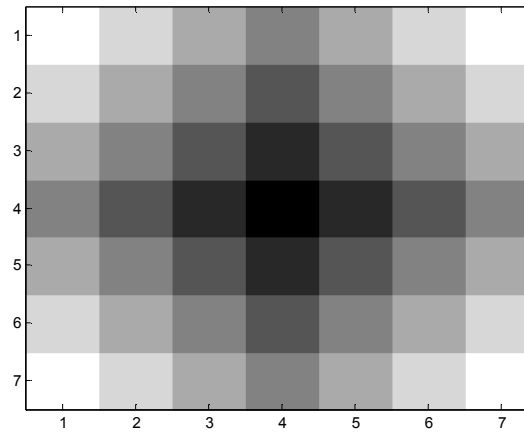
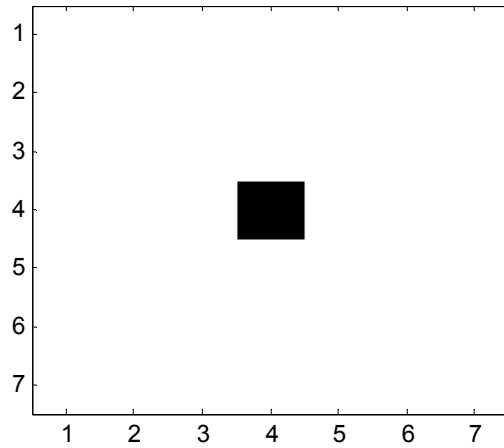
	1	2	3	4
1	0	1	2	255
2	1	2	255	2
3	2	255	2	1
4	255	2	1	0

Εικόνα  $D$  μετά το  
2<sup>ο</sup> βήμα ( $k=2$ ).

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	2	3	2
3	2	3	2	1
4	3	2	1	0

Εικόνα  $D$  μετά το  
3<sup>ο</sup> βήμα ( $k=3$ ).

# Εφαρμογή του αλγόριθμου DT



# Distance Transform Αλγόριθμος: Sequential Euclidian 4-point

- 2 διπλά περάσματα, Ευκλείδεια απόσταση
- Επιπλέον, μπορεί να επιστρέψει το κοντινότερο pixel ακμής για κάθε pixel της εικόνας
- Αρχικοποίηση:  
για κάθε pixel  $\mathbf{p}$  ,  $D(\mathbf{p}) = \text{big\_value}$
- Επίσης θεωρούμε ότι ισχύει  
 $\text{big\_value} + 1 \rightarrow \text{big\_value}$

Raw-wise, Forward

1.  $\forall i=1:N$

1.  $\forall j=2:M$   $\xrightarrow{\text{Forward}}$

$$D(i, j) = \min(D_{ij}, D_{i, j-1} + 1, D_{i-1, j} + 1)$$

2.  $\forall j=M-1:1$   $\xleftarrow{\text{Column-wise, Backward}}$

$$D(i, j) = \min(D_{ij}, D_{i, j+1} + 1)$$

2.  $\forall i=N-1:1$

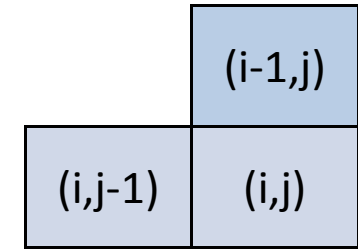
1.  $\forall j=2:M$   $\xrightarrow{\text{Forward}}$

$$D(i, j) = \min(D_{ij}, D_{i, j+1} + 1, D_{i+1, j} + 1)$$

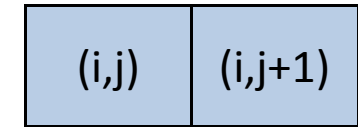
2.  $\forall j=M-1:1$   $\xleftarrow{\text{Column-wise, Backward}}$

$$D(i, j) = \min(\min(D_{ij}, D_{i, j+1} + 1))$$

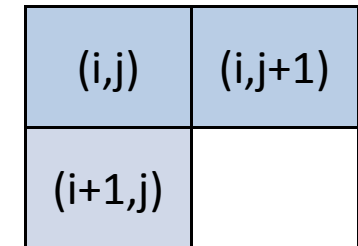
Raw-wise, Backward



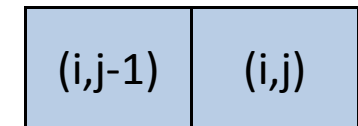
Mask 1



Mask 2



Mask 3



Mask 4

- Για την ευρεση του κοντινότερου Pixel ακμής για κάθε pixel της εικόνας:
  - Τηρούμε 2 πίνακες, διάστασης ίσης με την αρχική
    - $P_i, P_j$ : parent γραμμή  $i$ , στήλη  $j$ , για κάθε  $(i, j)$
  - $P_i, P_j$ : Αρχικοποιούνται με NIL (πχ. -1)
  - Σε κάθε επανάληψη που ενημερωνεται η απόσταση του  $(i, j)$ , γίνεται αντίστοιχη ενημέρωση των.

- Image moments, Fourier Descriptors:
  - Gonzalez, Woods, Digital Image Processing, κεφ. 11.
- Distance Transform, Αρχικό paper:
  - Borgefors, Gunilla. "Hierarchical chamfer matching: A parametric edge matching algorithm." *IEEE Transactions on PAMI* 10.6 (1988): 849-865.
  - Tutorial with many algorithmic variations (eg. 4SSED)
  - <https://pdfs.semanticscholar.org/494f/6e6637b035308238b29323149739b0a7e502.pdf>, (p11)
- ASM Αρχικό paper
  - T. Cootes, et al (1995). "Active shape models - their training and application". *Computer Vision and Image Understanding* (61): 38–59
    - [http://personalpages.manchester.ac.uk/staff/timothy.f.cootes/papers/cootes\\_cviu95.pdf](http://personalpages.manchester.ac.uk/staff/timothy.f.cootes/papers/cootes_cviu95.pdf)
  - Tutorial:  
[http://www2.compute.dtu.dk/courses/02511/docs/asm\\_overview.pdf](http://www2.compute.dtu.dk/courses/02511/docs/asm_overview.pdf)