ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

- ΣΥΝΕΛΙΞΗ

1. Αν $x(t)=e^{-a|t|}$ και $h(t)=e^{-2a(t-1)}u(t-1)$, $a>0$ να υπολογιστεί η συνέλιξη $y(t)=x(t)*h(t)$ με αναλυτικό τρόπο.

Λύση

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}e^{-2a(t-\tau-1)}u(t-\tau-1)\,d\tau$$

Αν $\tau<t-1 \Rightarrow u(t-\tau-1)=1$ άρα

Για $-\infty<t<t-1\leq 0$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t-1}e^{a\tau}e^{-2a(t-\tau-1)}d\tau=e^{-2a(t-1)}\int_{-\infty}^{t-1}e^{a\tau}\cdot e^{2a\tau}d\tau=e^{-2a(t-1)}\int_{-\infty}^{t-1}e^{3a\tau}d\tau$$

$$=e^{-2a(t-1)}\frac{1}{3a}e^{3a\tau}\Big|_{-\infty}^{t-1}=\frac{e^{-2a(t-1)}}{3a}e^{3a(t-1)}=\frac{1}{3a}e^{a(t-1)}\quad(t\leq 1)$$

Για $t-1>0$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{0}e^{a\tau}e^{-2a(t-\tau-1)}d\tau+\int_{0}^{t-1}e^{-a\tau}e^{-2a(t-\tau-1)}d\tau=\frac{1}{3a}e^{-2a(t-1)}+\frac{1}{a}e^{-a(t-1)}-\frac{1}{a}e^{-2a(t-1)}$$

$$=\frac{1}{a}e^{-a(t-1)}-\frac{2}{3a}e^{-2a(t-1)}\quad(t>1)$$

2. Έστω σύστημα LTI με κρουστική απόκριση $h(t)=e^{-3t}u(t)$. Στην είσοδο εφαρμόζεται σήμα $x(t)=2e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)$.
Βρείτε την έξοδο του συστήματος.

Λύση

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)\right]\left[e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)\right]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2e^{-\tau}\cdot e^{-3(t-\tau)}u(\tau)u(t-\tau)+e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}u(t)u(t-\tau)\right]d\tau$$

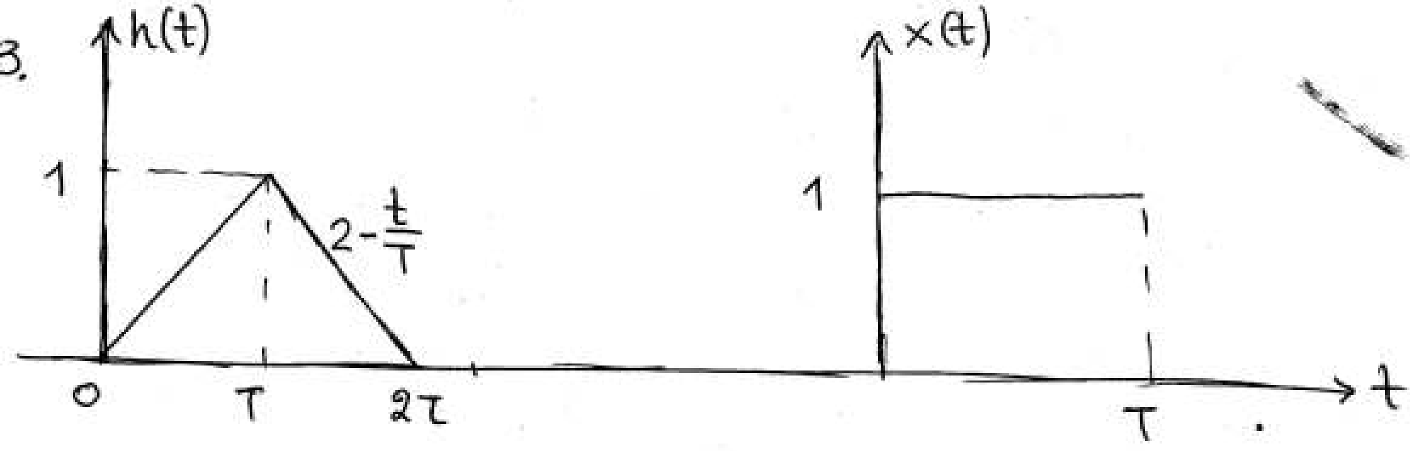
Πρέπει $u(\tau)u(t-\tau)=1$ άρα $\tau>0$, $t-\tau>0 \Rightarrow 0<\tau<t$

άρα
$$y(t)=\int_0^t\left(2e^{-3t}\cdot e^{2\tau}+e^{-3t}\cdot e^{\tau}\right)d\tau=2e^{-3t}\left(\frac{e^{2\tau}}{2}\right)_0^t+e^{-3t}\left(e^{\tau}\right)_0^t$$

$$=e^{-3t}\left(e^{2t}-1\right)+e^{-3t}\left(e^{t}-1\right)=e^{-t}-e^{-3t}+e^{-2t}-e^{-3t}$$

άρα $y(t)=e^{-t}u(t)-e^{-3t}u(t)+e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)$, $t>0$

3.



(2)

$$h(t)=\begin{cases} t/T & 0\le t\le T \\ 2-\frac{t}{T} & T<t\le 2T \end{cases} \quad , \quad x(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t\le T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθεί η συνέλιξη $y(t)=h(t)*x(t)$

<u>Λύση</u>

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau \Rightarrow$$ Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $t<0 \Rightarrow y(t)=0$
2. $t\geq 0$ και $t\leq T \Rightarrow y(t)=\int_0^t \tau/T\,d\tau = \frac{\tau^2}{2T}\Big|_0^t = \frac{t^2}{2T}$
3. $T<t\leq 2T \Rightarrow y(t)=\int_{t-T}^{T}\frac{\tau}{T}d\tau+\int_T^t\left(2-\frac{\tau}{T}\right)d\tau = -\frac{t^2}{T}+3t-\frac{3T}{2}$

(Πρέπει $x(t-\tau)=1 \Rightarrow 0\leq t-\tau\leq T \Rightarrow -t\leq -\tau\leq T-t \Rightarrow t\geq\tau\geq t-T$)

4. $y(t)=\int_{t-T}^{2T}\left(2-\frac{\tau}{T}\right)d\tau=\frac{t^2}{2T}-3t+\frac{9T}{2}$ για $2T\leq t<3T$

5. $y(t)=0$, $t>3T$

4. Έστω $x(t) = Ae^{-|t|}$ και $h(t) = 2(u(t-3) - u(t-5))$

Να βρεθεί η συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$.

Λύση

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-|\tau|} 2\left(u(t-3-\tau) - u(t-5-\tau)\right) d\tau$$

1.

$$\Rightarrow u(t-3-\tau) = 1 \Rightarrow t-3-\tau > 0 \Rightarrow t-3 > \tau$$

$$u(t-5-\tau) = 0 \Rightarrow t-5-\tau \leq 0 \Rightarrow t-5 \leq \tau$$

Άρα $y(t) = \int_{t-5}^{t-3} 2Ae^{\tau} d\tau = 2A\left(e^{t-3} - e^{t-5}\right) \quad (t-3 \leq 0 \Rightarrow t \leq 3)$

2

$$y(t) = \int_{t-5}^{0} 2Ae^{\tau} d\tau + \int_{0}^{t-3} 2Ae^{-\tau} d\tau = 2A\left(2A - e^{t-5} - e^{3-t}\right) \quad (3 < t \leq 5)$$

3.

$$y(t) = \int_{t-5}^{t-3} 2Ae^{-\tau} d\tau = 2A\left(e^{5-t} - e^{3-t}\right) \quad (t > 5)$$

5. Έστω σήματα $x(t)=\begin{cases}0, & \text{αλλού}\\ 1/t & t\geq 1\end{cases}$, $y(t)=\begin{cases}t^2, & 0\leq t\leq 1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$ 3

Να υπολογιστεί η συνέλιξή τους $g(t)=x(t)*y(t)$

Λύση

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau}(t-\tau)^2 d\tau$$

Πρέπει $\left.\begin{array}{l} t-\tau\leq 1 \rightsquigarrow t-1\leq\tau \\ t-\tau\geq 0 \rightsquigarrow t\geq\tau \end{array}\right\} t-1\leq\tau\leq t$

και $\tau\geq 1$

1. $g(t)=0$, $t\leq 1$ (αν $t-1\leq 0$)

2. $g(t)=\int_1^t \frac{1}{\tau}(t-\tau)^2 d\tau = t^2\ln(\tau)\Big|_1^t - 2t\tau\Big|_1^t + \frac{\tau^2}{2}\Big|_1^t$

$= t^2\ln(t)-2t^2+2t+\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}$ $\quad(1<t<2)$

(Πρέπει $0<t-1<1$)

3. $g(t)=\int_{t-1}^t \frac{1}{\tau}(t-\tau)^2 d\tau = t^2\ln(\tau)\Big|_{t-1}^t - 2t\tau\Big|_{t-1}^t + \frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-1}^t$

$= t^2\ln\left(\frac{t}{t-1}\right)-2t^2+2t(t-1)+\frac{t^2}{2}-\frac{(t-1)^2}{2}$ $\quad(t\geq 2)$

$= t^2\ln\left(\frac{t}{t-1}\right)-1/2$ $\quad$ (Πρέπει $t-1\geq 1$)

6. Έστω το σήμα: $x(t)=2\delta(t)-3\delta(t-4)$

και $h(t)=\begin{cases} t+2 & -2\leq t\leq -1 \\ 1 & -1<t\leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Να βρεθεί η συνέλιξη των δυο σημάτων $y(t)=h(t)*x(t)$

Λύση

$$y(t)=h(t)*\left(2\delta(t)-3\delta(t-4)\right)$$

$$=2\left(h(t)*\delta(t)\right)-3\left(h(t)*\delta(t-4)\right)$$

$$=2h(t)-3h(t-4)$$

7. Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων:

$x(t)=u(t)$

$h(t)=e^{-2t}u(t)$

Λύση

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\tau}u(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$

Πρέπει $u(\tau)u(t-\tau)=1 \Rightarrow \tau>0,\ t-\tau>0 \Rightarrow t>\tau \Rightarrow 0<\tau<t$

Για $t\leq 0 \Rightarrow y(t)=0$

Για $t>0 \Rightarrow y(t)=\displaystyle\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=-\frac{1}{2}e^{-2\tau}\Big]_{0}^{t}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}$

8. Έστω LTI συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(t)=\delta(t-3/2)$ (4)
και $h_2(t)=u(t)-u(t-2)$. Τα δυο συστήματα συνδέονται σειριακά.
Στην είσοδο του πρώτου εφαρμόζεται σήμα $x(t)=u(t+1/2)-u(t-1/2)$.
Να βρεθεί η έξοδος $y(t)$ μετά το δεύτερο σύστημα.

$$x_1(t) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}LTI\\ h_1(t)\end{array}} \xrightarrow{y_1(t)} \boxed{\begin{array}{c}LTI\\ h_2(t)\end{array}} \xrightarrow{y(t)}$$

<u>Λύση</u>

$$y(t)=[x_1(t)*h_1(t)]*h_2(t) = x_1(t)*(h_1(t)*h_2(t))$$

$$h_1(t)*h_2(t)=\delta(t-3/2)*(u(t)-u(t-2))=u(t-3/2)-u(t-7/2)$$

Άρα

$$y(t)=[u(t+1/2)-u(t-1/2)]*[u(t-3/2)-u(t-7/2)]$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{[u(\tau+1/2)-u(\tau-1/2)][u(t-3/2-\tau)-u(t-7/2-\tau)]}_{\text{Πρέπει να κάνει 1}}$$

άρα $\tau+1/2>0 \Rightarrow \tau>-1/2$ $\qquad t-3/2-\tau>0 \Rightarrow t-3/2>\tau$

$\tau-1/2\leq 0 \Rightarrow \tau\leq 1/2$ $\qquad t-7/2-\tau\leq 0 \Rightarrow t-7/2\leq\tau$

Αν $t-3/2\leq -1/2 \Rightarrow t\leq 1 \Rightarrow y(t)=0$

$$y(t)=\int_{-1/2}^{t-3/2} d\tau = t-1 \qquad (1<t\leq 2)$$

$$y(t)=\int_{-1/2}^{1/2} d\tau = 1 \qquad (2<t\leq 3)$$

$$y(t)=\int_{t-7/2}^{1/2} d\tau = 4-t \qquad 3<t\leq 4$$

$$y(t)=0 \quad , t>4$$

9. Στην είσοδο ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n)=a^n u(n)$ εφαρμόζεται το σήμα $x(n)=b^n u(n)$, όπου a,b γνωστές σταθερές και $a\neq b$. Αν πρόκειται για LTI σύστημα να υπολογιστεί η έξοδος $y(n)$.

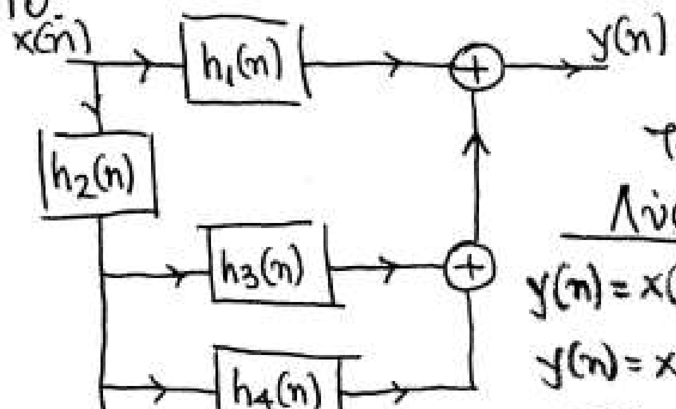
Λύση

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a^m u(m) b^{n-m} u(n-m)=\sum_{m=0}^{n} a^m b^{n-m}$$

$$=\underbrace{b^n\sum_{m=0}^{n}(ab^{-1})^m}_{\text{άθροισμα των } n+1 \text{ πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με } a_0=1 \text{ και } \lambda=a/b} = b^n\left(\frac{1-(ab^{-1})^{n+1}}{1-ab^{-1}}\right)=b^n\left(\frac{b-a^{n+1}\cdot b^{-n}}{b-a}\right)$$

$$=\frac{b}{b-a}b^n-\frac{a}{b-a}a^n$$

10.



Αν τα συστήματα είναι LTI να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(n)$ όλου του συστήματος.

Λύση

$$y(n)=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)*h_3(n)+x(n)*h_2(n)*h_4(n)$$

$$y(n)=x(n)*\left(h_1(n)+h_2(n)*h_3(n)+h_2(n)*h_4(n)\right)$$

άρα $h(n)=h_1(n)+h_2(n)*h_3(n)+h_2(n)*h_4(n)$

$$=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)+\delta(n)-\frac{1}{2}\delta(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$$

$$=2\delta(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^n\delta(n)=2\delta(n)-\delta(n)=\delta(n)$$

$h_1(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$

$h_2(n)=\frac{1}{2}\delta(n)-\frac{1}{4}\delta(n-1)$

$h_3(n)=2\delta(n)$

$h_4(n)=-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$