ΣΥΝΟΛΑ

Ένα **σύνολο** είναι μία συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων, τα δε αντικείμενά του ομάζονται **στοιχεία** του συνόλου.

Γράφουμε $S=\{a,b,c\}$, όταν θέλουμε να δηλώσουμε ότι το σύνολο που ονομάζεται S είναι η συλλογή των αντικειμένων a, b, και c.

Για να δηλώσουμε ότι το a είναι ένα στοιχείο του συνόλου S μπορούμε να γράψουμε $a\in S$, δηλαδή ότι το S περιέχει το a. Για να δηλώσουμε ότι το d **δεν είναι** στοιχείο του συνόλου S (δεν ανήκει στο σύνολο S) μπορούμε να γράψουμε $d\notin S$, δηλαδή ότι το S δεν περιέχει το d.

Υπάρχουν <u>διαφορετικοί τρόποι</u> για να περιγράψουμε ένα σύνολο,

- με αναγραφή των στοιχείων του, (αν αυτό είναι δυνατό), για παράδειγμα $S=\{2,4,6,8,10\}$ ή
- με περιγραφή κάποιας ιδιότητάς των στοχείων του, για παράδειγμα $S=\{x/x \quad \theta\varepsilon\tau\iota\kappa o\varsigma \quad \alpha\kappa\varepsilon\rho\alpha\iota o\varsigma \quad o\chi\iota \quad \mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda\upsilon\tau\varepsilon\rho o\varsigma \quad \tau o\upsilon \quad 10\}$

Πολύ γνωστά σύνολα που χρησιμοποιούμε είναι τα

$\mathbb{N}$, σύνολο των φυσικών αριθμών, $\{1,2,3,\ldots\}$

$\mathbb{Z}$, σύνολο των ακεραίων αριθμών, $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

$\mathbb{Q}$, σύνολο των ρητών αριθμών, οι ακέραιοι μαζί με τους κλασματικούς

$\mathbb{R}$, σύνολο των πραγματικών αριθμών, οι ρητοί και άρρητοι αριθμοί μαζί

$\mathbb{C}$, σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Δύο σύνολα A και B θα λέμε ότι είναι **ίσα** αν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Έτσι τα σύνολα

$$A=\{x/x \quad \theta\varepsilon\tau\iota\kappa o\varsigma \quad \text{αρτιος} \ \alpha\kappa\varepsilon\rho\alpha\iota o\varsigma \quad o\chi\iota \quad \mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda\upsilon\tau\varepsilon\rho o\varsigma \quad \tau o\upsilon \quad 10\}$$

και $B=\{x/ \quad x=y+z, \quad y\in\{1,3,5\},\ z\in\{1,3,5\}\}$ είναι ίσα.

Για δύο σύνολα A και B θα λέμε ότι το A είναι **υποσύνολο** του B, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Αυτό συμβολίζεται $A\subseteq B$. Για παράδειγμα,

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Θα σημειώνουμε $A \not\subseteq B$, αν το σύνολο A δεν είναι υποσύνολο του B, και αυτό συμβαίνει όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A που δεν ανήκει στο B, ($\exists\, p \in A: \quad p \notin B$). Ένα παράδειγμα είναι ότι το σύνολο $A = \{a,b\}$ είναι υποσύνολο του συνόλου $B = \{x,a,y,b,c\}$, αλλά δεν είναι υποσύνολο του συνόλου $F = \{x,a,d,c\}$.

Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο A υποσύνολο του B. Τότε το A θα είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B όταν το A δεν είναι ίσο με το B, όταν δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A. Αυτό συμβολίζεται $A \subset B$. Για παράδειγμα το $A = \{a,b,c\}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $B = \{x,a,y,b,c\}$.

Το σύνολο που **δεν περιέχει** στοιχεία ονομάζεται **κενό** σύνολο και συμβολίζεται $\{\ \}$ ή $\varnothing$.

Το ευρύτερο σταθερό σύνολο που **περιέχει** όλα τα σύνολα τα οποία εξετάζουμε ονομάζεται **γενικό** σύνολο και συμβολίζεται U.

Ιδιότητες συνόλων

i) $A \subseteq U$, $A \subseteq A$, $\varnothing \subseteq A$

ii) $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$, τότε $A \subseteq C$.

iii) $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$. Αντίστροφα, αν $A = B$, τότε $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Δηλαδή, αν το A είναι υποσύνολο του B και το B υποσύνολο του A τα σύνολα A, B είναι ίσα.

Πράξεις

- **Ένωση** δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν στο A ή στο B ή μπορεί να ανήκουν και στα δύο. Συμβολίζεται $A \cup B$, και με τη γλώσσα των συνόλων

$$A \cup B = \{x: \quad x \in A \quad \text{ή} \quad x \in B\}.$$

Ακολουθούν παραδείγματα ενώσεων συνόλων.

$\{a,b\} \cup \{c,d\} = \{a,b,c,d\}$

$\{a,b\} \cup \{a,d\} = \{a,b,d\}$

$\{a,b\} \cup \varnothing = \{a,b\}$

$\{a,b\} \cup \{\{a,b\}\} = \{a,b,\{a,b\}\}$

- **Τομή** δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν ταυτόχρονα στο A και B . Συμβολίζεται $A \cap B$ και με τη γλώσσα των συνόλων

$$A \cap B = \{x: \quad x \in A \quad \text{και} \quad x \in B\}.$$

Ακολουθούν παραδείγματα τομών συνόλων.

$\{a,b\} \cap \{a,d\} = \{a\}$

$\{a,b\} \cap \{c,d\} = \varnothing$

$\{a,b\} \cap \varnothing = \varnothing$

Τα σύνολα για τα οποία ισχύει $A \cap B = \varnothing$ ονομάζονται **αποσυνδεδεμένα** ή **ξένα**.

Τα παρακάτω σύνολα είναι **όμοια** καθώς τα στοιχεία που περιέχουν είναι *διακεκριμένα* ενώ δεν είναι *διατεταγμένα*: $\{a,a,b,c\}$, $\{b,a,c\}$, και $\{a,b,c\}$.

Τα σύνολα $A \cup B$ και $B \cup A$ είναι όμοια όπως επίσης και τα $A \cap B$ και $B \cap A$. Η ένωση του συνόλου $A \cup B$ με το σύνολο F συμβολίζεται με $(A \cup B) \cup F$ περιλαμβάνει τα στοιχεία των τριών συνόλων. Σε αυτή την περίπτωση η χρήση της παρένθεσης γίνεται για διαχωρισμό των συμβόλων κι όχι για να δώσει προτεραιότητα σε κάποια πράξη. Άρα μπορούμε να γράψουμε χωρίς σφάλμα $A \cup B \cup F$.

Γενικά το σύνολο $\left(\left(\ldots \cup \left(\left(A_1 \cup A_2\right) \cup A_3\right) \ldots\right) \cup A_{m-1}\right) \cup A_m$ είναι το ίδιο με το σύνολο $\ldots \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{m-1} \cup A_m$.

Ακριβώς με το ίδιο σκεπτικό και για την τομή ισχύει ότι το σύνολο $(A \cap B) \cap F$ περιέχει ακριβώς τα ίδια στοιχεία με το σύνολο $A \cap B \cap F$.

Γενικά το $\left(\left(\ldots\cap\left(\left(A_1\cap A_2\right)\cap A_3\right)\ldots\right)\cap A_{m-1}\right)\cap A_m$ περιέχει τα ίδια στοιχεία με το $\ldots\cap A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_{m-1}\cap A_m$.

- **Συμπλήρωμα** του συνόλου A, ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν στο γενικό σύνολο U και δεν ανήκουν στο A. Συμβολίζεται A^c, (ή A' ή $\overline{A}$), που με τη γλώσσα των συνόλων μπορούμε να γράψουμε

$$A^c=\left\{x:\quad x\in U,\, x\notin A\right\}.$$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ως $U=\mathbb{N}$, $A=\left\{1,2\right\}$ και $B=\left\{1,3,5,7\right\}$, τότε $A^c=\left\{3,4,5,6,\ldots\right\}$, $B^c=\left\{2,4,6,8,9,10,\ldots\right\}$.

- **Διαφορά** δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν στο A και όχι στο B. Συμβολίζεται $A-B$, δηλαδή,

$$A-B=\left\{x:\quad x\in A \quad \text{και} \quad x\notin B\right\}.$$

Για παράδειγμα:

$\left\{a,b,c\right\}-\left\{a\right\}=\left\{b,c\right\}$, $\quad\left\{a,b,c\right\}-\left\{a,d\right\}=\left\{b,c\right\}$ και $\left\{a,b,c\right\}-\left\{d,e\right\}=\left\{a,b,c\right\}$

- **Συμμετρική διαφορά** δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν στο A ή στο B αλλά όχι και στα δύο ταυτόχρονα. Συμβολίζεται $A\oplus B$, δηλαδή,

$$A\oplus B=\left\{x:\quad x\in A \quad \text{ή} \quad x\in B \quad \text{και} \quad x\notin A\cap B\right\}.$$

Μερικά παραδείγματα:

$\left\{a,b\right\}\oplus\left\{a,c\right\}=\left\{b,c\right\}$, $\quad\left\{a,b\right\}\oplus\varnothing=\left\{a,b\right\}$, $\quad\left\{a,b\right\}\oplus\left\{a,b\right\}=\varnothing$.

Όλα τα παραπάνω σύνολα τα οποία προέκυψαν από το συνδυασμό άλλων μπορούν να παρασταθούν και γραφικά. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται με τη χρήση διαγραμμάτων που είναι γνωστά και ως διαγράμματα Venn.

Άλγεβρα συνόλων- Ιδιότητες

Για να αποδειχθούν οι ιδιότητες που αναφέρονται χρησιμοποιούνται οι ορισμοί των πράξεων ή τα διαγράμματα του Venn.

$U^c = \varnothing$, $\varnothing^c = U$,	$\left(A^c\right)^c = A$
i) $A \cup A = A$,	$A \cap A = A$
ii) $A \cup B = B \cup A$ αντιμεταθετικός κανόνας	$A \cap B = B \cap A$
iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ προσεταιριστικός κανόνας	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ επιμεριστικός κανόνας	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
v) $A \cup A^c = U$,	$A \cap A^c = \varnothing$
vi)* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ κανόνες De Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
vii) $A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
viii) $A \cup U = U$	$A \cap U = A$
ix) Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cup B = B$	Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cap B = A$
x) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$	$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Πεπερασμένα σύνολα – Αρχή μέτρησης

Έστω το σύνολο $A=\{\{a,b,c\},d\}$. Το A περιέχει δύο στοιχεία τα $\{a,b,c\}$ και d.

Το σύνολο $B=\{a,b,c,\{a,b\}\}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα κουτί που περιέχει τέσσερα αντικείμενα τα a, b, c και $\{a,b\}$.

Με τον όρο **μέγεθος** ενός συνόλου εννοούμε κάποιον μη αρνητικό ακέραιο που δείχνει το πλήθος των στοιχείων που περιέχει αυτό το σύνολο. Γι΄ αυτό και ο αριθμός αυτός ονομάζεται και **πληθικός αριθμός του συνόλου**, και συμβολίζεται $n(\ )$. Έτσι το μέγεθος των προηγούμενων συνόλων A,B είναι $n(A)=2$, $n(B)=4$, αντιστοίχως, του $G=\{a,\varnothing,d\}$ είναι $n(G)=3$, του $K=\{\{a,b\}\}$ είναι $n(K)=1$ και του $\varnothing$ είναι 0. Ο αριθμός $n(\ )$ δηλώνει το πλήθος των στοιχείων ενός **πεπερασμένου** συνόλου. Υπάρχει όμως και η άλλη περίπτωση, αυτή των άπειρων συνόλων, όπως για παράδειγμα, το σύνολο των περιττών θετικών ακεραίων.

Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα **άπειρο** σύνολο. Έτσι για ένα σύνολο A, ορίζω σαν **ακόλουθό του** το σύνολο $A\cup\{A\}$, το οποίο και συμβολίζουμε με A^+. Για παράδειγμα το ακόλουθο του συνόλου $A=\{a,b\}$ είναι το σύνολο $A^+=\{a,b,\{a,b\}\}$, και το ακόλουθο του A^+ είναι το

$$\left(A^+\right)^+=\{a,b,\{a,b\},\{a,b,\{a,b\}\}\}.$$

Ονομάζοντας τα παραπάνω σύνολα $A,B,G,D,\ldots$ παρατηρούμε ότι

$$A=\{a,b\},\quad B=A^+,\quad G=B^+,\quad D=G^+ \text{ κ.ο.κ.}$$

Μπορούμε έτσι να κατασκευάσουμε μια ακολουθία από σύνολα που το μέγεθός τους συνεχώς αυξάνεται και η διαδικασία συνεχίζεται, αφού πάντα θα μπορούμε να κατασκευάσουμε και το ακόλουθο του προηγούμενου συνόλου.

Ορίζουμε τώρα ένα σύνολο N με τις ιδιότητες που ακολουθούν:

1. Το N να περιέχει το σύνολο 0.
2. Εάν το σύνολο n είναι στοιχείο του N, τότε και το n^+ είναι στοιχείο του.

3. Το N δεν περιέχει άλλα σύνολα εκτός από όσα περιγράφονται παραπάνω.

Αφού για κάθε τέτοιο στοιχείο *n* του N το ακόλουθό του περιέχεται επίσης στο N, τότε το N είναι πραγματικά ένα **άπειρο σύνολο**.

Έτσι, τα σύνολα διακρίνονται ως προς το μέγεθός τους σε **πεπερασμένα** και **άπειρα**. Στη συνέχεια τα άπειρα διακρίνονται σε **αριθμήσιμα** και σε **μη αριθμήσιμα**.

Ένα άπειρο σύνολο ονομάζεται **αριθμήσιμο** όταν υπάρχει μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του συνόλου και των στοιχείων του $\mathbb{N}$. Κάτι τέτοιο συμβαίνει όταν μπορούμε να ζευγαρώσουμε τα στοιχεία του συνόλου με τα στοιχεία του $\mathbb{N}$ με τέτοιο τρόπο ώστε το κάθε στοιχείο του ενός να ζευγαρώνει με ένα συγκεκριμένο στοιχείο του άλλου και αντιστρόφως.

Έτσι για παράδειγμα το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο. Επίσης το σύνολο των μη αρνητικών άρτιων ακεραίων $\{0,2,4,6,8,\ldots\}$ είναι αριθμήσιμο. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχει μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του συνόλου των φυσικών αριθμών και του συνόλου των μη αρνητικών άρτιων ακεραίων.

Τώρα θα δώσουμε ένα παράδειγμα μη αριθμήσιμου συνόλου. Έτσι τρία διαφορετικά παιδιά ρωτήθηκαν για τα αθλήματα που προτιμούν και οι απαντήσεις τους δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	Ποδόσφαιρο	Μπάσκετ	Βόλεϊ
Γιάννης	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ
Δήμητρα	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ
Κώστας	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ

Έστω ότι υπάρχει ένα παιδί που διαφωνεί

- με το Γιάννη για το ποδόσφαιρο,
- με τη Δήμητρα για το μπάσκετ και
- με τον Κώστα για το βόλεϊ.

Τότε αυτό το παιδί δεν είναι κανένα από τα προαναφερθέντα καθώς σε κάτι διαφωνεί με το καθένα από αυτά.

Αν υποθέσουμε στη συνέχεια ότι υπάρχουν *n* διαφορετικά παιδιά και *n* διαφορετικά αθλήματα. Με τον παραπάνω τρόπο βρίσκουμε ένα παιδί που διαφωνεί αντίστοιχα με το καθένα από τα n παιδιά σε κάποιο άθλημα. Άρα αυτό είναι ένα νέο παιδί.

Έτσι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι μη αριθμήσιμο σύνολο.

Ιδιότητα του συνόλου $\mathbb{N}$. (μέθοδος επαγωγής)
Ακολουθεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα για τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας γραμματόσημα των 3 και των 5 λεπτών. Θέλουμε να δείξουμε ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε οποιοδήποτε ταχυδρομικό τέλος με αξία μεγαλύτερη ή ίση των 8 λεπτών χρησιμοποιώντας αποκλειστικά γραμματόσημα αυτών των δύο τιμών. Αντιλαμβανόμαστε ότι δεν είναι εφικτό να προσπαθήσουμε να δείξουμε κάτι τέτοιο για όλες τις τιμές. Άρα θα πρέπει να προσπαθήσουμε με διαφορετικό τρόπο. Θα δείξουμε ότι αν καταφέρουμε να δημιουργήσουμε τέλη k λεπτών τότε είναι δυνατό να δημιουργήσουμε και τέλη k+1 λεπτών. Πρώτη περίπτωση που θα εξετάσουμε είναι να δημιουργήσουμε τέλη k λεπτών χρησιμοποιώντας τουλάχιστον ένα γραμματόσημο των 5 λεπτών. Αν αντικαταστήσουμε το γραμματόσημο αυτό με δύο των 3 λεπτών τότε προκύπτει μια διαδικασία δημιουργίας τελών k+1 λεπτών. Στη δεύτερη περίπτωση θα δημιουργήσουμε τέλη k λεπτών χρησιμοποιώντας γραμματόσημα των 3 λεπτών. Αφού $\mathrm{k} \geq 8$ θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον τρία γραμματόσημα των 3 λεπτών, τα οποία και μπορούν να αντικατασταθούν από 2 των 5 λεπτών δημιουργώντας τέλη k+1 λεπτών. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό μπορούμε να δημιουργήσουμε ταχυδρομικά τέλη οποιουδήποτε ποσού. Η λύση του παραπάνω προβλήματος στηρίζεται στη χρήση της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής.

Αρχή της Μαθηματικής επαγωγής Έστω ότι για μια πρόταση που εξαρτάται από ένα φυσικό αριθμό n μπορούμε να δείξουμε ότι:

1. Η πρόταση είναι αληθής για $n = n_0$.
2. Αν η πρόταση είναι αληθής για $n = k \quad (k \geq n_0)$ (υπόθεση επαγωγής), τότε είναι αληθής για $n = k + 1$.

Τότε η πρόταση είναι αληθής για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του n_0.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να αποδείξετε ότι ισχύει: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, για κάθε $n=1,2,\ldots$

Προφανώς για $n=1$ ισχύει, μια και $1=1^2$.

Έστω ότι ισχύει για $n=k$, η υπόθεση επαγωγής είναι

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 \qquad (*)$$

Απομένει να δείξουμε ότι ισχύει και για $n=k+1$, δηλαδή ότι ισχύει

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2 \qquad (?)$$

Όμως $\underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)}_{(*)}+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$.

Έτσι, σύμφωνα με την αρχή της επαγωγής ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό.

<u>Ασκήσεις</u>

1. $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$
2. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
3. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
5. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
6. $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποια συμπεράσματα που σχετίζονται με τον *πληθικό αριθμό των πεπερασμένων συνόλων*. Έστω $n(A)$ ο πληθικός αριθμός του συνόλου A.

Θα δείξουμε ότι

Για δύο πεπερασμένα σύνολα A_1 και A_2 ισχύει

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2). \qquad (1)$$

Απόδειξη. Κατά την καταμέτρηση των στοιχείων του συνόλου $A_1 \cup A_2$, πρώτα καταμετρούμε τα στοιχεία του A_1, τα οποία είναι στο πλήθος $n(A_1)$ και κατόπιν αυτά του A_2, τα οποία είναι $n(A_2)$. Τα στοιχεία του $A_1 \cap A_2$ μετρήθηκαν δύο φορές, μια φορά ως στοιχεία του A_1 και μια φορά ως στοιχεία του A_2, άρα πρέπει να τα αφαιρέσουμε μια φορά από τα συνολικά. Έτσι έχουμε

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2).$$ ◆◆

Σχόλια :

1. Τώρα, όταν τα σύνολα A_1 και A_2 είναι ξένα, δηλαδή $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ τότε $n(A_1 \cap A_2) = n(\varnothing) = 0$, συνεπώς ο παραπάνω τύπος, όταν $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ γίνεται

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2).$$

   Η τελευταία σχέση είναι γνωστή **ως αρχή του αθροίσματος**.

2. Λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα (v) των συνόλων και το προηγούμενο σχόλιο έχουμε $n(U) = n(A \cup A^c) = n(A) + n(A^c)$, άρα

$$n(A^c) = n(U) - n(A). \qquad (2)$$

3. Με τη βοήθεια ενός διαγράμματος Venn εύκολα μπορούμε να δούμε πως ισχύει $A = (A-B) \cup (A \cap B)$ και $(A-B) \cap (A \cap B) = \varnothing$, επομένως με βάση το πρώτο σχόλιο έχουμε $n(A) = n((A-B) \cup (A \cap B)) = n(A-B) + n(A \cap B)$, συνεπώς αποκτούμε τη σχέση

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B). \qquad (3)$$

Παράδειγμα 2: Έστω ότι από 32 άτομα που συμμετέχουν στο πρόγραμμα ανακύκλωσης χαρτιού (X) και πλαστικού μπουκαλιού (M), γνωρίζουμε ότι τα 30 συγκεντρώνουν (X) και τα 14 συγκεντρώνουν (M). Να υπολογισθεί το πλήθος των ατόμων τα οποία

i) συγκεντρώνουν και τα δύο υλικά

ii) συγκεντρώνουν μόνο (X)

iii) συγκεντρώνουν μόνο (M)

Απάντηση: Με βάση τα δεδομένα έχουμε $n\left(X\cup M\right)=32$, $n\left(X\right)=30$ και $n\left(M\right)=14$,

i) οπότε σύμφωνα με τον προηγούμενο νόμο έχουμε

$$n\left(X\cup M\right)=n\left(X\right)+n\left(M\right)-n\left(X\bigcap M\right)\Rightarrow 32=30+14-n\left(X\bigcap M\right)\Rightarrow n\left(X\bigcap M\right)=12$$

ii) Επειδή χρειάζεται να υπολογίσουμε το πλήθος των ατόμων που συγκεντρώνουν μόνο X, αρκεί να βρούμε το $n\left(X-M\right)$. Όπως και στο (3) του παραπάνω σχολίου έχουμε $\left(X-M\right)\cup\left(X\cap M\right)=X$ και $\left(X-M\right)\cap\left(X\cap M\right)=\varnothing$, οπότε

$$n\left(X-M\right)=n\left(X\right)-n\left(X\cap M\right)=30-12=18.$$

iii) Ακολουθώντας τους ίδιους συλλογισμούς με το προηγούμενο ερώτημα θα καταλήξουμε $n\left(M-X\right)=n\left(M\right)-n\left(X\cap M\right)=14-12=2$.

Για δύο πεπερασμένα σύνολα A_1 και A_2 ισχύει

$$n\left(A_1^c\cap A_2^c\right)=n\left(U\right)-n\left(A_1\right)-n\left(A_2\right)+n\left(A_1\cap A_2\right), \qquad (4)$$

δηλαδή,

«το πλήθος των στοιχείων που δεν έχουν καμία ιδιότητα ισούται με το ολικό πλήθος των στοιχείων μείον το πλήθος των στοιχείων που έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα a_1 μείον το πλήθος των στοιχείων που έχουν την ιδιότητα a_2 συν το πλήθος των στοιχείων που έχουν και τις δύο ιδιότητες».

Απόδειξη. Σύμφωνα με την ιδιότητα (vi) έχουμε $A_1^c\cap A_2^c=\left(A_1\cup A_2\right)^c$, οπότε

$$n\left(A_1^c \cap A_2^c\right) = n\left(\left(A_1 \cup A_2\right)^c\right) \overset{(2)}{=} n(U) - n\left(A_1 \cup A_2\right)$$
$$\overset{(1)}{=} n(U) - \left[n\left(A_1\right) + n\left(A_2\right) - n\left(A_1 \cap A_2\right)\right]$$
$$= n(U) - n\left(A_1\right) - n\left(A_2\right) + n\left(A_1 \cap A_2\right).$$

◆◆

Ο παραπάνω κανόνας γενικεύεται και για περισσότερα σύνολα, ως εξής :

$$n\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_m^c\right) = n(U) - \sum_{j=1}^{m} n\left(A_j\right) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} n\left(A_i \cap A_j\right) - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{m} n\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right)$$
$$+ \cdots + (-1)^m \, n\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m\right) \qquad (5)$$

Για $m = 3$ ο τύπος (5) γίνεται

$$n\left(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c\right) = n(U) - \left[n\left(A_1\right) + n\left(A_2\right) + n\left(A_3\right)\right] +$$
$$\left[n\left(A_1 \cap A_2\right) + n\left(A_2 \cap A_3\right) + n\left(A_1 \cap A_3\right)\right] - n\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \qquad (6)$$

Τέλος χρησιμοποιώντας τον τύπο(vi) De Morgan ο τύπος (5) δίνει

$$n\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m\right) = \sum_{j=1}^{m} n\left(A_j\right) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} n\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{m} n\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right)$$
$$+ \cdots + (-1)^{m+1} \, n\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m\right) \qquad (7)$$

και ιδιαίτερα για $m = 3$ έχουμε

$$n\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) = n\left(A_1\right) + n\left(A_2\right) + n\left(A_3\right) - \left[n\left(A_1 \cap A_2\right) + n\left(A_2 \cap A_3\right) + n\left(A_1 \cap A_3\right)\right]$$
$$+ n\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right). \qquad (8)$$

<u>**Σχόλια :**</u> (i) Ο (7) είναι ο γνωστός τύπος με το όνομα **«αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού»**.

(ii) Στην ειδική περίπτωση όπου $A_i \cap A_j = \varnothing$ για κάθε $i \neq j$, ο (7) γράφεται

$$n\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m\right) = \sum_{j=1}^{m} n\left(A_j\right)$$

(8α)

ο τελευταίος τύπος (8α) είναι γνωστός στη βιβλιογραφία ως **«αρχή αθροίσματος»**.

<u>Παράδειγμα 3:</u> Να βρεθούν το πλήθος των φυσικών αριθμών, που είναι μικρότεροι του 2006 και δεν διαιρούνται ούτε με το 4, ούτε με το 5.

Απάντηση : Για να βρούμε το πλήθος των αριθμών που δεν είναι πολλαπλάσια του 4 και του 5, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (4), όπου να θεωρήσουμε ως σύνολο A_1 το σύνολο που έχει όλα τα πολλαπλάσια του 4,

$$A_1 = \{k \in \mathbb{N}: \quad k \le 2005 \quad \text{και} \quad k = 4r, \quad r \in \mathbb{N}\} = \left\{ \underbrace{4}_{4\cdot 1}, \underbrace{8}_{4\cdot 2}, \underbrace{12}_{4\cdot 3} \ldots, \underbrace{2004}_{4\cdot 501} \right\}$$

το σύνολο A_2 με τα πολλαπλάσια του 5

$$A_2 = \{k \in \mathbb{N}: \quad k \le 2005 \quad \text{και} \quad k = 5t, \quad t \in \mathbb{N}\} = \left\{ \underbrace{5}_{5\cdot 1}, \underbrace{10}_{5\cdot 2}, \underbrace{15}_{5\cdot 3} \ldots, \underbrace{2005}_{5\cdot 401} \right\}$$

και το σύνολο της τομής τους, τα πολλαπλάσια του 4 και 5 ταυτόχρονα, δηλαδή τα πολλαπλάσια του 20 που είναι το σύνολο

$$A_1 \cap A_2 = \{k \in \mathbb{N}: \quad k \le 2005 \quad \text{και} \quad k = 20z, \quad z \in \mathbb{N}\} = \left\{ \underbrace{20}_{20\cdot 1}, \underbrace{40}_{20\cdot 2}, \underbrace{60}_{20\cdot 3} \ldots, \underbrace{2000}_{20\cdot 100} \right\}.$$

Έτσι οι πληθικοί αριθμοί των παραπάνω συνόλων είναι

$$n(A_1) = \left[\frac{2005}{4}\right] = 501, \quad n(A_2) = \left[\frac{2005}{5}\right] = 401 \quad \text{και} \quad n(A_1 \cap A_2) = \left[\frac{2005}{20}\right] = 100,$$

όπου $[\cdot]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος [1].

Από (4) έχουμε

$$n\left(A_1^c \cap A_2^c\right) = n(U) - n(A_1) - n(A_2) + n(A_1 \cap A_2) = 2005 - 501 - 401 + 100 = 1103.$$

<u>Παράδειγμα 4 :</u> Σε μια τάξη 30 μαθητών υπάρχουν 12 που έχουν κλίση στα μαθηματικά (Μ), 14 στη φυσική (Φ), 13 στη χημεία (Χ), 5 στα μαθηματικά και φυσική, 7 στη φυσική και χημεία και 4 στα μαθηματικά και στη χημεία. Ακόμη υπάρχουν 3 που έχουν κλίση και στα τρία μαθήματα. Ποιοι μαθητές δεν έχουν κλίση σε κανένα από τα τρία μαθήματα;

Απάντηση: Από τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε $n(\mathrm{M}) = 12$, $n(\Phi) = 14$, $n(\mathrm{X}) = 13$, $n(\mathrm{M} \cap \Phi) = 5$, $n(\Phi \cap \mathrm{X}) = 7$, $n(\mathrm{M} \cap \mathrm{X}) = 4$ και $n(\mathrm{M} \cap \Phi \cap \mathrm{X}) = 3$. Χρησιμοποιώντας

---

[1] Ακέραιο μέρος ενός αριθμού είναι ο μικρότερος ακέραιος αυτού συμβολίζεται $[\cdot]$ και ισχύει $[x] \le x \le [x] + 1$.

τον (6) έχουμε

$$n\left(\mathrm{M}^c\cap\Phi^c\cap\mathrm{X}^c\right)=n(U)-\left[n(\mathrm{M})+n(\Phi)+n(\mathrm{X})\right]+\left[n(\mathrm{M}\cap\Phi)+n(\Phi\cap\mathrm{X})+n(\mathrm{M}\cap\mathrm{X})\right]$$
$$-n(\mathrm{M}\cap\Phi\cap\mathrm{X})$$
$$=30-\left[12+14+13\right]+5+7+4-3=4.$$

Πρόταση : Ένα σύνολο S με k διαφορετικά στοιχεία έχει 2^k διαφορετικά υποσύνολα.

Για παράδειγμα το $S=\{1,2,3\}$ έχει $k=3$ διαφορετικά στοιχεία, άρα $2^3=8$ διαφορετικά υποσύνολα, τα οποία είναι $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.

Ορισμός : Έστω το μη κενό σύνολο U. Μια συλλογή μη κενών υποσυνόλων, $A_i\subseteq U$, του U, $U=\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}$ με τις ιδιότητες $U=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$ και $A_i\cap A_j=\varnothing$ για κάθε $i\neq j$, ονομάζεται **διαμέριση** του συνόλου U.

Αρχή γινομένου ή **αρίθμησης :** Αν μπορεί ένα γεγονός F να πραγματοποιηθεί με m και ένα άλλο γεγονός E, αποσυνδεδεμένο-ανεξάρτητο του προηγουμένου, μπορεί να πραγματοποιηθεί με n τρόπους, τότε οι το γεγονός F και E μπορεί να συμβεί κατά $m\cdot n$ τρόπους.

Μπορεί η διαδικασία να εφαρμοστεί για πεπερασμένα το πλήθος γεγονότα, το ένα ακολουθεί το άλλο, τα οποία είναι αποσυνδεμένα μεταξύ τους.

Η αρχή αυτή αναφέρεται και για πεπερασμένα σύνολα και διατυπώνεται ως εξής.

Αρχή γινομένου ή **αρίθμησης :** Αν μπορεί ένα σύνολο U να διαμερισθεί σε k υποσύνολα A_i, $i=1,2,\ldots,k$ και ο πληθικός αριθμός του καθενός είναι $n(A_i)=m_i$, τότε οι διαμερίσεις του U μπορεί να γίνουν με

$$m_1 m_2 \ldots m_k = \prod_{i=1}^{k} n\left(A_i\right) \tag{9}$$

τρόπους.

Στην περίπτωση που είναι $n\left(A_1\right) = n\left(A_2\right) = \ldots = n\left(A_k\right) = m$, ο (9) γίνεται m^k τρόπους.

Παράδειγμα 5: Έστω ότι η διαδρομή Αθήνα-Θεσσαλονίκη πραγματοποιείται με 4 διαφορετικούς τρόπους $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ και η διαδρομή Θεσσαλονίκη-Καβάλα πραγματοποιείται με 3 διαφορετικούς τρόπους $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. Η διαδρομή Αθήνα-Καβάλα μπορεί να πραγματοποιηθεί με $4 \cdot 3 = 12$ τρόπους, που μπορεί να είναι

$(\alpha_1,\beta_1), (\alpha_1,\beta_2), (\alpha_1,\beta_3), (\alpha_2,\beta_1), (\alpha_2,\beta_2), (\alpha_2,\beta_3), (\alpha_3,\beta_1), (\alpha_3,\beta_2), (\alpha_3,\beta_3), (\alpha_4,\beta_1),$
$(\alpha_4,\beta_2), (\alpha_4,\beta_3)$.

Το τελευταίο μπορούμε να το βρούμε και με δενδρόγραμμα.

Παράδειγμα 6: **i)** Πόσοι από τους τριψήφιους φυσικούς αριθμούς περιέχουν το 8; (συμπεριλαμβανομένου του 0)

Απάντηση : Οι τριψήφιοι συμπεριλαμβανομένου του 0 είναι $n(U) = 1000$, αν θεωρήσουμε A_1 το σύνολο με τα ψηφία που θα κατέχουν την 1η θέση του τριψήφιου και δεν περιέχουν το 8, προφανώς έχουμε $A_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,9\}$, όμοια αν A_2 το σύνολο με τα ψηφία που θα κατέχουν τη 2η θέση του τριψήφιου και δεν περιέχουν το 8, και A_3 το σύνολο με τα ψηφία που θα κατέχουν την 3η θέση του τριψήφιου και δεν περιέχουν το 8 προφανώς προκύπτει $A_1 = A_2 = A_3$.

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{9} & \times & \boxed{9} & \times & \boxed{9} & = 729 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ n(A_1) & & n(A_2) & & n(A_3) & \end{array}$$

Από την (2) έχουμε $n\left(A^c\right) = 1000 - 729 = 271$, οι τριψήφιοι που δεν περιέχουν το 8.

ii) Πόσες αθηναϊκές πινακίδες μπορούν να εκτυπωθούν (υπολογίζουμε ότι ως πρώτο γράμμα είναι το Ι και ότι οι αριθμοί για να είναι τετραψήφιοι το πρώτο ψηφίο δεν είναι το μηδέν) ;

Απάντηση : Κάθε πινακίδα αποτελείται από τρεις θέσεις γραμμάτων και τέσσερις θέσεις αριθμών, οπότε αν $A_1 = \{\mathrm{I}\}$ $A_2 = A_3 = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \Omega\}$, $A_4 = \{1, 2, \ldots, 9\}$,

$A_5 = A_6 = A_7 = \{0,1,2,\ldots,9\}$, τότε σύμφωνα με την αρχή γινομένου το πλήθος των πινακίδων είναι

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \boxed{1} & \times & \boxed{24} & \times & \boxed{24} & \times & \boxed{9} & \times & \boxed{10} & \times & \boxed{10} & \times & \boxed{10} & = 5184000. \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ n(A_1) & & n(A_2) & & n(A_3) & & n(A_4) & & n(A_5) & & n(A_6) & & n(A_7) & \end{array}$$

Στα επόμενα θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ με $n(A) = n$ στοιχεία.

Ορισμός : Μια τοποθέτηση των (**όλων**) n διαφορετικών στοιχείων σε μια **σειρά** ονομάζεται **μετάθεση**, δηλαδή μια διατεταγμένη $n -$ **άδα** $\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}\right)$, όπου $i_k \neq i_j$, για κάθε $i_k, i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

<u>Παράδειγμα 7:</u> Αν έχουμε $A = \{a, b, c\}$ τότε οι abc, cab, acb είναι μεταθέσεις των τριών γραμμάτων. Πόσες τέτοιες υπάρχουν; Εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι είναι $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$ οι εξής $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Αποδεικνύεται ότι :

Πρόταση : Το πλήθος των **μεταθέσεων** n διαφορετικών στοιχείων είναι

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n, \text{ και } 0! = 1, \tag{10}$$

δηλαδή, *στις μεταθέσεις έχουμε n αντικείμενα, τα χρησιμοποιούμε όλα με μια συγκεκριμένη σειρά.*

Συχνά θέλουμε να γνωρίζουμε το πλήθος των μεταθέσεων των n πολλαπλών στοιχείων ενός συνόλου όπου τα αντικείμενα επιτρέπεται να επαναλαμβάνονται $n_1, n_2, \ldots, n_k$ φορές το καθένα. Αποδεικνύεται ότι ισχύει:

Πρόταση : Το πλήθος των **μεταθέσεων με επανάληψη** των n πολλαπλών στοιχείων ενός συνόλου, όπου τα στοιχεία επαναλαμβάνονται $n_1, n_2, \ldots, n_k$ είναι

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}, \tag{11}$$

και ισχύει $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

<u>**Παράδειγμα 8:**</u> **i)** Να υπολογισθούν όλες οι διαφορετικές λέξεις που μπορούν να σχηματισθούν χρησιμοποιώντας όλα τα γράμματα της λέξης RADAR.

Απάντηση: Η λέξη RADAR έχει 5 χαρακτήρες-στοιχεία, άρα $n = 5$, από τα οποία τα δύο είναι ίδια (τα δύο R), άρα $n_1 = n_R = 2$, επίσης υπάρχουν άλλα δύο ίδια (τα δύο A), άρα $n_2 = n_A = 2$ και το άλλο παρουσιάζεται μία φορά $n_3 = n_D = 1$, οπότε με βάση τον (11), έχουμε $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} = \dfrac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$ διαφορετικές λέξεις.

ii) Πόσες λέξεις σχηματίζονται από τη λέξη MAMA και ποιες;

Απάντηση: Σύμφωνα με το (11) είναι $n = 4$, $n_1 = n_2 = 2$, οπότε υπάρχουν $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2!} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ λέξεις οι οποίες είναι : MMAA, MAMA, MAAM, AMMA, AMAM, AAMM.

Ορισμός : Αν ένα σύνολο έχει n διαφορετικών αντικείμενα και τοποθετούνται τα r με $r \le n$ σε μια σειρά ταυτόχρονα, τότε αναφερόμαστε στην **διάταξη** των n στοιχείων ανά r, δηλαδή, μια διατεταγμένη $r-$ **άδα** $\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}\right)$, όπου $i_k \neq i_j$, για κάθε $i_k, i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Πρόταση : Το πλήθος των **διατάξεων** των n διαφορετικών στοιχείων ανά r ισούται με

$$\mathrm{P}(n,r) = n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \tag{12}$$

όπου $\mathrm{P}(n,r)$ θα συμβολίζουμε ο πλήθος των διατάξεων. Στις *διατάξεις έχουμε* n *αντικείμενα χρησιμοποιούμε μόνο τα* r *με μια συγκεκριμένη σειρά.*

Σχόλια : Αν $r = n$, τότε από τον τύπο των διατάξεων έχουμε

$$\mathrm{P}(n,n) = n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-n+1) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!,$$

οπότε οι διατάξεις είναι ακριβώς όσες και οι μεταθέσεις.

<u>Παράδειγμα 9:</u> Αν έχουμε $A = \{a,b,c,d,e\}$ και θέλουμε να υπολογίσουμε πόσες διαφορετικές τριάδες σχηματίζονται από τον (12) έχουμε ότι είναι $\mathrm{P}(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2} = 60$, οι οποίες είναι οι εξής:

abc, *abd*, *abe*, *ade*, *acd*, *ace*, *acb*, *adb*, *aeb*, *aed*, *adc*, *aec*,
bac, *bad*, *bae*, *bcd*, *bce*, *bde*, *bca*, *bda*, *bea*, *bdc*, *bec*, *bed*,
cab, *cad*, *cae*, *cbd*, *cbe*, *cde*, *cba*, *cda*, *cea*, *cdb*, *ceb*, *ced*,
dab, *dac*, *dae*, *dbc*, *dbe*, *dce*, *dba*, *dca*, *dea*, *dcb*, *deb*, *dec*,
eab, *eac*, *ead*, *ebc*, *ebd*, *ecd*, *eba*, *eca*, *eda*, *ecb*, *edb*, *edc*.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι αν ενδιαφερόμαστε για το πλήθος των στοιχείων του συνόλου με τριάδες που θα δινόταν η δυνατότητα επανάληψης των στοιχείων (δηλαδή **με επανάθεση** των στοιχείων στο αρχικό) είναι σύμφωνα με την αρχή γινομένου

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{5} & \times & \boxed{5} & \times & \boxed{5} & = & 125 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ n(A) & & n(A) & & n(A) & & \end{array}$$

Πράγματι αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση : Το πλήθος των **διατάξεων με επανάληψη** των n διαφορετικών στοιχείων ανά r ισούται με n^r.

<u>Παράδειγμα 10:</u> Πόσοι είναι οι τετραψήφιοι αριθμοί με ψηφία από το σύνολο $\{1,2,3\}$;

Απάντηση : Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση $n=3$ και $r=4$, οπότε οι διαφορετικοί αριθμοί είναι $3^4=81$ στο πλήθος. Τέτοιοι μπορεί να είναι 1111, 2222, 3333, 1231, 1213, 1321, 1312, κ.λ.π.

Ορισμός : Συνδυασμός n διαφορετικών αντικειμένων από τα οποία λαμβάνονται τα r ταυτόχρονα με $r \leq n$, είναι κάθε συλλογή r από τα αντικείμενα όπου δεν υπολογίζεται η σειρά, δηλαδή συνδυασμός r ενός συνόλου n στοιχείων είναι κάθε σύνολο που έχει r στοιχεία. Οι συνδυασμοί συμβολίζονται $C(n,r)$.

Πρόταση : Το πλήθος των **συνδυασμών** των n διαφορετικών στοιχείων ανά r ισούται με

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}, \tag{13}$$

Στους συνδυασμούς των n αντικειμένων χρησιμοποιούμε μόνο τα r χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά.

<u>Παράδειγμα 11:</u> Αν έχουμε $A=\{a,b,c,d,e\}$ και θέλουμε να υπολογίσουμε πόσες τριάδες σχηματίζονται από την (13) έχουμε ότι είναι

$C(5,3)=\dfrac{5!}{3!(5-3)!}=\dfrac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4\cdot 5}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1\cdot 2}=10$ τριάδες. Οι 10 συνδυασμοί είναι οι εξής:

$$abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade,\ bcd,\ bce,\ bde,\ cde.$$

Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό του Παραδείγματος 9. Τι παρατηρείτε;

Ιδιότητες

i) $C(n,n-r)=\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}=C(n,r)$

ii) $C(n,n)=C(n,0)=\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!n!}=1$

iii) $C(n,n-1)=C(n,1)=\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$

iv) $C(n,2)=\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$

v) $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων στηρίζονται στον ορισμό των συνδυασμών. Χρησιμότητα στο τρίγωνο Pascal, οπότε υπολογίζονται οι συντελεστές πολυωνύμων στην ταυτότητα του Νεύτωνα ή δυωνυμικό ανάπτυγμα.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$ $\cdots$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
$\vdots$									

<u>Δυωνυμικό ανάπτυγμα</u> : $(\alpha+\beta)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\alpha^r\beta^{n-r}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\beta^r\alpha^{n-r}$. (14)

<u>Παράδειγμα 12 :</u> Έστω ο πίνακας $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε B^{2006}.

Απάντηση : Μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα B ως εξής:

$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A+I$. Αν υπολογίσουμε μερικές δυνάμεις του A εύκολα

βρίσκουμε ότι είναι $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A^3=A^2A=\mathbb{O}$, $A^4=A^3A=\mathbb{O}$, …, $A^k=\mathbb{O}$, $k\geq 3$.

Από την (14) έχουμε

$$\begin{aligned}B^{2006}&=\left(A+I\right)^{2006}=\sum_{r=0}^{2006}\binom{2006}{r}A^rI^{2006-r}=\sum_{r=0}^{2006}\binom{2006}{r}A^r\\&=\binom{2006}{0}A^0+\binom{2006}{1}A^1+\binom{2006}{2}A^2+\binom{2006}{3}A^3+\cdots+\binom{2006}{2006}A^{2006}\\&=I+2006A+\frac{2006\cdot 2005}{2}A^2=\begin{pmatrix}1&2006&{}^{2006\cdot 2005}\!/\!_{2}\\0&1&2006\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$