

# Τομογραφική Ανακατασκευή εικόνας

Κ. Δελήμπασης

- <http://www.dspguide.com/ch25/5.htm>

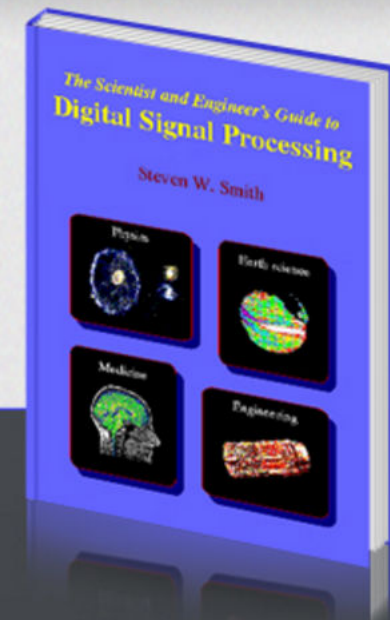
## The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing

By Steven W. Smith, Ph.D.

[Home](#)   [The Book by Chapters](#)   [About the Book](#) ▼   [Steven W. Smith](#)   [Blog](#)   [Contact](#)

**Yes, it's true - You can browse and/or  
download the entire book without  
charge**

- » Browse and/or download chapters from the book
- » Copyright and permissible use



<https://engineering.purdue.edu/~malcolm/pct/>

## Principles of Computerized Tomographic Imaging

[Avinash C. Kak](#)

School of Electrical Engineering  
Purdue University

[Malcolm Slaney](#)

Originally: Schlumberger Palo Alto Research  
Currently: [Yahoo! Research](#)



# Βασικές έννοιες της τομογραφικής ανακατασκευής

- Κάθε απεικονιστικό σύστημα μετρά την τιμή μίας φυσικής ποσότητας,
  - συντελεστής εξασθένιση  $\mu$  ακτίνων  $X$  που διέρχονται από τους ιστούς στον αξονικό τομογράφο (CT)
  - Συγκέντρωση ραδιοϊσοτόπου σε SPECT, PET
  - Χρόνοι αποκατάστασης, πυκνότητα πρωτονίων (MRI)
- Η μετρήσιμη ποσότητα  $\mu$  παρουσιάζει χωρική κατανομή  $\mu(x,y)$ , αλλά η μέτρηση των τιμών της γίνεται έμμεσα, υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα των τιμών κατά μήκος ευθυγραμμων διαδρομών
- Ανακατασκευή (reconstruction): ο υπολογισμός της αριθμητικής τιμής μίας φυσικής ποσότητας  $\mu$  σε κάθε θέση  $(x,y)$  ενός επιλεγμένου επιπέδου («τομή»)
- Κάθε τομή ψηφιοποιείται σε μια μήτρα συντελεστών  $\mu(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y)$  που αντιστοιχούν στους διαφορετικούς ιστούς της τομής.
- Κάθε στοιχείο της μήτρας (τυπικά μεγέθους  $\Delta x \cdot \Delta y \sim 1 \times 1 \text{ mm}$ ) θεωρείται ότι παρουσιάζει σταθερό συντελεστή  $\mu$ .

# Δύο προσεγγίσεις

- Οι ανατομικές δομές μιας 2-D τομής μπορούν να ανακατασκευαστούν από πολλαπλές προβολές της τομής που λαμβάνονται από διαφορετικές γωνίες
- Αλγεβρική θεώρηση: η ανακατασκευή μπορεί να γίνει σαν επίλυση ενός υπερκαθορισμένου γραμμικού συστήματος εξισώσεων με επαναληπτικό τρόπο.

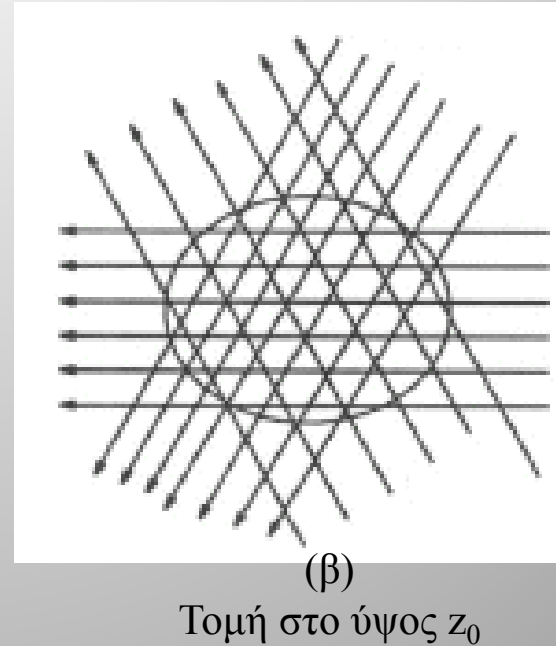
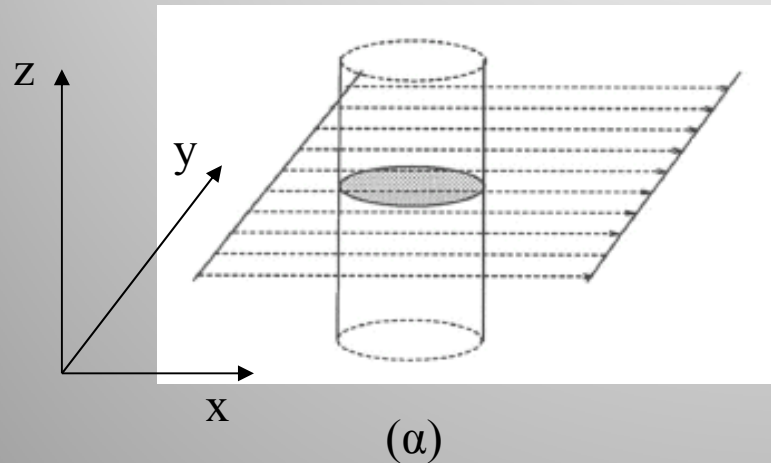
# Το φαινόμενο της εξασθένησης δέσμης ακτίνων X

- Βάσει του νόμου απορρόφησης του Beer για παράλληλη μονοενεργειακή δέσμη ακτίνων X η οποία διέρχεται από υλικό με συντελεστή γραμμικής απορρόφησης  $\mu$  ( $\text{cm}^{-1}$ ), ισχύει:

The diagram shows a horizontal beam of X-rays entering from the left. The initial number of photons is labeled  $N_0$ . The beam passes through a rectangular block representing a material of total thickness  $\Delta x$ . This block is divided into four equal-width sections, each labeled with an absorption coefficient  $\mu_1, \mu_2, \mu_3,$  and  $\mu_4$  from left to right. A double-headed arrow above the block indicates the total thickness  $\Delta x$ . After exiting the block on the right, the number of photons is labeled  $N_1$ . To the right of the diagram, the Beer-Lambert law is written as  $N_1 = N_0 e^{-\Delta x(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)}$ .

- Όπου:
  - $N_0, N_1$  το πλήθος των προσπίπτοντων και εξερχόμενων φωτονίων
  - $\Delta x$  το στοιχειώδες μήκος κατά το οποίο θεωρείται ο συντελεστής  $\mu$  σταθερός.
- Ας σημειωθεί ότι αντί του πλήθους  $N_0, N_1$  το πλήθος των φωτονίων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ισοδύναμα η ροή τους, ή η ένταση της δέσμης

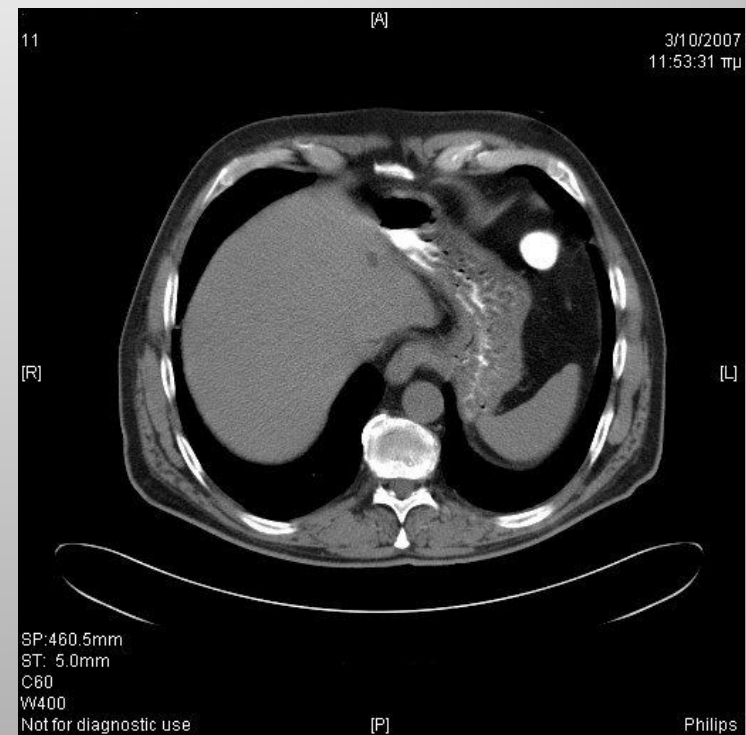
# Η έννοια της ανακατασκευής της κατανομής συντελεστών $\mu(x,y)$ , από ένα αριθμό παράλληλων προβολών



- Επιλέγεται τομή στο ύψος  $z_0$  ενός αντικειμένου (α).
- Μία ανακατασκευασμένη εγκάρσια τομή του CT έχει την ακόλουθη τιμή για κάθε pixel  $(i,j)$ :

$$I(i,j) = \frac{\mu_{\text{ιστου}}(i\Delta x, j\Delta y) - \mu_{\text{νερου}}}{\mu_{\text{νερου}}}$$

Κ. Δελήμπασης



Αξονικός τομογράφος: Ανακατασκευή εγκάρσιας τομής στο επίπεδο α) της ουροδόχου κύστης, β) του ήπατος

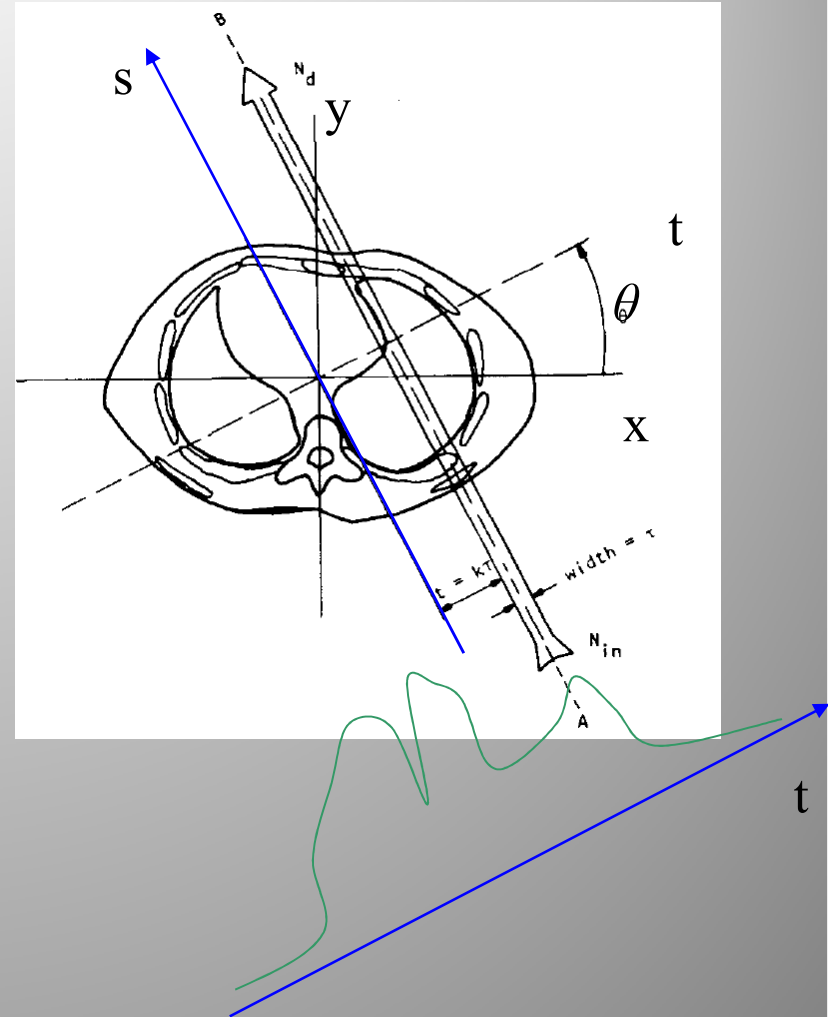
Κ. Δελήμπασης



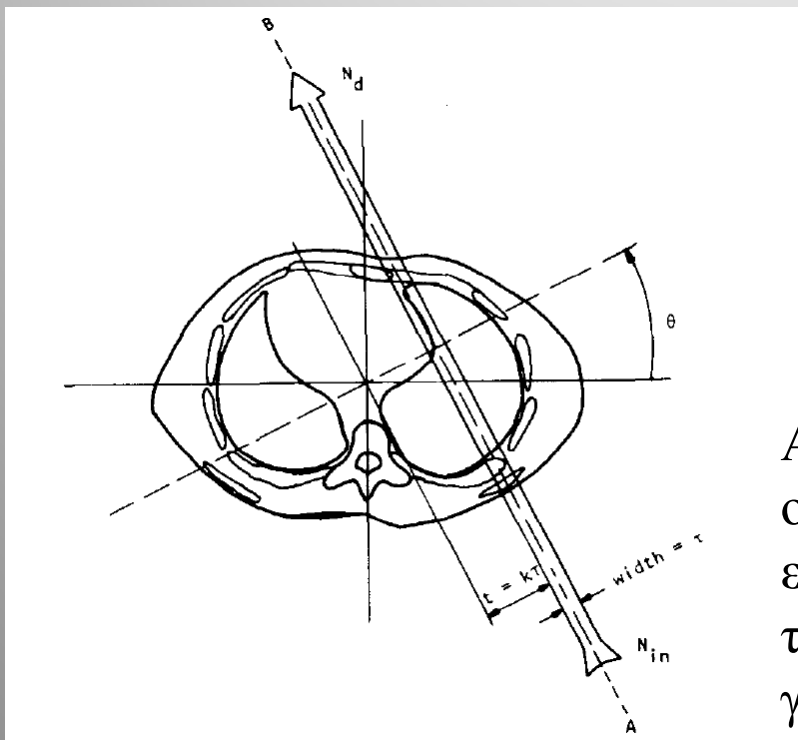
# Ορισμός της παράλληλης προβολής

- Εστω σώμα του οποίου απεικονιζόμενη ποσότητα  $\mu$  είναι συνάρτηση της θέσης  $\mu=f(x,y)$ ,
- η προβολή  $P_\theta(t)$  σε άξονα που σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον άξονα  $X$ , ορίζεται ως το ολοκλήρωμα της  $\mu(x,y)$  κατά μήκος μίας ευθείας κάθετη στον άξονα.

$$P_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) ds$$



## Ορισμός της παράλληλης προβολής



$$N = N_0 e^{-\int_{-\infty}^{\infty} \mu(t,s) ds} \Rightarrow$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty} \mu(t,s) ds \approx \Delta s \sum_{-\infty}^{\infty} \mu(t,s) = \ln \left( \frac{N}{N_0} \right)$$

Αν θεωρήσουμε ένα σώμα του οποίου ο συντελεστής απορρόφησης  $\mu$  είναι συνάρτηση της θέσης  $\mu=f(x,y)$ , τότε η προβολή σε άξονα που σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον άξονα  $X$ , ορίζεται ως εξής:

# Σχέση μεταξύ FT της παράλληλης προβολής και FT του $\mu(x,y)$

Μετασχηματισμός Fourier παράλληλης προβολής

Αντικατάσταση του  $t$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί το FT του  $f(x,y)$ , δειγματοληπτημένο κατά ευθεία που ικανοποιεί τις σχέσεις:  $u=w\cos\theta$  και  $v=w\sin\theta$

$$Q_\theta(w) = FT(P_\theta(t)) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t,s) ds \right] e^{-j2\pi wt} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t,s) e^{-j2\pi w(x\cos\theta + y\sin\theta)} ds dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t,s) e^{-j2\pi(xw\cos\theta + yw\sin\theta)} ds dt =$$

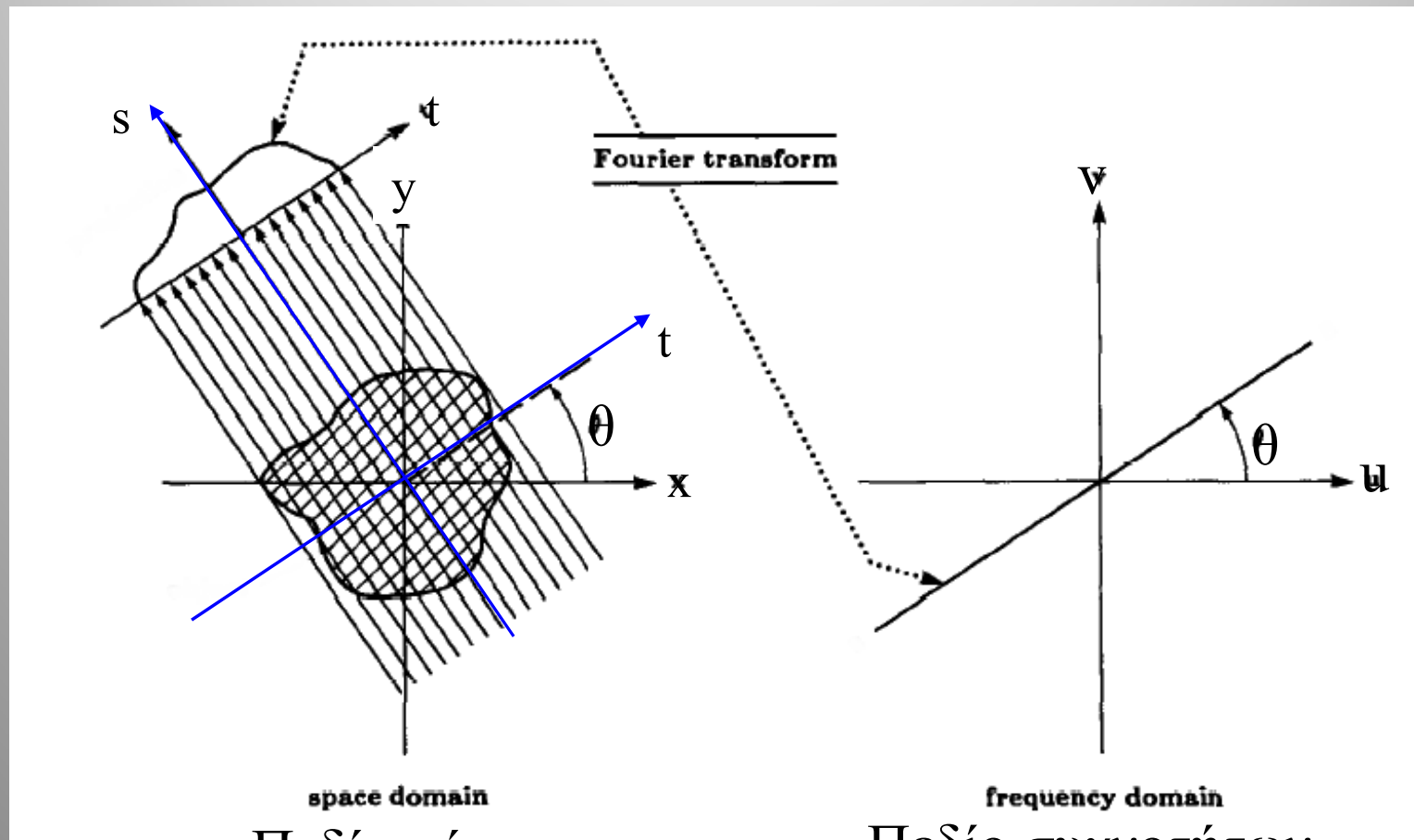
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(xu + yv)} dx dy$$

# Θεώρημα τομής Fourier

## Fourier Slice Theorem

- Βάσει των προηγούμενων διατυπώνεται το Θεώρημα:
- Ο FT της παράλληλης προβολής ενός αντικειμένου κατά διεύθυνση  $\theta$  (ως προς  $X$ ), ισούται με τις τιμές του FT του αντικειμένου κατά μήκος ευθείας που διέρχεται από το σημείο DC ( $u=0, v=0$ ) και έχει διεύθυνση  $\theta$ .

# Γραφική απεικόνιση του FST



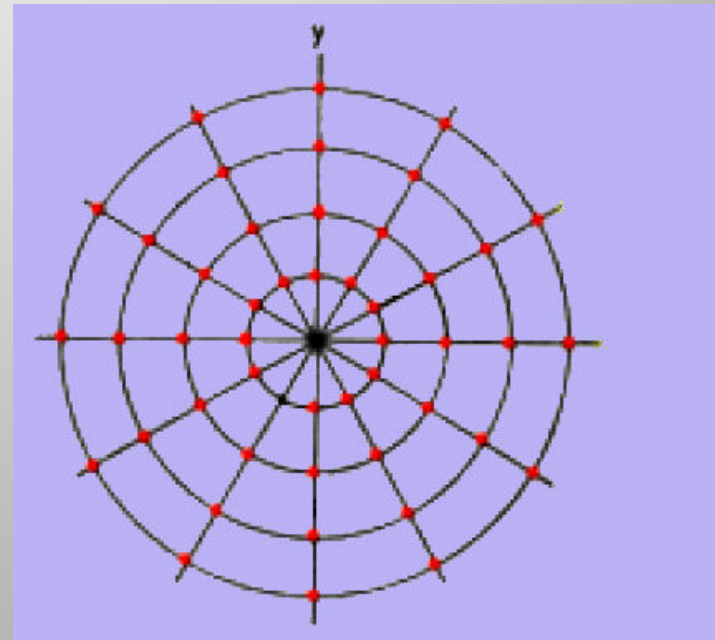
Πεδίο χώρου

Κ. Δελήμπασης

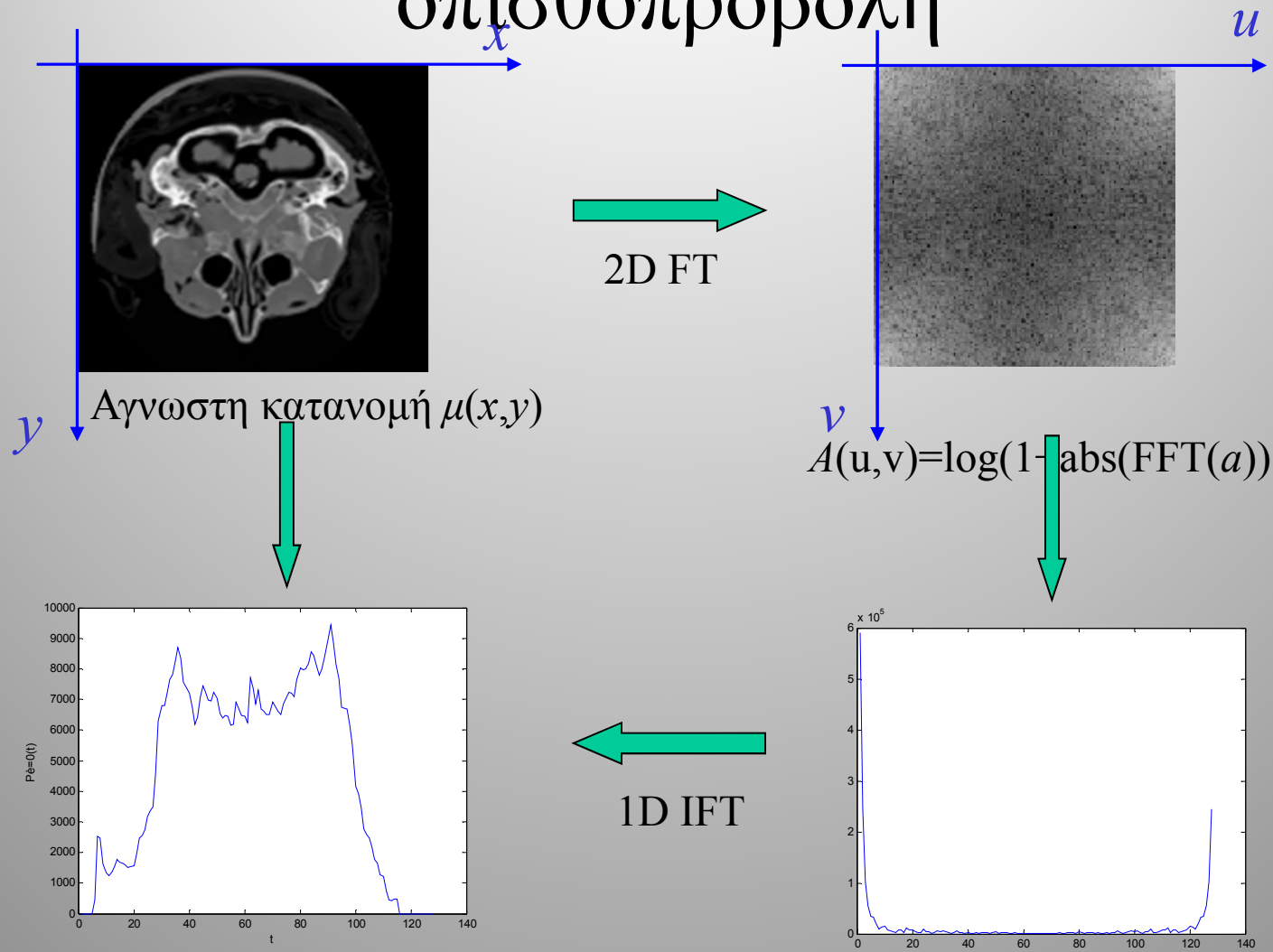
Πεδίο συχνοτήτων

# Εφαρμογή του FST στην ανακατασκευή της εικόνας

- Αν συμπληρώσουμε όλα τα δεδομένα του χώρου των συχνοτήτων  $F(u,v)$ , θα ανακατασκευάσουμε το  $f(x,y)$ , εφαρμόζοντας απλά τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (IFT):  $f(x,y)=IFT(F(u,v))$ .
- Χρησιμοποιώντας τις προβολές, συμπληρώνουμε τον χώρο των συχνοτήτων ακτινικά και όχι σε όλες τις συχνότητες  $(u,v)$ .



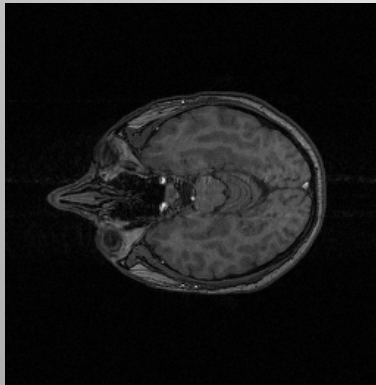
# Ισοδυναμία του FST με απλή οπισθοπροβολή



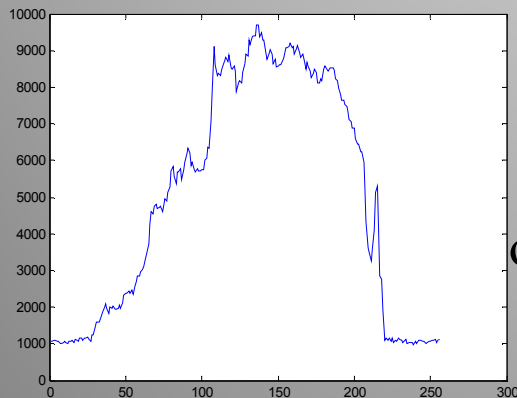
Παράλληλη προβολή

Κ. Δελήμπασης

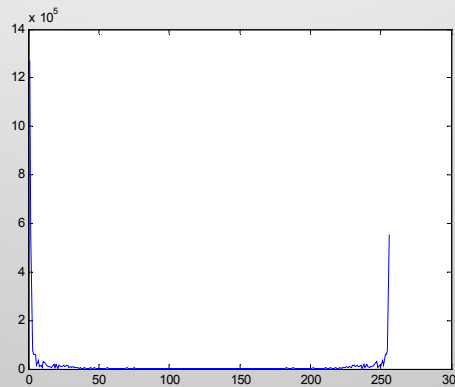
# Ερμηνεία της ανακατασκευής με απλή οπισθοπροβολή



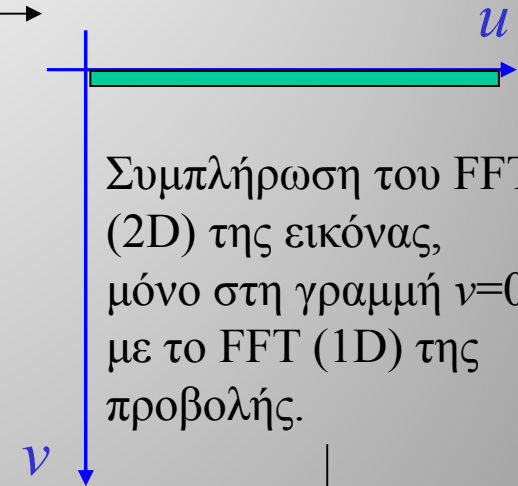
Παρ προβολή  $\theta=0$



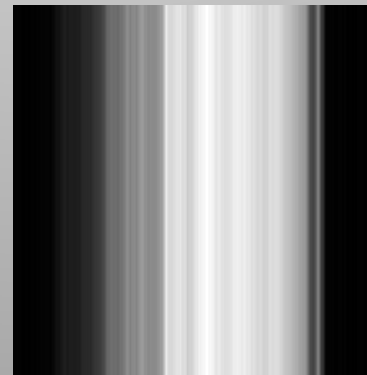
οπισθοπροβολή



FFT



Συμπλήρωση του FFT (2D) της εικόνας, μόνο στη γραμμή  $v=0$ , με το FFT (1D) της προβολής.



IFFT (2D)



## Ανακατασκευή με απλή οπισθοπροβολή (backprojection)

- Αν αγνοήσουμε ότι η συμπλήρωση του  $F(u,v)$  γίνεται με τρόπο ακτινικό, προκύπτει η μέθοδος ανακατασκευής με απλή οπισθοπροβολή, **η οποία δεν δίνει ακριβή αποτελέσματα:**
  - Για κάθε γωνία  $\theta$ 
    - Υπολογίζεται η προβολή  $P_\theta(t)$
    - Σε όλα τα pixel της υπό κατασκευή εικόνας που συμμετείχαν στον υπολογισμό της  $P_\theta(t)$ , προστίθεται η τιμή της  $P_\theta(t)$ :
      - For  $x=1:n\_στήλες$ 
        - » For  $y=1:n\_γραμμές$
        - » IF  $x\cos\theta+y\sin\theta=t \rightarrow I(x,y)=I(x,y)+ P_\theta(t)/N$

## Απλό παράδειγμα οπισθοπροβολής

1	2	1
2	3	4
2	4	3
5	9	8

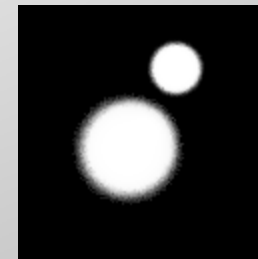
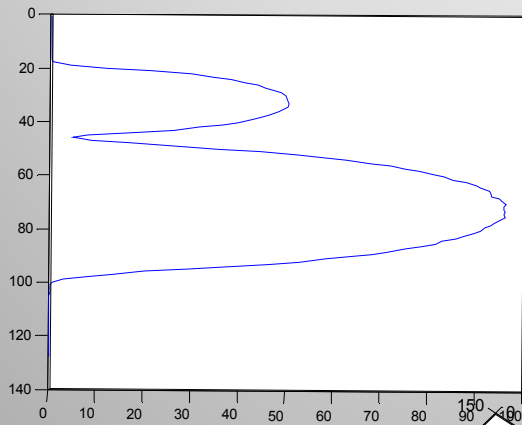
$P_{\theta=0}(t)$

$5/3$	3	$8/3$
$5/3$	3	$8/3$
$5/3$	3	$8/3$

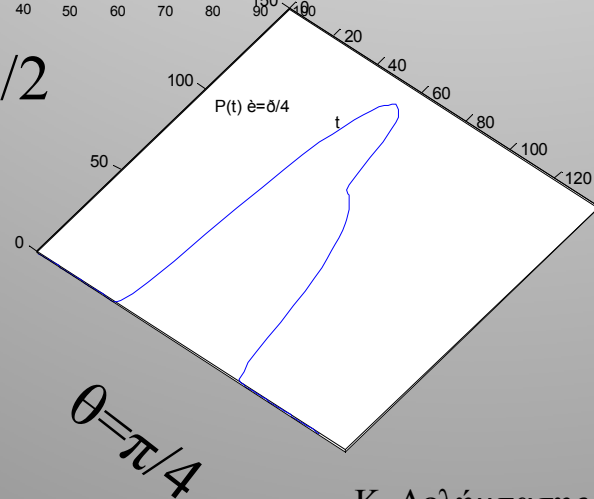
Δημιουργία της παράλληλης  
προβολής

Οπισθοπροβολή της παράλληλης  
προβολής στα pixel της  
ανακατασκευασμένης εικόνας

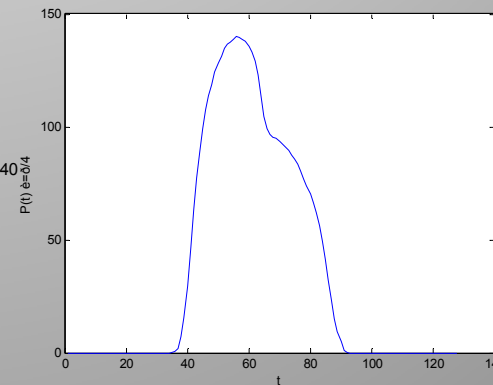
# Παράδειγμα συνθετικής εικόνας και ενδεικτικών παράλληλων προβολών



$\theta = \pi/2$



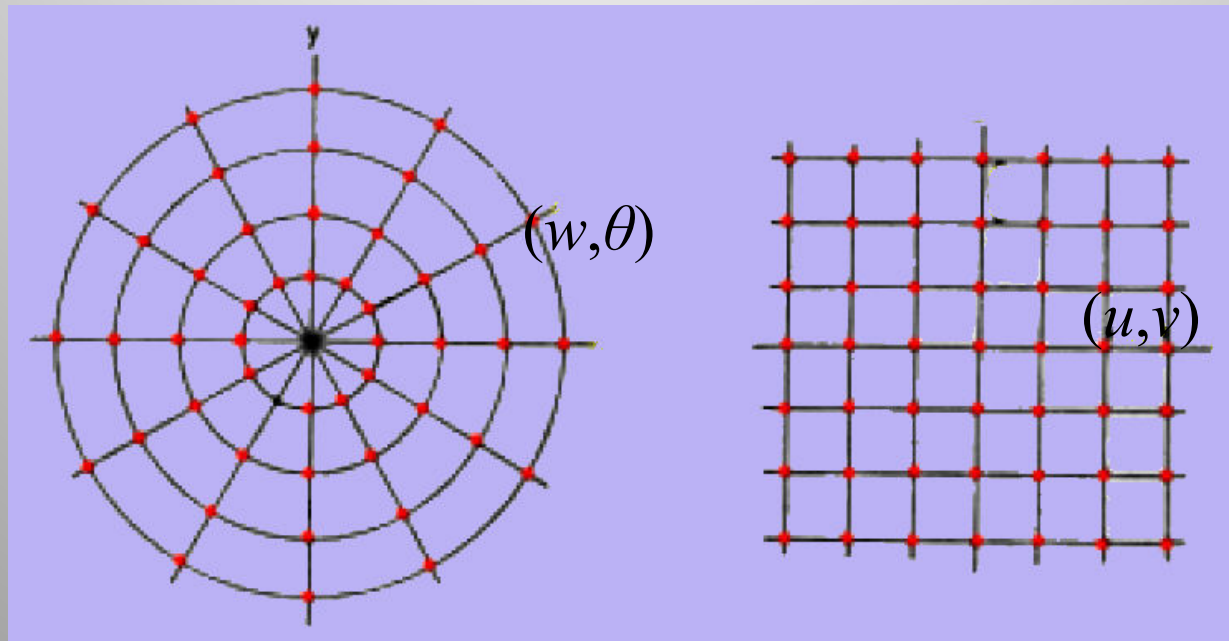
$\theta = \pi/4$



$\theta = 0$

Κ. Δελήμασης

# Το πρόβλημα της ανακατασκευής με απλή οπισθοπροβολή και η αναγκαιότητα για φιλτραρισμένη οπισθοπροβολή

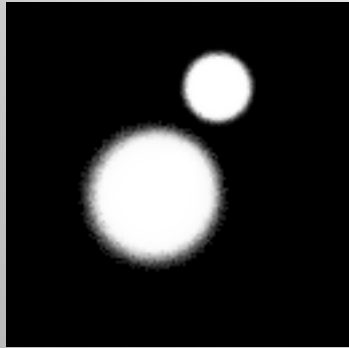


Ακτινική συμπλήρωση του χώρου,  
βάσει των παράλληλων προβολών  
της εικόνας

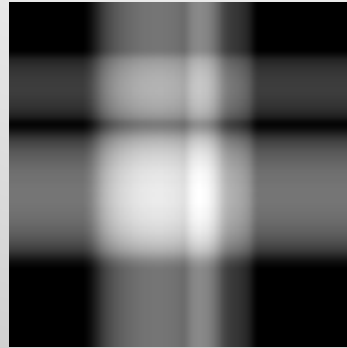
Απαιτούμενη καρτεσιανή  
συμπλήρωση

Απεικόνιση του χώρου των χωρικών συχνοτήτων.

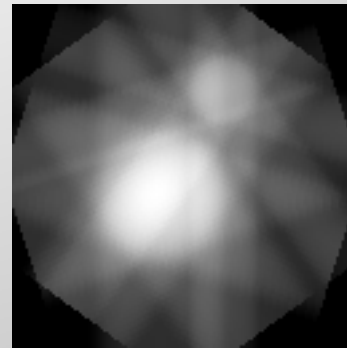
Παραδείγματα ανακατασκευής συνθετικής  
εικόνας με απλή οπισθοπροβολή για  
διαφορετικό αριθμό προβολών



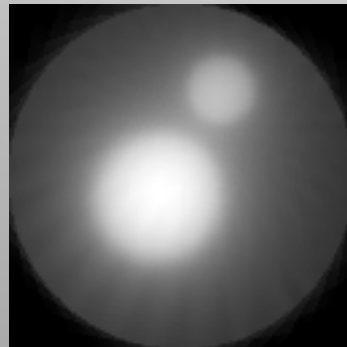
Αρχική εικόνα



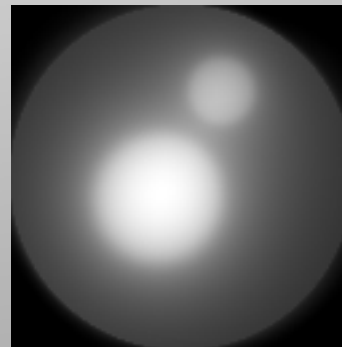
2



5



18



180

Ανακατασκευασμένες εικόνες: παρατηρείστε το θολό αποτέλεσμα

# Μαθηματική ερμηνεία της ανακατασκευής με φιλτραρισμένη οπισθοπροβολή

Αν ορίσουμε τη ζητούμενη κατανομή ως τον IFT (2D) του συμπληρωμένου χώρου  $(u, v)$  και εφαρμόσουμε πολικές συντεταγμένες καταλήγουμε:

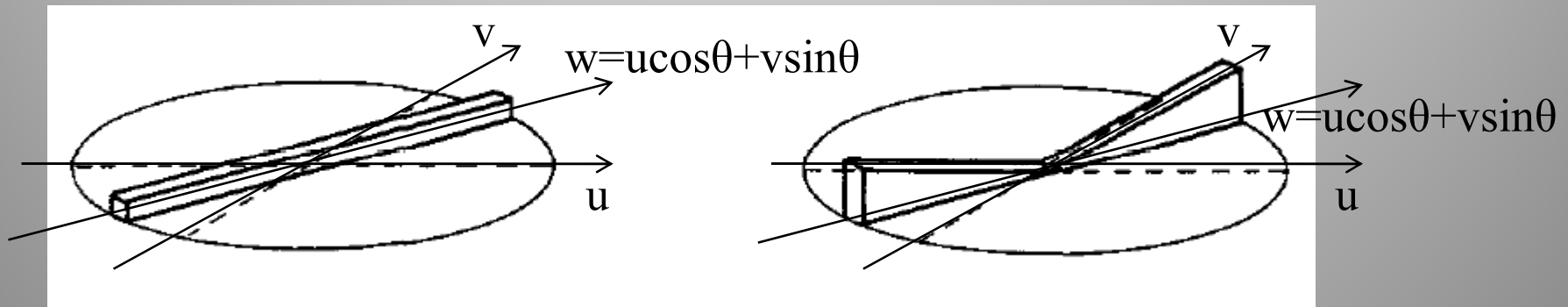
$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv = \dots = \int_0^{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(w, \theta) e^{j2\pi w t} |w| dw \right] d\theta$$

Το FT της προβολής κατά  $\theta$ ,  
πολλαπλασιασμένη με  $|w|$  και  
μετασχηματισμένη κατά IFT.

Οπισθοπροβολή των φιλτραρισμένων IFT των προβολών

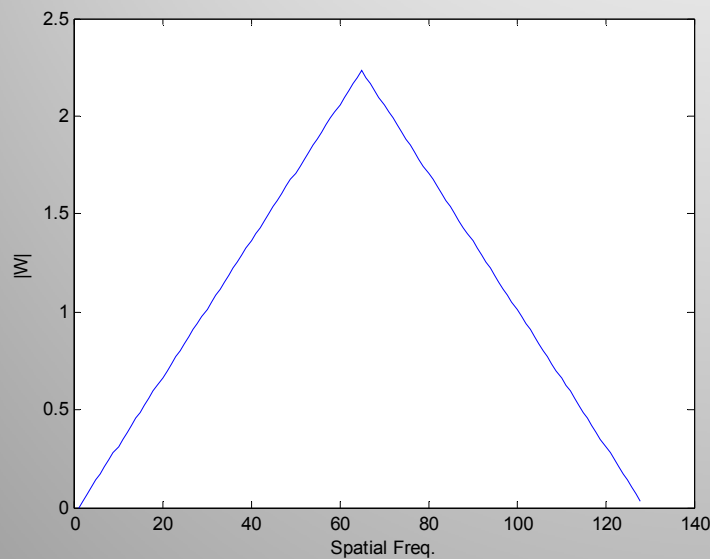
# Ανακατασκευή με φιλτραρισμένη οπισθοπροβολή

- Το γινόμενο (στοιχείο προς στοιχείο)  $F(w, \theta)|w|$  αποτελεί φίλτρο στο χώρο των συχνοτήτων  $\rightarrow$  ισοδυναμεί με συνέλιξη στο χώρο του χρόνου
- Το φίλτρο είναι υψιπερατό  $\rightarrow$  ενισχύει τις υψηλές συχνότητες, εκεί που λόγω της ακτινικής δειγματοληψίας του χώρου συχνοτήτων, η δειγματοληψία είναι «αραιή»

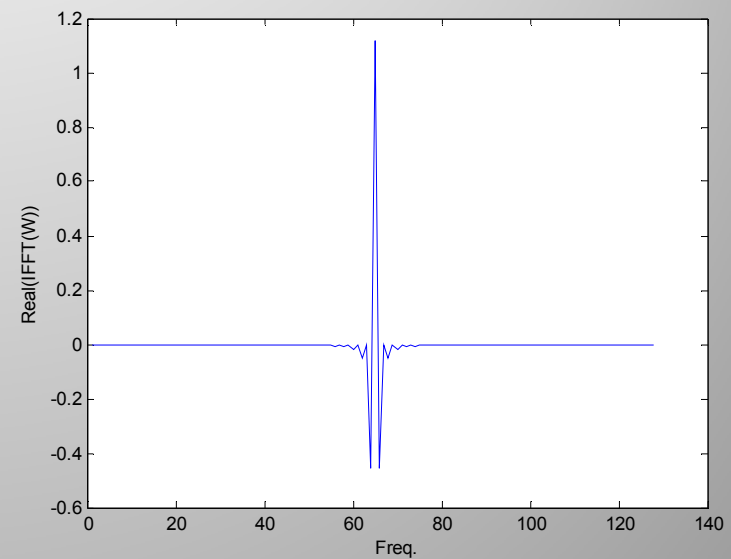


απλή οπισθοπροβολή

φιλτραρισμένη οπισθοπροβολή



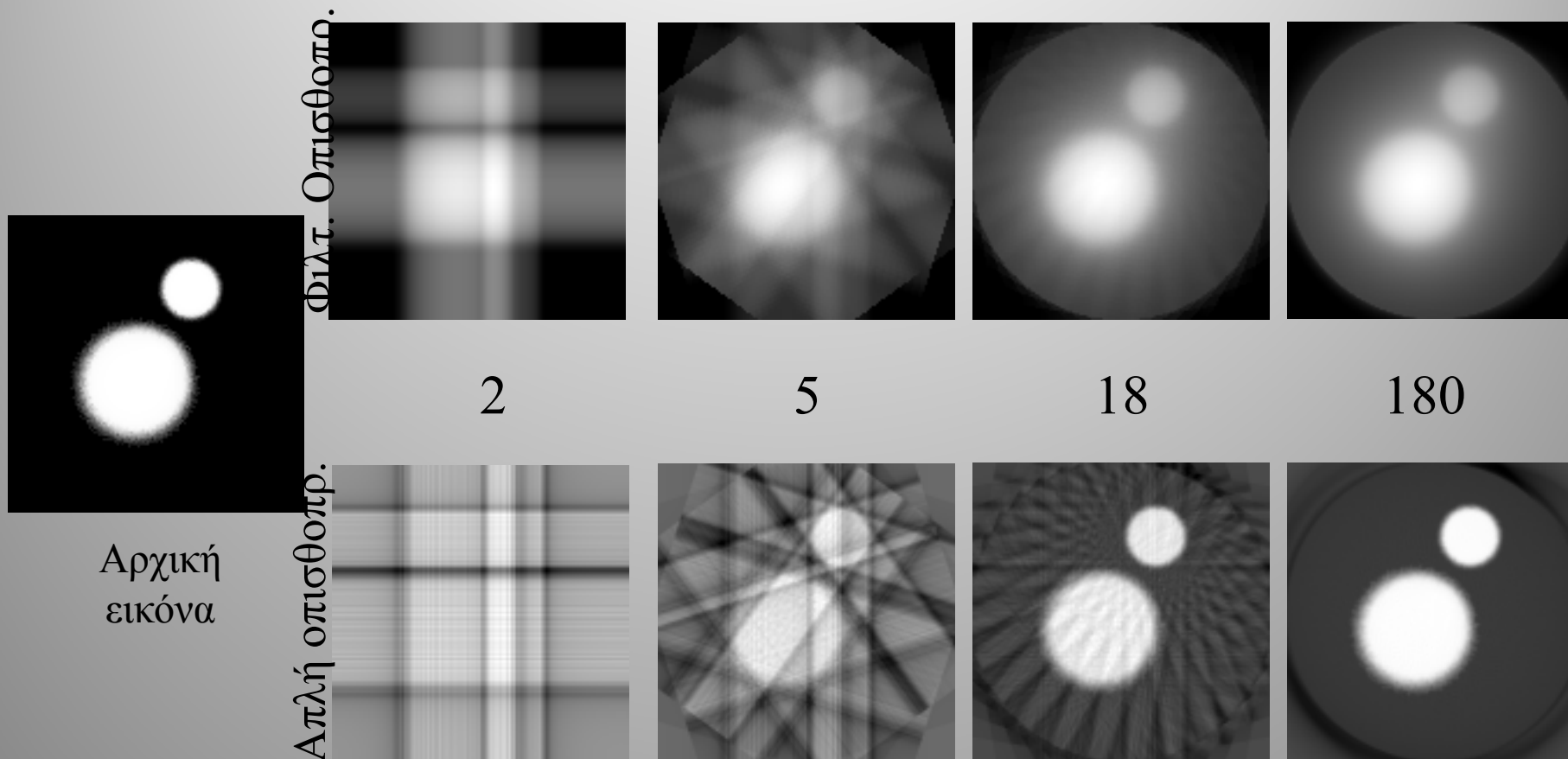
Το φίλτρο  $|w|$  για δειγματοληψία  
προβολής 128 σημείων, με το  
DC σημείο στο κέντρο



Το πραγματικό μέρος του IFT  
του φίλτρου  $|w|$  για  
δειγματοληψία προβολής 128  
σημείων, με το DC σημείο στο  
κέντρο.



# Παραδείγματα ανακατασκευής συνθετικής εικόνας για διαφορετικό αριθμό προβολών



# Ανακατασκευή με φιλτραρισμένη οπισθοπροβολή (filtered backprojection)

Η μέθοδος δίνει ακριβή αποτελέσματα:

Για κάθε γωνία  $\theta$

Υπολογίζεται η προβολή  $P_\theta(t)$

Υπολογίζεται η  $P_\theta(w)=FT(P_\theta(t))$

Πολλαπλασιάζεται το  $P_\theta(w)$  με το ιδανικό φίλτρο  $2\pi|w|/k$

Υπολογίζεται το  $s_\theta(t)=IFT$  του προηγούμενου βήματος

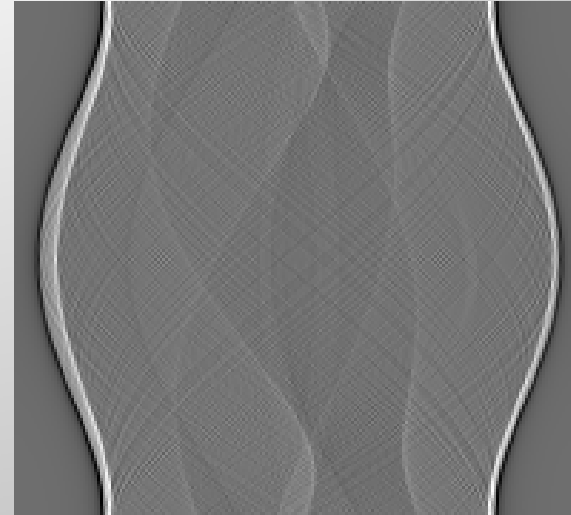
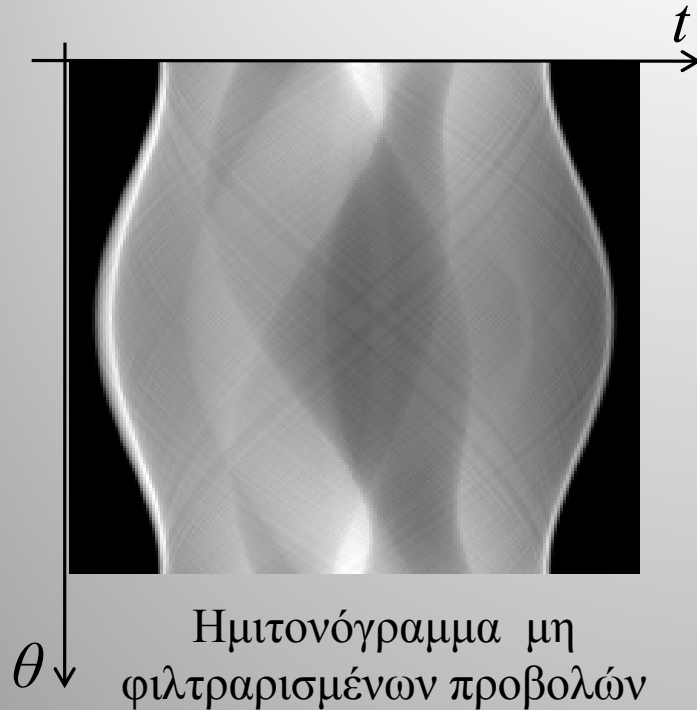
Σε όλα τα pixel της υπό κατασκευή εικόνας που συμμετείχαν στον υπολογισμό της  $s_\theta(t)$ , προστίθεται η τιμή της  $s_\theta(t)$ :

For  $x=1:n\_στήλες$

For  $y=1:n\_γραμμές$

IF  $x\cos\theta+y\sin\theta=t \rightarrow I(x,y)=I(x,y)+s_\theta(t)/N$

# Ημιτονόγραμμα



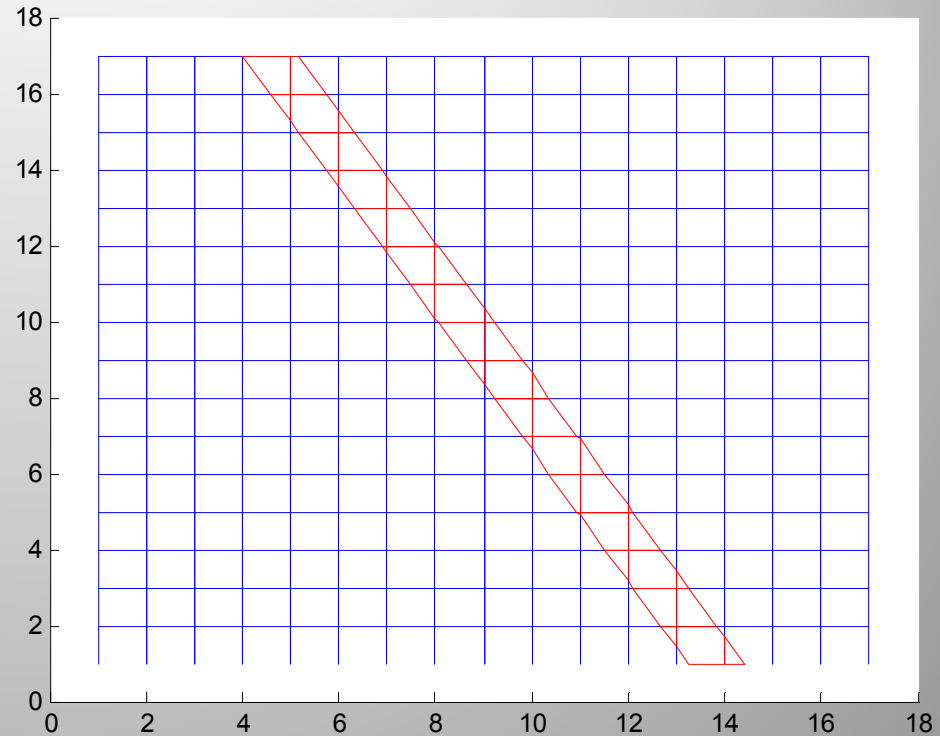
- Το ημιτονόγραμμα κατασκευάζεται σαν μία εικόνα, κάθε γραμμή της οποίας περιέχει τα δεδομένα μίας παράλληλης προβολής.
- Το Ημιτονόγραμμα αποτελεί τα δεδομένα εισόδου του CT τα οποία είναι απαραίτητα για την ανακατασκευή μίας εγκάρσιας τομής.

# Επαναληπτικές μέθοδοι ανακατασκευής εικόνας – Η ανακατασκευή σαν αλγεβρικό πρόβλημα

- Εστω η συνάρτηση  $f(x,y)$  η οποία πρέπει να ανακατασκευαστεί
- Χωρίζουμε την  $f(x,y)$  σε ισομεγέθη pixels με συνολικό αριθμό  $N$ .
- Θεωρούμε πηγή και ανιχνευτή που καθορίζουν δέσμη (beam) με πλάτος όσο και ένα pixel της  $f(x,y)$ .
- Θεωρούμε  $D$  ανιχνευτές ανά προβολή και  $N_\theta$  προβολές.
- Υπολογίζουμε την μέτρηση  $p_j$  κάθε ανιχνευτή για κάθε προβολή,  $j=1,2,\dots, N_\theta D$ .

$$p_j = \sum_{i=1}^N w_{ij} f_i$$

- όπου  $i=1,2,\dots,N$  ο συνολικός αριθμός των pixel
  - $j=1,2,\dots,N_\theta D$ , ο συνολικός αριθμός των ανιχνευτών για κάθε προβολή  $N_\theta$  .
- Οι συντελεστές  $w_{ij}$  υπολογίζονται ως το κλάσμα του εμβαδού του pixel  $i$  το οποίο βρίσκεται εντός της δέσμης  $j$ .



Με κόκκινο μία δέσμη πλατους  $\tau$  που διέρχεται από 16x16 pixel με γωνία  $\theta$ . Διακρίνονται διαφορετικές περιπτώσεις pixel που ανήκουν ολόκληρα ή εν μέρει

- Η προηγούμενη εξίσωση αποτελεί σύστημα γραμμικών εξισώσεων με άγνωστους τις ζητούμενες τιμές  $f(i,j)$ .
- Η επίλυση του συστήματος δεν είναι πρακτική, διότι, ο πίνακας  $w$  έχει πολύ μεγάλες διαστάσεις: για μία εικόνα  $256 \times 256$  με 256 ανιχνευτές και 256 προβολές, ο  $w$  είναι  $65535 \times 65536$  και δεν είναι δυνατή η αντιστροφή του.
- Συνήθως ο ο πίνακας  $w$  έχει περισσότερες γραμμές από στήλες ( $N_{\theta}D > N$ ), άρα το σύστημα είναι υπερκαθορισμένο και απαιτεί επίλυση με μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
- Επιβεβαιώστε ότι για εικόνα  $2 \times 2$ , με 2 ανιχνευτές και 2 προβολές, ο πίνακας  $w$  είναι singular.

Εφαρμογή της προηγούμενης μεθόδου για  
μία συνάρτηση μεγέθους 3x3.

Κατασκευή των τριών εξισώσεων που  
αντιστοιχούν στους 3 ανιχνευτές.

Ο συμβολισμός όπως στις προηγούμενες  
διαφάνειες.

$f_1$ $w_{12}$	$f_2$	$f_3$
$f_4$ $w_{41}$	$f_5$ $w_{52}$	$f_6$
$f_7$ $w_{71}$	$f_8$ $w_{82}$	$f_9$

$$p_1 = w_{11}f_1 + \underbrace{w_{21}f_2}_0 + \underbrace{w_{31}f_3}_0 + w_{41}f_4 + \underbrace{w_{51}f_5}_0 + \underbrace{w_{61}f_6}_0 + w_{71}f_7 + \underbrace{w_{81}f_8}_0 + \underbrace{w_{91}f_9}_0$$

$$p_2 = w_{12}f_1 + w_{22}f_2 + \underbrace{w_{32}f_3}_0 + w_{42}f_4 + w_{52}f_5 + \underbrace{w_{62}f_6}_0 + w_{72}f_7 + w_{82}f_8 + \underbrace{w_{92}f_9}_0$$

$$p_3 = w_{13}f_1 + w_{23}f_2 + w_{33}f_3 + \underbrace{w_{43}f_4}_0 + w_{53}f_5 + w_{63}f_6 + \underbrace{w_{73}f_7}_0 + w_{83}f_8 + w_{93}f_9$$

... = ...

# Παράδειγμα

0.8	1.5
0.2	1.8

Εστω χωρική κατανομή συντελεστών απορόφησης, διακριτή σε 2x2 pixels. Να γίνει ανακατασκευή της με την αλγεβρική μέθοδο.



Προβ. 1, γωνία 1, Εξισ. 1

0.8	1.5
0.2	1.8

↓  
 $p_1 = 1.0$

$$p_1 = w_{11}f_1 + \underbrace{w_{21}f_2}_0 + w_{31}f_3 + \underbrace{w_{41}f_4}_0 = f_1 + f_3$$

Προβ. 1, γωνία 1, Εξισ. 1

Προβ. 2, γωνία 1, Εξισ. 2

0.8	1.5
0.2	1.8

$$p_1 = 1.0$$

$$p_2 = 3.3$$

$$p_1 = w_{11}f_1 + \underbrace{w_{21}f_2}_0 + w_{31}f_3 + \underbrace{w_{41}f_4}_0 = f_1 + f_3$$

$$p_2 = \underbrace{w_{12}f_1}_0 + w_{22}f_2 + \underbrace{w_{32}f_3}_0 + w_{42}f_4 = f_2 + f_4$$

Προβολή 1, γωνία 1  $p_1 = 1.0$  Προβολή 2, γωνία 1  $p_2 = 3.3$



Προβ. 1, γωνία 2, Εξισ. 3  
 $p_3 = 2.3$

$$p_1 = w_{11}f_1 + \underbrace{w_{21}f_2}_0 + w_{31}f_3 + \underbrace{w_{41}f_4}_0 = f_1 + f_3$$

$$p_2 = \underbrace{w_{12}f_1}_0 + w_{22}f_2 + \underbrace{w_{32}f_3}_0 + w_{42}f_4 = f_2 + f_4$$

$$p_3 = w_{13}f_1 + w_{23}f_2 + \underbrace{w_{33}f_3}_0 + \underbrace{w_{43}f_4}_0 = f_1 + f_2$$

$p_1 = 1.0$  Προβολή 1, γωνία 1
  $p_2 = 3.3$  Προβολή 2, γωνία 1



Προβ. 1, γωνία 2, Εξισ. 3  
 $p_3 = 2.3$

Προβ. 2, γωνία 2, Εξισ. 4  
 $p_4 = 2.0$

$$p_1 = w_{11}f_1 + \underbrace{w_{21}f_2}_0 + \underbrace{w_{31}f_3}_0 + \underbrace{w_{41}f_4}_0 = f_1 + f_3$$

$$p_2 = \underbrace{w_{12}f_1}_0 + w_{22}f_2 + \underbrace{w_{32}f_3}_0 + w_{42}f_4 = f_2 + f_4$$

$$p_3 = w_{13}f_1 + w_{23}f_2 + \underbrace{w_{33}f_3}_0 + \underbrace{w_{43}f_4}_0 = f_1 + f_2$$

$$p_4 = \underbrace{w_{14}f_1}_0 + \underbrace{w_{24}f_2}_0 + w_{34}f_3 + w_{44}f_4 = f_3 + f_4$$

Προβολή 1, γωνία 1  $p_1 = 1.0$  Προβολή 2, γωνία 1  $p_2 = 3.3$

0.8	1.5
0.2	1.8

Προβ. 1, γωνία 2, Εξισ. 3  
 $p_3 = 2.3$

Προβ. 2, γωνία 2, Εξισ. 4  
 $p_4 = 2.0$

$$p_1 = w_{11}f_1 + \underbrace{w_{21}f_2}_0 + \underbrace{w_{31}f_3}_1 + \underbrace{w_{41}f_4}_0 = f_1 + f_3$$

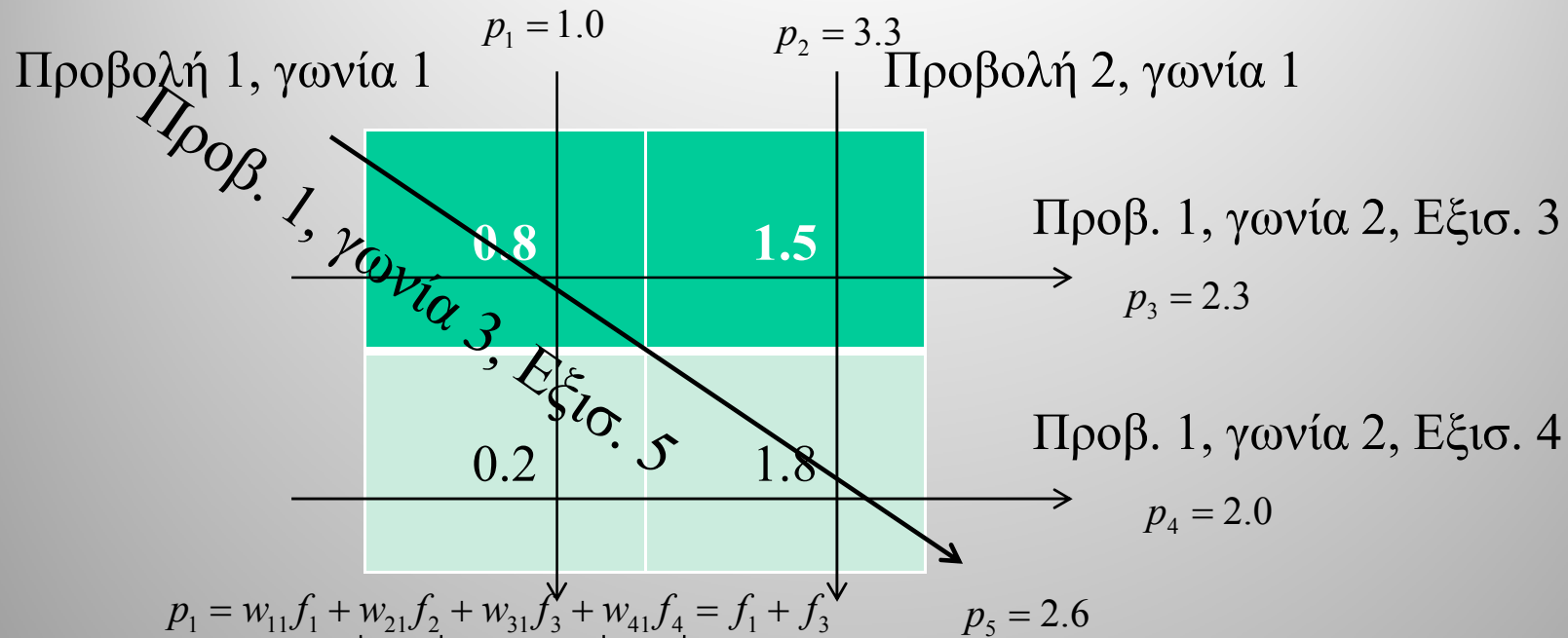
$$p_2 = \underbrace{w_{12}f_1}_0 + w_{22}f_2 + \underbrace{w_{32}f_3}_0 + w_{42}f_4 = f_2 + f_4$$

$$p_3 = w_{13}f_1 + w_{23}f_2 + \underbrace{w_{33}f_3}_0 + \underbrace{w_{43}f_4}_0 = f_1 + f_2$$

$$p_4 = \underbrace{w_{14}f_1}_0 + \underbrace{w_{24}f_2}_0 + w_{34}f_3 + w_{44}f_4 = f_3 + f_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

Το γραμ. σύστημα εξισ. σε μορφή πινάκων



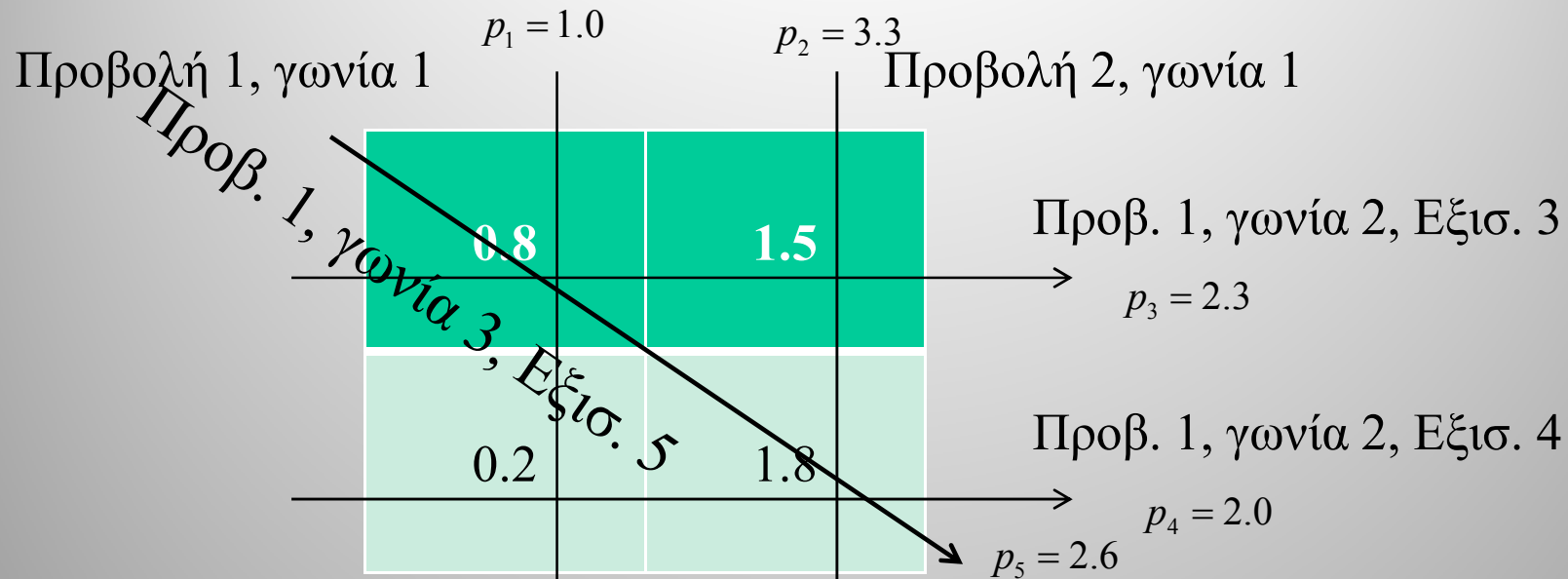
$$p_1 = w_{11}f_1 + \underbrace{w_{21}f_2}_0 + w_{31}f_3 + \underbrace{w_{41}f_4}_0 = f_1 + f_3$$

$$p_2 = \underbrace{w_{12}f_1}_0 + w_{22}f_2 + \underbrace{w_{32}f_3}_0 + w_{42}f_4 = f_2 + f_4$$

$$p_3 = w_{13}f_1 + w_{23}f_2 + \underbrace{w_{33}f_3}_0 + \underbrace{w_{43}f_4}_0 = f_1 + f_2$$

$$p_4 = \underbrace{w_{14}f_1}_0 + \underbrace{w_{24}f_2}_0 + w_{34}f_3 + w_{44}f_4 = f_3 + f_4$$

$$p_5 = w_{15}f_1 + \underbrace{w_{25}f_2}_0 + \underbrace{w_{35}f_3}_0 + w_{45}f_4 = f_1 + f_4$$



$$p_1 = w_{11}f_1 + \underbrace{w_{21}f_2}_0 + w_{31}f_3 + \underbrace{w_{41}f_4}_0 = f_1 + f_3$$

$$p_2 = \underbrace{w_{12}f_1}_0 + w_{22}f_2 + \underbrace{w_{32}f_3}_0 + w_{42}f_4 = f_2 + f_4$$

$$p_3 = w_{13}f_1 + w_{23}f_2 + \underbrace{w_{33}f_3}_0 + \underbrace{w_{43}f_4}_0 = f_1 + f_2$$

$$p_4 = \underbrace{w_{14}f_1}_0 + \underbrace{w_{24}f_2}_0 + w_{34}f_3 + w_{44}f_4 = f_3 + f_4$$

$$p_5 = w_{15}f_1 + \underbrace{w_{25}f_2}_0 + \underbrace{w_{35}f_3}_0 + w_{45}f_4 = f_1 + f_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 3.3 \\ 2.3 \\ 2.0 \\ 2.6 \end{pmatrix}$$

Το γραμ. σύστημα εξισ. σε μορφή πινάκων

# Επαναληπτικός τύπος ανακατασκευής

- Εστω  $w_{ij}$  το ποσοστό του pixel  $i$  που είναι ορατό από τη δέσμη  $j$ . Ο δείκτης  $j$  αποτελεί συνδυασμό του ανιχνευτή  $D$  και της προβολής κατά γωνία  $\theta$ .

$\mathbf{w}_i = \{w_{ij}\}$  : το ποσοστό του pixel  $j$  εντός της δέσμης  $i$

$i = 1, \dots, N_\theta D$  detector/orientation index

$j : 1, \dots, N$  pixel index

$d_i$  : the correct value of detector  $i$

$\mathbf{f}^i = \{f_j\}$ ,  $j : 1, \dots, N$  pixel index υπολογισμένες τιμές μετά την δέσμη  $i$

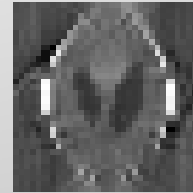
$$\mathbf{f}^i = \mathbf{f}^{i-1} - \frac{\vec{\mathbf{f}}^{i-1} \cdot \vec{\mathbf{w}}_i - d_i}{\vec{\mathbf{w}}_i \cdot \vec{\mathbf{w}}_i} \vec{\mathbf{w}}_i$$

- $i=1, 2, \dots, N_\theta D$ , ο συνολικός αριθμός των ανιχνευτών για κάθε προβολή  $N_\theta$ .
- $f, w_i$  είναι διανύσματα με μήκος ίσο με το συνολικό αριθμό pixel,  $d_i$  είναι βαθμωτό μέγεθος.





(α)



(β)

- Ανακατασκευή του Shepp-Logan phantom (32x32 pixel), 32 ανιχνευτές ανά προβολή και 180 προβολές, με χρήση (α) του επαναληπτικού τύπου και (β) με απευθείας λύση του υπερκαθορισμένου γραμμικού συστήματος εξισώσεων.

# Σύγκριση Αλγόριθμων Ανακατασκευής

## Συνελικτικοί

- Χαρακτηριστικά
  - Μετασχηματισμός Fourier
  - Φιλτράρισμα
  - Αντίστροφος FT
  - Οπισθοπροβολή
- Πλεονεκτήματα
  - Μικρός χρόνος ανακατασκευής / απαιτήσεις σε μνήμη
- Μειονεκτήματα
  - Μεγάλη ευαισθησία στο θόρυβο
  - Μεγάλη ευαισθησία στον μικρό αριθμό προβολών
  - Ακτινικά παράσιτα (image artefacts)

## Επαναληπτικοί

- Χαρακτηριστικά
  - Διακριτοποίηση εικόνας
  - Θεώρηση διακριτών pixel ως αγνώστους και κατασκευή συστήματος γραμμικών εξισώσεων
  - Επίλυση με επαναληπτικό αλγόριθμο
- Πλεονεκτήματα
  - Μικρή ευαισθησία στο θόρυβο
- Μειονεκτήματα
  - Μεγάλος χρόνος ανακατασκευής / απαιτήσεις σε μνήμη