Στοιχεία Ηλεκτρομαγνητισμού

Σημειώσεις

Δύναμη Coulomb

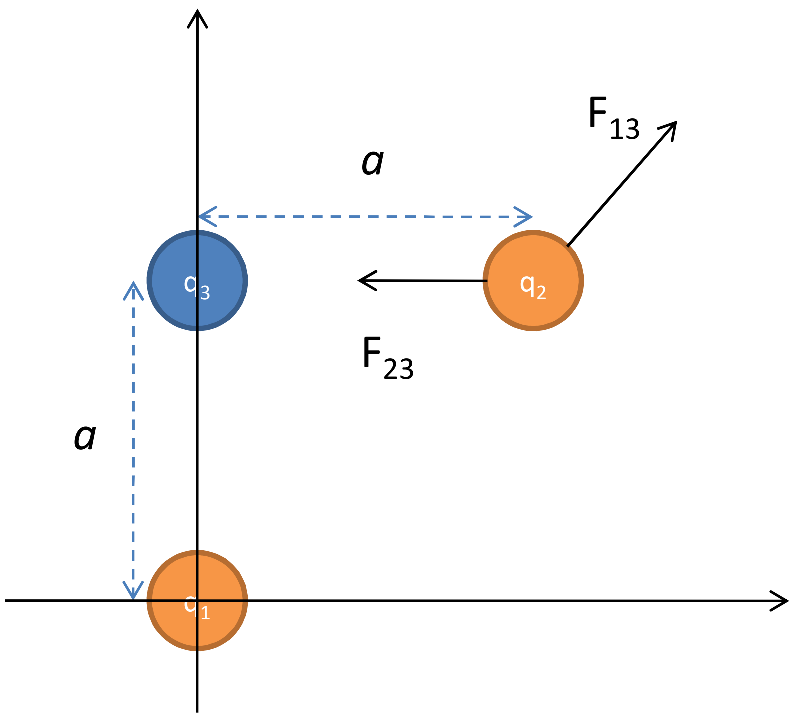
- Δύναμη μεταξύ 2 φορτίων

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

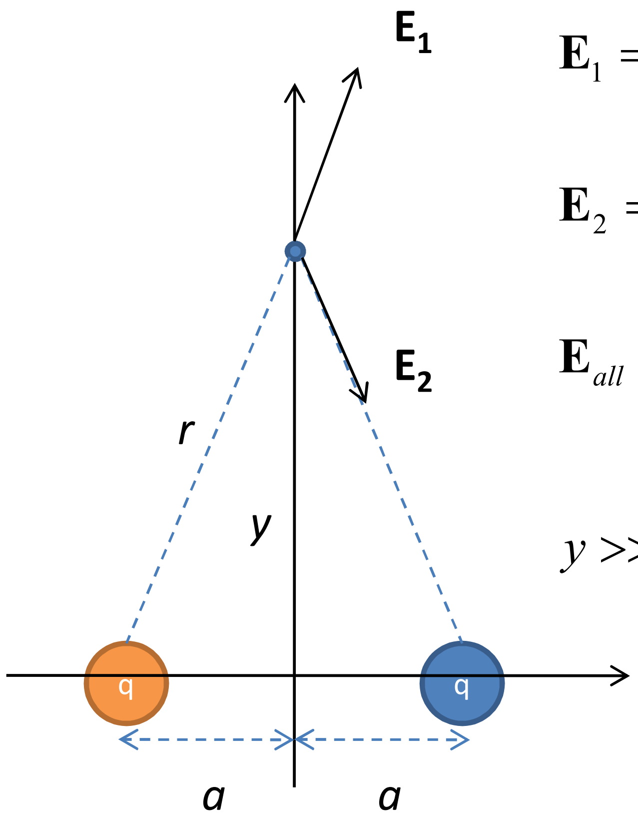
- k: σταθερά Coulomb= 9x10^9 Nm^2 C^{-2}.
- ε_0 : free space permitivity= 9x10^9 C .N^{-2}m^{-2}.

Παράδειγμα

- Να βρεθεί η συνισταμένη δύναμη



Ηλεκτρικό πεδίο διπόλου



$$\mathbf{E}_1 = k_c \frac{q_1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = k_c \frac{q_1}{y^2+a^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

$$\mathbf{E}_2 = k_c \frac{q_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = k_c \frac{q_2}{y^2+a^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

$$\mathbf{E}_{all} = 2E_1\cos\theta\,\mathbf{j} = k_c \frac{q_2}{y^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}\mathbf{j} = k_c \frac{aq_2}{\left(y^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{j}$$

$$y >> a \Rightarrow \mathbf{E}_{all} = k_c \frac{aq_2}{\left(r^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{j} = k_c \frac{aq_2}{r^3}\mathbf{j}$$

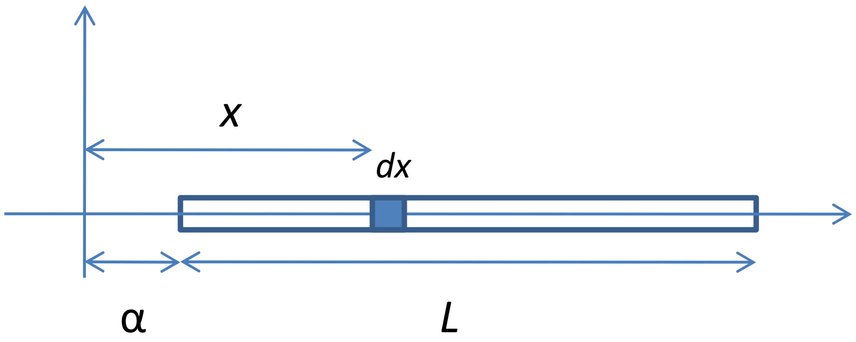
Ηλεκτρικό πεδίο

- Εστω φορτίο Q το οποίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο και μικρό δοκιμαστικό φορτίο q>0. Εστω F η δύναμη που ασκείται στο q από το ηλεκτρικό πεδίο του Q. Η ποσότητα **F**/q ορίζεται ως η ένταση **E** του πεδίου
- **E**=**F**/q → **F**=**E**q

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = k\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{r}_i$$

Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής

Εστω ράβδος μήκους L με φορτίο Q. Να βρεθεί η ένταση Ε σε σημείο του κύριου άξονα της



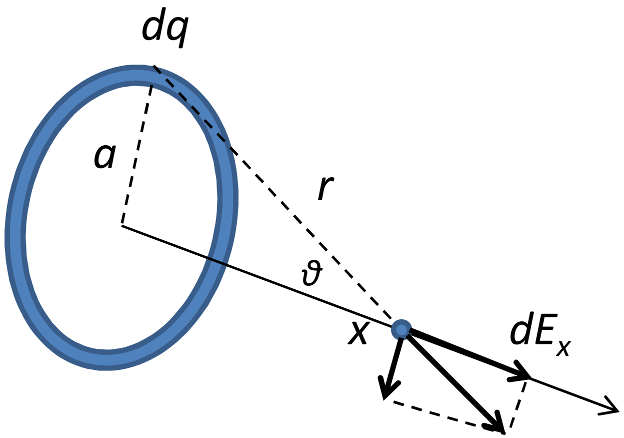
r^3

$$dE = k_c \frac{dq}{r^2} = \frac{Q}{L} k_c \frac{dx}{x^2} \Rightarrow E = \frac{Q}{L} k_c \int_a^{a+L} \frac{dx}{x^2} = \frac{Q}{L} k_c \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{a+L}$$

$$= \frac{Q}{L} k_c \left(-\frac{1}{a+L} + \frac{1}{a} \right) = \frac{Q}{L} k_c \frac{L+a-a}{a(a+L)} = \frac{Qk_c}{a(a+L)}$$

$$a >> L \Rightarrow E = \frac{Qk_c}{a^2}$$

Ηλεκτρικό πεδίο από ομογενώς φορτισμένο δακτύλιο



$$dE_x = k_c \frac{dq}{r^2}\cos\theta = \frac{Q}{2\pi a} k_c \frac{dl}{\left(x^2+a^2\right)} \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \Rightarrow$$

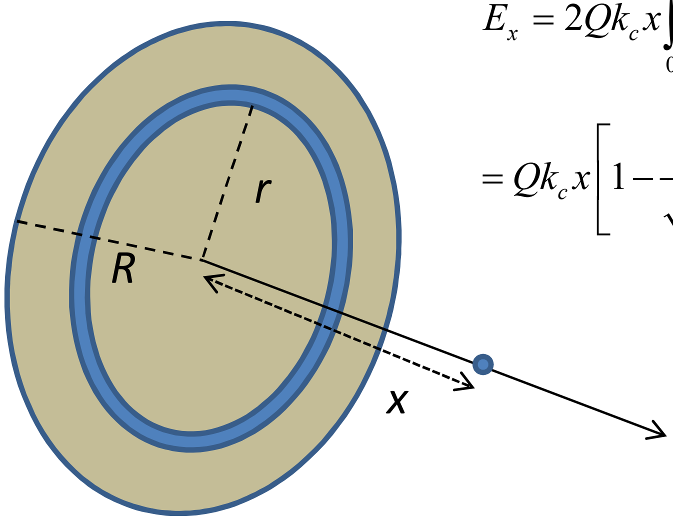
$$E = \frac{Q}{2\pi a} x k_c \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi a} dl = \frac{Q}{2\pi a} x k_c \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} 2\pi a = k_c \frac{Qx}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ηλεκτρικό πεδίο ομογενώς φορτισμένου δίσκου

$$dE_x = \frac{k_c x}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} dq = \frac{k_c x}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} 2\pi r dr \left(\frac{Q}{\pi R^2}\right) = \frac{k_c x}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} 2r \frac{Q}{R^2} dr$$

$$E_x = 2Qk_c x \int_0^R \frac{rdr}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2Qk_c x \int_0^R \frac{d\left(x^2 + r^2\right)}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2Qk_c x \left(-\frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}}\right]_0^R =$$

$$= Qk_c x \left[1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right]$$



Ηλεκτρική ροή Φ – Νόμος Gauss

- Αν Α το εμβαδόν επιφάνειας σε κάθε σημείο της οποίας υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο σταθερής έντασης Ε, τότε η ηλεκτρική ροή ορίζεται σαν $\Phi = \mathbf{E} . \mathbf{A}$ ($1 weber = 1 N.cb^{-1}.m^{-2}$).
- Στην γενική περίπτωση που η Ε μεταβάλλεται:

$$\Phi = \oiint_{surface} \mathbf{E} d\mathbf{A}$$

- Αποδεικνύεται ότι για κλειστή επιφάνεια οποιουδήποτε σχήματος που περικλείει φορτίο Q, η συνολική ροή $\Phi = q/\varepsilon_0$.

- Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Νόμο του Gauss σε προβλήματα που έχουν συμμετρία, ώστε το ολοκλήρωμα της **E** σε όλη την επιφάνεια να υπολογίζεται εύκολα (**E**=σταθ.).

Παράδειγμα: Νόμος Gauss για σφαίρα που περικλείει Q

- Εστω σφαίρα που έχει στο κέντρο της φορτίο Q. Τότε το **E** είναι κάθετο στο *d***A** σε κάθε σημείο της και **E**=σταθ.

$$\Phi = \oiint_{surface} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \int E dA = E \int dA = E 4\pi R^2 = k_c \frac{q}{R^2} 4\pi R^2$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Παράδειγμα: Νόμος Gauss για σφαίρα που περικλείει Q

- Εστω σφαίρα από μονωτικό υλικό που έχει ομογενώς κατανεμημένο φορτίο Q. Να βρεθεί η ένταση του πεδίου εντός και εκτός της σφαίρας
- Τότε το **E** είναι κάθετο στο *d***A** σε κάθε σημείο της και **E**=σταθ.

$$\Phi = \oint_{surface} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \int E dA = E \int dA = E 4\pi a^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E 4\pi a^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{a^3}{R^3} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a}{R^3}$$

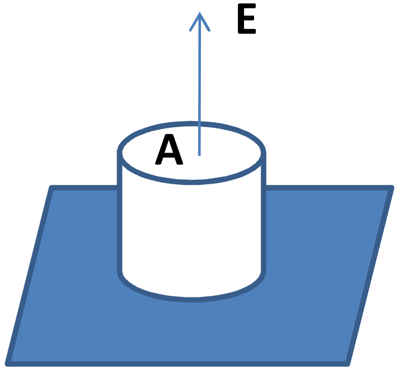
Παράδειγμα: Νόμος Gauss για ευθύγραμμο αγωγό άπειρου μήκους με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ

- Εστω κύλινδρος που περικλείει τμήμα του αγωγού, έτσι ώστε ο αγωγός να συμπίπτει με τον άξονα του κυλίνδρου. Τότε το **E** είναι κάθετο στο *d***A** σε κάθε σημείο της και **E**=σταθ. Η Φ που περνά από τις βάσεις του κυλίνδρου είναι 0.

$$\Phi = E2\pi RL = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E2\pi R = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi R\varepsilon_0}$$

Παράδειγμα: Νόμος Gauss για επίπεδη άπειρη επιφάνεια με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ

- Θεωρούμε ως επιφάνεια Gauss έναν κύλινδρο, όπως στο σχήμα, έτσι ώστε η Φ να μπορεί να υπολογιστεί εύκολα.



$$\Phi = 2\mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = 2EA = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Ηλεκτρικό δυναμικό

- Εστω δοκιμαστικό φορτίο q_0 που τοποθετείται σε ηλεκτρικό πεδίο Ε.
- Η δύναμη **F**=q_0**E** είναι συντηρητική (κεντρική δύναμη)
- Κατά την στοιχειώδη μετακίνηση d**s** το dW=**F**.d**s**=q_0**E**.d**s**.
- Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος q_0 – πεδίου

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B \mathbf{E}.d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E} = -\nabla U \Rightarrow$$

$$q_0 \left(E_x, E_y, E_z \right) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

- Το πηλίκο της U ενός φορτίου q δια το φορτίο, καλείται ηλεκτρικό δυναμικό
- Το έργο W για να μετακινήσουμε φορτίο Q Α→Β με διαφορά δυναμικού ΔV είναι W=-QΔV=V_A-V_B.
- Μονάδες: (1 Volt=1 Joule / 1C), 1 Volt=(N/C).m

- Διαφορά δυναμικού μεταξύ 2 σημείων Α και Β σε ομογενές πεδίο, του οποίου οι δυναμικές γραμμές πηγαίνουν από το Α→Β:

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \mathbf{E}.d\mathbf{s} = -E.d$$

- → Οι δυναμικές γραμμές κατευθύνονται προς χαμηλότερο δυναμικό
- Αν q0 δοκιμαστικό φορτίο → ΔU=q0 ΔV
  - Αν q0>0 →ΔU<0 μικρότερη δυναμική ενέργεια
  - Αν q0<0 →ΔU>0 μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια
- Εντaση πεδίου σε πυκνωτή: ΔV/απόσταση πλακών

Το eV

- 1eV=η ενέργεια που αποκτά φορτίο q=1.6x10^{-19} cb το οποίο επιταχύνεται μεταξύ δύο σημείων με ΔV=1 Volt.
- 1eV=1.6x10^{-19} Joule
- Σχέση του eV με την θερμοκρασία
  - Σταθερά Boltzmann k_B=1.38×10^{-23} J/K
  - k_B=8.62×10^{-5} eV/K
- Σχέση του eV με την συχνότητα των φωτονίων
  - h=6.626068 × 10^{-34} m^2 kg / s

Ηλεκτρικό δυναμικό σημειακού φορτίου

- Εστω σημειακό φορτίο q το οποίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο με ένταση **E**. Η ΔV μεταξύ A και B υπολογίζεται:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}.d\mathbf{s} = -\int_A^B k\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.d\mathbf{s} = -kq\int_A^B \frac{dr}{r^2} = kq\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$\hat{\mathbf{r}}.d\mathbf{s} = ds\cos\theta = dr$$

- Προφανώς το ηλεκτρικό δυναμικό πεδίο είναι συντηρητικό.
- Κατά συνθήκη θεωρούμε V=0 σε άπειρη απόσταση από το q.
- $$V(r) = k\frac{q}{r}$$
- Το δυναμικό πεδίου από πολλά φορτία $V = k\sum_{i=1}^{N}\frac{q}{r_i}$

Παράδειγμα

- Ενα φορτίο q1=2μC βρίσκεται στο σημείο (0,0) και το q2=-5μC βρίσκεται στο σημείο (0,3)m.
- Να βρεθεί το έργο που απαιτείται για να μεταφέρουμε ένα φορτίο από το άπειρο στην θέση (4,0)m.

$$V = k\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right) = 9\times10^2\,Nm^2C^{-2}\left(\frac{2\times10^{-6}\,C}{4m}-\frac{5\times10^{-6}\,C}{5m}\right)$$

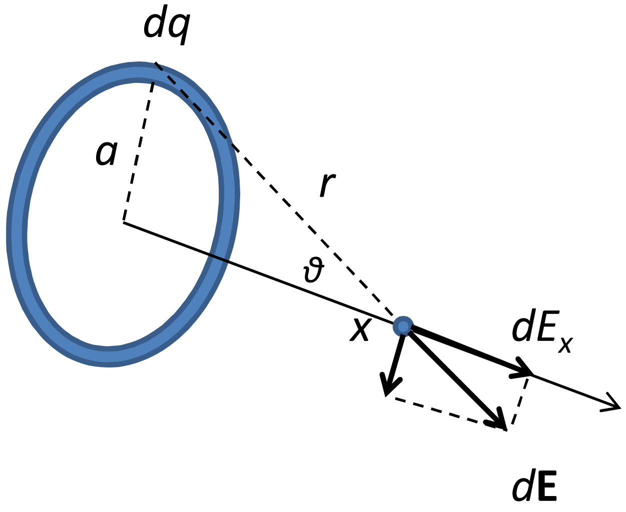
$$= -\frac{1}{2}9\times10^2\,NC^{-1} = -4.5\times10^2\,Volt$$

$$W = q\left(V_\infty - V\right) = -4.5\times10^2\,Joule$$

Ηλεκτρικό δυναμικό από ομογενώς φορτισμένο δακτύλιο

- laksj

$$V = k_c \int \frac{dq}{r} = k_c \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = k_c \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$



Από το δυναμικό μπορούμε να υπολογίσουμε το Ε:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_c(-x)\frac{Q}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = k_c \frac{xQ}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

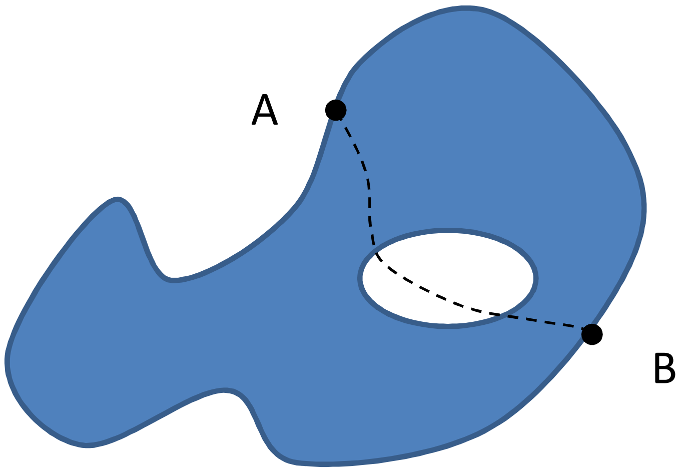
Στην σχέση αυτή καταλήξαμε και με τον ορισμό του Ε.

Αγωγοί και ηλεκτρικό πεδίο

- Το ηλεκτρικό πεδίο **E** είναι 0 σε οποιοδήποτε σημείο ενός αγωγού.
- Αν ένας μονωμένος αγωγός είναι φορτισμένος, το φορτίο συγκεντρώνεται στην επιφάνεια του
- Το ηλεκτρικό πεδίο μόλις έξω από την επιφάνεια ενός φορτισμένου αγωγού είναι κάθετο στην επιφάνεια και έχει ένταση σ/ε_0.
- Σε μία επιφάνεια ακανόνιστου σχήματος, η συγκέντρωση του φορτίου είναι μεγαλύτερη στα σημεία με μεγάλη καμπυλότητα
- Κάθε σημείο επί της επιφάνειας ενός φορτισμένου αγωγού έχει το ίδιο V. Τη ίδια τιμή έχει το V και σε κάθε σημείο του εσωτερικού του αγωγού.
- Αν ο αγωγός περιέχει κοιλότητα που δεν περικλείει φορτίο, τότε **E**=0 οπουδήποτε στην κοιλότητα, ακόμα και αν ο αγωγός βρίσκεται σε εξωτερικό **E**.

- Απόδειξη: Αφού το ολοκλήρωμα =0 για κάθε διαρομή A→B, συνεπάγεται ότι το E=0 σε κάθε σημείο της κοιλότητας.

$$V_A = V_B \Rightarrow V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$



Μαγνητισμός – Ενταση μαγνητικού πεδίου

- Ενταση μαγνητικού πεδίου (ΜΠ) **B**: υπολογίζεται βάσει της δύναμης $\mathbf{F_B}$ που ασκεί το ΜΠ σε ηλεκτρικό φορτίο q που κινείται με ταχύτητα **v**.
- $\mathbf{F_B} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
- Μονάδες: Tesla=N Cb^{-1} m^{-1} sec= N $Ampere^{-1}$ m^{-1}
- 1 Tesla= 10^4 Gauss
- Υπεραγώγιμος μαγνήτης: 30T
- MRI σταθερό B: ~1.5T
- Μαγνητικο πεδίο γης: 0.5 Gauss ~0.5×10^{-4} T

Δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό

- Εστω ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός με διατομή A, μήκος L και πυκνότητα φορτίων ανά όγκο n, που βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο **B**. Τότε η δύναμη που ασκείται στον αγωγό από το **B** είναι:

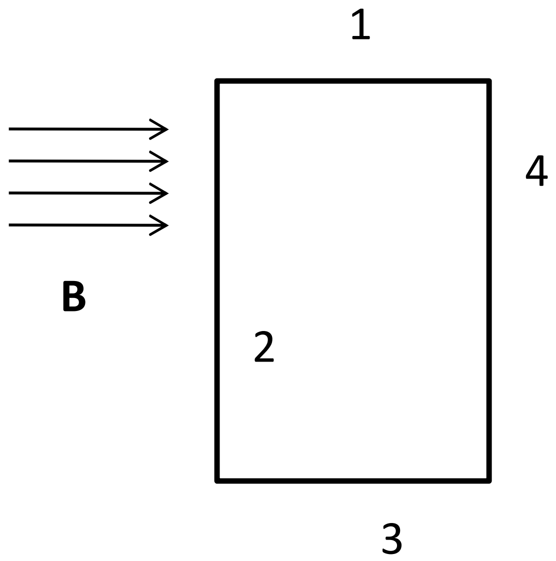
$$\mathbf{F} = \left(q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) nAL = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

- Αν ο αγωγός δεν είναι ευθύγραμμος:

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{s} \times \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{F} = I\int_a^b d\mathbf{s} \times \mathbf{B} = I\left(\int_a^b d\mathbf{s}\right) \times \mathbf{B} = I\ \overrightarrow{AB} \times \mathbf{B}$$

- → Η δύναμη F που ασκείται από ομογενές **B** σε ρευματοφόρο αγωγό οποιουδήποτε σχήματος από το σημείο A στο B, είναι ίση με τη δύναμη που θα ασκείτο σε ευθύγραμμο αγωγό από το A στο B.
- Η συνισταμένη δύναμη σε κλειστό ρευνατοφόρο αγωγό οποιουδήποτε σχήματος που βρίσκεται σε ομογενές **B** είναι 0.

Ροπή σε κλειστό ρευματοφόρο αγωγό σε ομογενές Β



$F_1 = F_3 = 0$

Μέτρο των δυνάμεων: $F_2 = F_4 = IaB$

Οι F_2, F_4 αποτελούν ζεύγος

(αντίθετες αλλά με διαφορετικό σημείο εφαρμογής)

Η ροπή του ζεύγους ως προς τον άξονα από το ΚΜ του κλειστού αγωγού:

$$\tau = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = I \underbrace{ab}_{A} B = IAB$$

- Εστω ρευματοφόρος βρόγχος εντός ομογενούς **Β**, όπως στο σχήμα
- Στην γενική περίπτωση, $\boldsymbol{\tau} = I\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

- Η ποσότητα $\mathbf{\mu}=I\mathbf{A}$ καλείται **μαγνητική διπολική ροπή**
- Προφανώς , $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}$
- Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε ρευματοφόρο βρόγχο οποιουδήποτε σχήματος και προσανατολισμού σε σχέση με το **B**.
- Μονάδες της **μ**: Am^2=N.m $Tesla^{-1}$=Joule/Tesla
- (Tesla=N Cb^{-1} m^{-1} sec= N $Ampere^{-1}$ m^{-1})
- Δυναμική ενέργεια μαγνητικού διπόλου σε **B**: $U=-\boldsymbol{\mu}.\mathbf{B}$ →
  - Ένα πρωτόνιο θα έχει ελάχιστη δυναμική ενέργεια, όταν η μ είναι παράλληλη στο B και μέγιστη U όταν μ και B αντιπαράλληλα.

Μαγνητική διπολική ροπή φορτισμένου στοιχειώδους σωματιδίου

- Η μ ενός στοιχειώδους σωματιδίου με φορτίο q παράγεται λόγω:
  - της περιφοράς του (αν πρόκειται για ηλεκτρόνιο)
  - Και της περιστροφής του (spin)
- Εστω ηλεκτρόνιο με φορτίο q που περιφέρεται σε τροχιά γύρω από τον πυρήνα του ατόνου. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το φορτίο q περιφέρεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r, δημιουργώντας ρεύμα έντασης I.
- Η τροχιακή στροφορμή ενός σωματιδίου και η μαγνητική ροπή **μ** (λόγω του φορτίου του) συνδέονται με μία σταθερά *γ*

$$\left.\begin{array}{c} I = \dfrac{qv}{2\pi r} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A} = \dfrac{qv}{2\pi r}\pi r^2 = \dfrac{qvr}{2} \\ \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \Rightarrow \left|L\right| = mrv \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mu}{L} = \frac{q}{2m} = \gamma$$

μ ιδιοπεριστροφής φορτισμένου στοιχειώδους σωματιδίου

- Εστω στοιχειώδες σωματίδιο με φορτίο q που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το φορτίο q περιφέρεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r, δημιουργώντας ρεύμα έντασης I.
- Η στροφορμή ενός σωματιδίου λόγω ιδιοπεριστροφής (περιστροφής γύρω από τον άξονα του) και η μαγνητική ροπή **μ** (λόγω του φορτίου του) συνδέονται με την σταθερά *γ* που ονομάζεται γυρομαγνητικός λόγος

$$\left.\begin{aligned} I = \frac{qv}{2\pi r} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A} = \frac{qv}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{qvr}{2} \\ \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \Rightarrow |L| = mrv \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\mu}{L} = \frac{q}{2m} = \gamma$$

- Η σχέση αυτή ισχύει αρκεί η κατανομή της μάζας και του φορτίου να είναι οι ίδιες στο στοιχειώδες σωμάτιο.

Μαγνητική διπολική ροπή φορτισμένου στοιχειώδους σωματιδίου

- Το μ ενός ηλεκτρονίου είναι κβαντισμένο μέγεθος και οι τιμές του είναι ακέραια πολλαπλάσια της (h/2π) = 1.054 10^{-34} kgr.m^2.

- Για το ηλεκτρόνιο, η ποσότητα $\mu_B = \dfrac{q\hbar}{2m_e}$

Καλείται μαγνητόνη του Borh έχει τιμή 9.27 10^{-24} J/T or A.m^2.

- Η στροφορμή ενός σωματιδίου λόγω ιδιοπεριστροφής (περιστροφής γύρω από τον άξονα του) και η μαγνητική ροπή **μ** (λόγω του φορτίου του) συνδέονται με την σταθερά *γ* που ονομάζεται γυρομαγνητικός λόγος

$$\left.\begin{array}{c} I = \dfrac{qv}{2\pi r} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A} = \dfrac{qv}{2\pi r}\pi r^2 = \dfrac{qvr}{2} \\ \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \Rightarrow |L| = mrv \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mu}{L} = \frac{q}{2m} = \gamma$$

Εξισώσεις Bloch υπό την επίδραση του ομογενούς B_0

- Ετσι **τ**=**μ**×**B** → **τ**=γ**L**×**B**,
- Από την αρχή μεταβολής της στοφορμής L: **τ**=d**L**/dt→ **τ**=(1/γ)d**μ**/dt
- Καταλήγουμε λοιπόν: d**μ**/dt=γ **μ**×**B** ,Θεωρώντας ότι το B είναι παράλληλο στον άξονα Z:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \gamma \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B_0} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\mu_x}{dt} = \gamma B_0 \mu_y \\ \dfrac{d\mu_y}{dt} = -\gamma B_0 \mu_x \\ \dfrac{d\mu_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

- Η προηγούμενη εξίσωση είναι ταυτόσημη με την εξίσωση της κλασσικής μηχανικής που περιγράφει την μετάπτωση μίας περιστρεφόμενης σβούρας εντός του πεδίου βαρύτητας:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$$

- όπου **L** η γωνιακή στροφορμή της σβούρας (ανάλογο της **μ**), **r** το διάνυσμα θέσης, m η μάζα της σβούρας και **g** η επιτάχυνση της βαρύτητας (ανάλογο του $\mathbf{B_0}$).

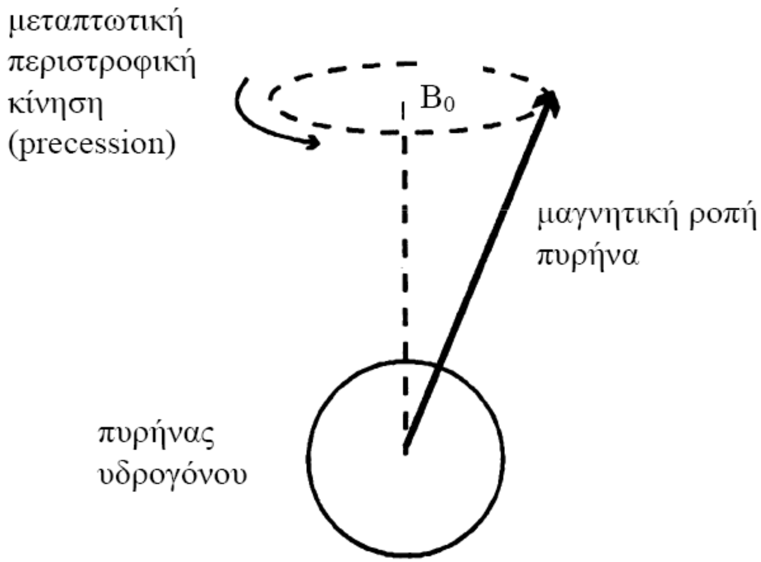
- Η λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι η ακόλουθη:

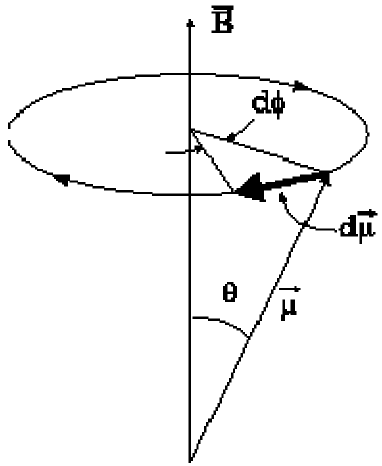
$$\mu_x(t) = \mu_x(0)\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\mu_y(t) = \mu_y(0)\sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\mu_z(t) = \mu_z(0)$$

Η μαγνητική διπολική ροπή εκτελεί *μεταπτωτική κίνηση* (*precession*) με *γωνιακή ταχύτητα* (Larmor) ω_0:

$$\omega_{Larmor} = \gamma B_0 \Rightarrow f_{Larmor} = \frac{\gamma B_0}{2\pi}$$

γ = γυρομαγνητικός λόγος που συνδέει την περιστροφή Larmor με το εξωτερικά εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο. Πυρήνες διαφορετικών στοιχείων έχουν διαφορετικό *γ*.
Για υδρογόνο γ/2π = 42.57 MHz/Tesla.


μεταπτωτική
περιστροφική
κίνηση
(precession)
B_0
μαγνητική ροπή
πυρήνα
πυρήνας
υδρογόνου


$\vec{B}$
$d\phi$
$d\vec{\mu}$
θ
$\vec{\mu}$

Κβαντομηχανική προσέγγιση του φαινομένου

- Η στροφορμή I ενός σωματιδίου αποτελεί φυσική ποσότητα που ορίζεται μέσω ενός τελεστή

$$I = \sqrt{i(i+1)}\hbar$$

- Το μέτρο της στροφορμής καθορίζεται από την τιμή του αντίστοιχου κβαντικού αριθμού i → το μέτρο της στροφορμής είναι κβαντισμένο
- Η προβολή της στροφορμής στον Z άξονα είναι επίσης κβαντισμένη

$$I_Z = m\hbar,\ m = -i \ldots i$$

Όπου *m* ακέραιος που ονομάζεται αζιμουθιακός κβαντικός αριθμός

- Ο κλασικός ορισμός της δυναμικής ενέργειας *E* ενός μαγνητικού διπόλου μαγνητικής ροπής **μ** , μέσα σε ένα σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B_0}$ δίνεται από τη σχέση:

$$E = -\vec{\mu}.\vec{B}_0 = -\gamma\hbar I_z B_0$$

- Αφού η *Iz* είναι κβαντισμένη, ομοίως κβαντισμένη θα είναι και η *E*. Για σωματίδιο με *I*=1/2, όπου up και down δηλώνει σωματίδιο με *Iz* παράλληλο και αντιπαράλληλο με το $\mathbf{B}_0$.

$$\begin{cases} m = \frac{1}{2} \Rightarrow I_z = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow E_{up} = -\frac{\gamma\hbar \mathrm{B}_0}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \Rightarrow I_z = -\frac{\hbar}{2} \Rightarrow E_{down} = \frac{\gamma\hbar \mathrm{B}_0}{2} \end{cases}$$

- Η διαφορά των δύο ενεργειακών σταθμών είναι ΔΕ

$$\Delta E = E_{down} - E_{up} = \gamma\hbar B_0$$

- Άρα αν ένα σωματίδιο με I_z παράλληλη στο B_0 προσλάβει γ με E_γ, τότε μπορεί να αλλάξει ο προσανατολισμός του I_z. → Το σωματίδιο συντονίζεται με τη συχνότητα Larmor.

$$E_\gamma = \Delta E = \gamma\hbar B_0 = h\nu = \hbar\omega$$

- Όπως είδαμε η συχνότητα Larmor για το H είναι στην κλίμακα Mhz → απαιτούνται ραδιοκύματα και όχι ιονίζουσα ακτινοβολία.
- Κατανομή των καταστάσεων του spin:
  - Όταν ένας πληθυσμός από n στοιχειώδη δίπολα βρεθεί εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου **B**$_0$, ένας αριθμός n_{up} θα έχει I_z παράλληλη με το **B**$_0$ και ένας αριθμός σωματιδίων n_{down} θα έχει I_z αντιπαράλληλη με το **B**$_0$.
  - Ισχύει, σύμφωνα με την κατανομή Boltzmann:

$$\frac{n_{up}}{n_{down}} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} = e^{-\frac{\gamma\hbar B_0}{\kappa T}}$$

  - Δεδομένου ότι $n = n_{up} + n_{down}$ (tanha=a για α→0)

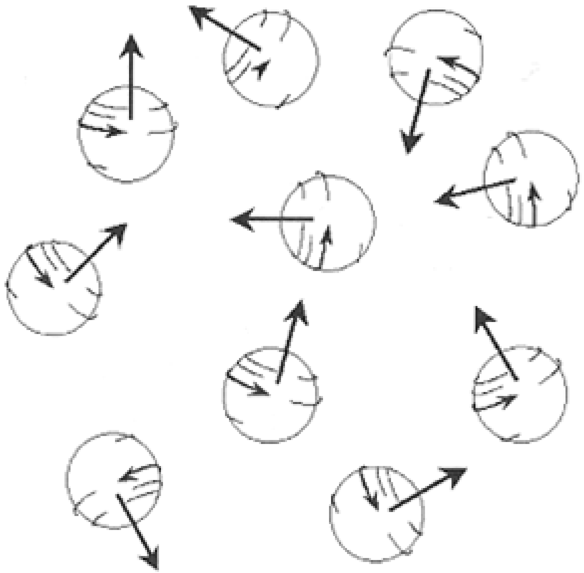
$$n_{up} - n_{down} = n\frac{1-e^{-\frac{\gamma\hbar B_0}{kT}}}{1+e^{-\frac{\gamma\hbar B_0}{kT}}} \Rightarrow \frac{n_{up}-n_{down}}{n} = \tanh\left(\frac{\gamma\hbar B_0}{2kT}\right) \cong \frac{\gamma\hbar B_0}{2kT}$$

- Για $\mathbf{B}_0$=3T το πλεόνασμα των πρωτονίων που είναι προσανατολισμένα παράλληλα με το $\mathbf{B}_0$ είναι 10 ανά 1.000.000.
- Συνολική μαγνήτιση **M** δείγματος ορίζεται ως το διανυσματικό άθροισμα των επί μέρους μαγνητικών ροπών **μ**. Εντός σταθερού μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}_0$, οι εγκάρσιες συνιστώσες μ_{xy} της μαγνήτισης των πυρήνων αλληλοεξουδετερώνονται και η συνολική μαγνήτιση του δείγματος οφείλεται στη διαφορά του αριθμού των πυρήνων με μαγνητική ροπή παράλληλη και αντιπαράλληλη με το $\mathbf{B}_0$.

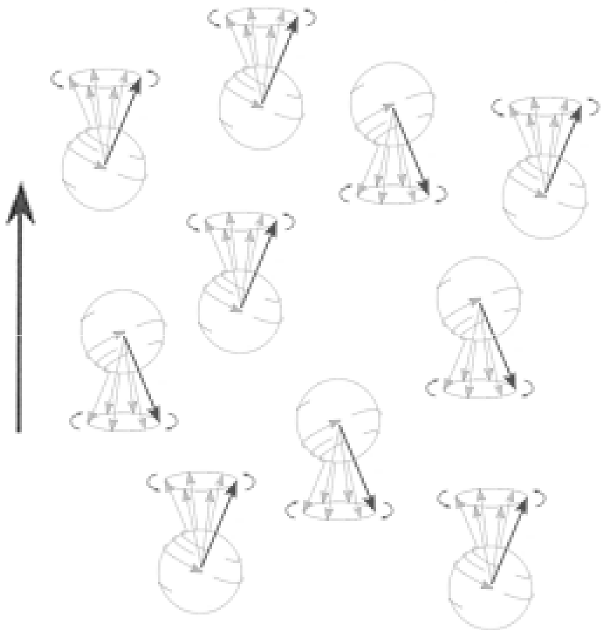
$$\mathbf{M} = \left(n_{up} - n_{down}\right)\gamma\hbar m\vec{k} \cong \frac{n\gamma\hbar}{4k\mathrm{T}}\mathbf{B_0}, \vec{k} = \frac{\mathbf{B_0}}{\left\|\mathbf{B_0}\right\|}$$

- → Οι παράγοντες που επηρεάζουν τη συνολική μαγνήτιση είναι ο αριθμός των πυρήνων με spin<>0, η θερμοκρασία του δείγματος και η ένταση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα



Πυρήνες πριν την εφαρμογή εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}_0$. Μηδενική συνολική μαγνήτιση M παράλληλα με το $\mathbf{B}_0$



Πυρήνες μετά την εφαρμογή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου B0. Μη μηδενική συνολική μαγνήτιση M παράλληλα με το $\mathbf{B}_0$.

Παραδείγματα μαγνητικών ιδιοτήτων πυρήνων

Πυρήνας	**Spin**	**Mhz/T**	**%**
1H	½	42,57	99,98
H2	1	6,54	0,015
13C	½	10,71	1,108
12C	0	-	98
14N	1	3,08	99,63
15N	½	-4,31	0,37
16O	0	0	99,96
17O	5/2	-5,77	0,037

Παράδειγμα

- 1kgr νερού τοποθετείται σε μαγνγτικό τομογράφο με ομογενές B0=1T, σε θερμοκρασία T=300 K. Να βρεθεί η κατακόρυφη μαγνήτιση.

- Υπολογίζουμε το πλήθος των πρωτονίων:
  - N_A μόρια νερού=18γρ→N=(1000/18)x6.023x10^{23}.
  - Πλήθος πρωτονίων=2N
- Το Οξυγόνο δεν συμβάλει την μαγνήτιση M.
- Πλήθος πρωτονίων με μ παράλληλο – μ αντιπαράλληλο στο B0

$$n_{up} - n_{down} = 2N \frac{1 - e^{-\frac{\gamma\hbar B_0}{kT}}}{1 + e^{-\frac{\gamma\hbar B_0}{kT}}} \Rightarrow \frac{n_{up} - n_{down}}{2N} = \tanh\left(\frac{\gamma\hbar \mathrm{B}_0}{2k\mathrm{T}}\right) \cong \frac{\gamma\hbar \mathrm{B}_0}{2k\mathrm{T}}$$

$$\Rightarrow \frac{n_{up} - n_{down}}{n} = \tanh\left(\frac{\gamma\hbar \mathrm{B}_0}{2k\mathrm{T}}\right) \cong \frac{\gamma\hbar \mathrm{B}_0}{2k\mathrm{T}}$$

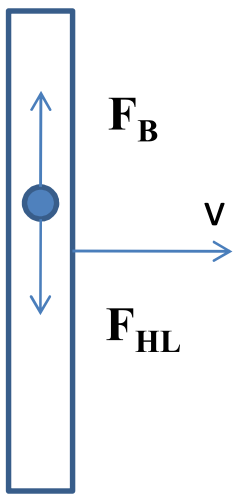
$$\left.\begin{array}{r} n_{up} - n_{down} \cong 2N \dfrac{\gamma\hbar \mathrm{B}_0}{2k\mathrm{T}} \\ N = \dfrac{1000}{18} \cdot 6.023 \cdot 10^{23} \\ k_B = 1.38 \times 10^{-23} JK^{-1} \\ h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{m}^2\mathrm{kgr.sec}^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow n_{up} - n_{down} = \frac{2 \dfrac{1000}{18} \cdot 6.023 \cdot 10^{23} 42.57 \dfrac{Mhz}{T} 1T \dfrac{1}{2\pi} 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{m}^2\mathrm{kgr.sec}^{-1}}{1.38 \times 10^{-23} JK^{-1} 300K} =$$

$$10^{23} \times 10^{6} \times 10^{-34} \times 10^{23} \times 10^{-2} \left(2 \frac{1000}{18} \cdot 6.023 \cdot 42.57 \frac{1}{2\pi} \cdot 6.63 \frac{1}{1.38}\right) \sim 10^{19}\, protons$$

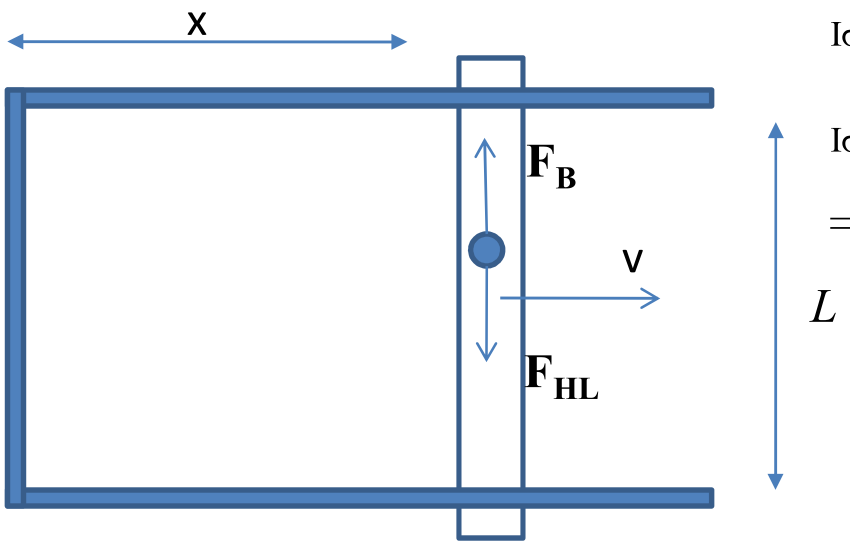
ΗΕΔ λόγω κίνησης αγωγού

- Εστω αγωγός ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα κάθετα σε **B**.
- Σε κάθε φορτίο ασκείται δύναμη Lorenz που το κινεί προς τα άκρα του αγωγού
- Ετσι δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο που ανθίσταται στην Δύναμη F_B.
- Εξισώνοντας τις δυνάμεις λόγω του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου , υπολογίζουμε την διαφορά δυναμικού που αναπτύσσεται στα άκρα της ράβδου

$$\left.\begin{aligned} F_B &= qvB \\ F_{HL} &= qE \end{aligned}\right\} \Rightarrow qvB = qE = q\frac{\Delta V}{L} \Rightarrow \Delta V = vBL$$



- Εστω ότι ο προηγούμενος κινούμενος αγωγός βρίσκεται επί κλειστού κυκλώματος, τα σταθερά μέρη του οποίου έχουν συνολική ωμική αντίσταση R.
- Τότε ο αγωγός θα διαρέεται από ρεύμα, η ένταση του οποίου μπορεί να υπολογιστει:
- από τον νόμο του Faraday ΗΕΓ=-dΦ/dt=-(d/dt)(BLx)=-BLv, →I=ΗΕΓ/R=-BLv/R
- Το B ασκεί δύναμη στον αγωγό F=I.L.B



$$F = ILB = \frac{BLv}{R} LB = \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

Ισχύς της δύναμης $P_F = Fv = \dfrac{B^2 L^2 v^2}{R}$

Ισχύς που καταναλώνεται στην R: $P_R = I^2 R = \left(\dfrac{BLv}{R}\right)^2 R = \dfrac{B^2 L^2 v^2}{R}$

$$\Rightarrow P_F = P_R$$

Παράδειγμα

- Μία αγώγιμη ράβδος μπορεί να περιστρέφεται κατακόρυφα χωρίς τριβές γύρω από άξονα που περνά από το ένα άκρο της, νέσα σε ομογενές οριζόντιο **B**. Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη σε οριζόντια θέση. Να βρεθεί η ΔV όταν αυτή βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση.

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = mg\frac{L}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2 = mg\frac{L}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}L\omega^2 = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

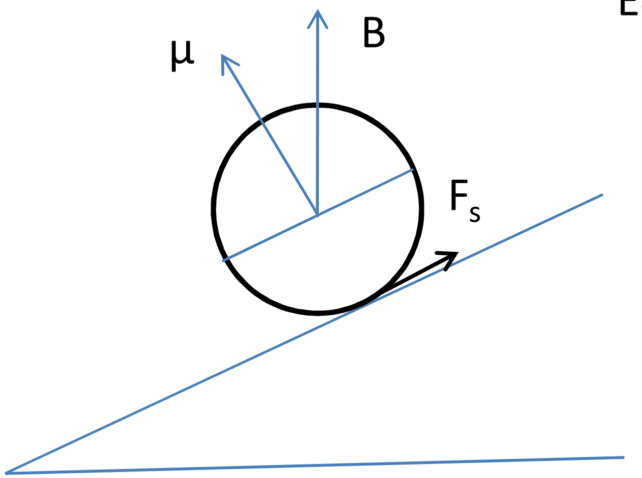
$$dV = Bv(x)dx$$

$$v(x) = x\omega = x\sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$V = \int_0^L Bx\sqrt{\frac{3g}{L}}dx = B\sqrt{\frac{3g}{L}}\int_0^L xdx = B\sqrt{\frac{3g}{L}}\frac{L^2}{2} = \frac{1}{2}L\sqrt{3gL}$$

Παράδειγμα

- Εστω μία σφαίρα από μη αγώγιμο υλικό που ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Η σφαίρα βρίσκεται σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο B και γύρω της περιελίσεται ρευματοφόρος αγωγός με 10 σπείρες, έτσι ώστε το επίπεδο του να περνά από το κέντρο της και να είναι παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο. Να βρεθεί η ένταση I που απαιτείται ώστε η σφαίρα να ισορροπεί.



Εξισώνοντας δυνάμεις και ροπές παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} F_s &= mg\sin\theta \\ F_s R &= \mu \times \mathrm{B} = \mu B \sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow mg\sin\theta R = \mu B \sin\theta$$

$$\Rightarrow mgR = \mu B = I\pi R^2 B \Rightarrow I = \frac{\pi R^2 B}{mg}$$

Παράδειγμα

- Ενα πρωτόνιο έχει αρχική ταχύτητα v0 και κινείται σε ομμογενές B0. Να βρεθεί η κίνηση του.

- Αναλύουμε την v0 σε παράλληλη και κάθετη συνιστώσα στο B0. Το πρωτόνιο θα εκτελέσει ευύγραμμη ομαλή κίνηση παράλληλα στο B0 και κυκλική ομαλή στο επίπεδο κάθετα στο B0.

$$\mathbf{v_0} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})10^5\, m\sec^{-1} = \underbrace{(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})10^5}_{v\perp} + \underbrace{(-\mathbf{k})10^5}_{v_{parallel}}$$

$$\mathbf{B_0} = 1T\mathbf{k}$$

$$F = qv \times \mathbf{B_0} = 1.6 \cdot 10^{-19}\sqrt{5} \cdot 10^5 \left(Cb \cdot m \cdot \sec^{-1} \cdot T\right)$$

$$m = \mathbf{1.67 \times 10^{-27}}$$

$$F = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = m\frac{v^2}{F} = \mathbf{1.67 \times 10^{-27}} \frac{\left(\sqrt{5} \cdot 10^5\right)^2}{1.6 \cdot 10^{-19}\sqrt{5} \cdot 10^5} =$$

$$\mathbf{10^{-27}} \frac{\sqrt{5} \cdot 10^5}{10^{-19}} = \sqrt{5} \times 10^3\, meter$$

- Να βρεθεί η ηλεκτρική ροή που περνά από σφαίρα ακτίνας 1m με φορτίο 1C στο κέντρο της

$$E = k_c \frac{q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \, Nm^2 C^{-2} \frac{10^{-6} C}{1m^2} = 9 \cdot 10^3$$

$$\Phi = EA = E 4\pi r^2$$

- Μία σφαίρα από μονωτικό υλικό περιέχει ομογενώς κατανεμημένο φορτίο Q. Να βρεθεί η Ε εντός και εκτός της σφαίρας

- A) εκτός: εστω γκαουσιανή σφαίρα που περικλείει την φορτισμένη σφαίρα.

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = E\left(4\pi r^2\right) \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

- B) εντός

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} q \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = E\left(4\pi r^2\right) \Rightarrow E\left(r\right) = \frac{qr}{\varepsilon_0 4\pi R^3}, r \le R$$

- Ενας κύβος ακμής α περικλείει φορτίο q στο κέντρο του. Να βρεθεί η Φ_E για μία έδρα του

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = 6\Phi_1$$

- Ενα πρωτόνιο βρίσκεται σε B=1T. Να βρεθεί η μέγιστη διαφορά μταξύ των 2 ενεργειακών καταστάσεων

$$\mu_B = \frac{q\hbar}{2m_p}$$

$$1.054\times10^{-34}\ \mathrm{kgr.m}^2.$$

$$\Delta U = 2\mu_B B = 2\frac{q\hbar}{2m_p}B = 2\frac{1.7\times10^{-19}\,C\cdot1.054\times10^{-34}\ \mathrm{kgr.m}^2}{2\times10^{-27}\,kgr}1T = 10^{-26}\,J \approx 10^8\,Hz$$

- 2 σφαίρες με ακτίνες 0.3 m και 0.5 m, μάζες 0.1 kgr, 0.7 kgr και ομογενώς κατανεμημένα φορτία -2μC, +3μC απελευθερώνονται ανώ απέχουν 1 m. Να βρεθούν οι ταχύτητες τους λίγο πριν συγκρουστούν

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$k_c \frac{(-q_1) q_2}{d} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + k_c \frac{(-q_1) q_2}{r_1 + r_2}$$

- Ενα σωληνοειδές με 100 σπείρες και ακτίνα 0.1m διαρέεται από I=10 A και έχει τον άξονα του παράλληλο σε εξωτερικό B=0.01 T. Να βρεθεί πόση ενέργεια απαιτείται για να κάνουμε το άξονα αντιπαράλληλο στο B.

$$\Delta U = 2\mu_B B = 2n\pi r^2 IB = 2\cdot 100\pi \left(0.1\right)^2 \cdot 1\cdot 0.01$$