

Εστω αγγείο με  $R=1\text{cm}$ ,  $L=10\text{cm}$  που διακλαδίζεται σε 2 άλλα με  $R_1=0.5\text{cm}$ ,  $L_1=5\text{cm}$  και  $R_2=0.2\text{cm}$ ,  $L_2=10\text{cm}$ . Το αγγείο τροφοδοτείται από την καρδιά με ημιτονοειδούς μορφής πίεση με κυκλική συχνότητα  $\omega$ .

A) Θεωρείστε μόνο ωμική αντίσταση για κάθε αγγείο. Υπολογίστε τη συνολική ροή, καθώς και την ροή διαμέσου κάθε ενός από τα αγγεία.

B) Θεωρείστε ωμική αντίσταση και επαγωγή παράλληλα για κάθε αγγείο. Υπολογίστε τη συνολική ροή, καθώς και την ροή διαμέσου κάθε ενός από τα αγγεία.

$$R_2=16R_1, L_2=8L_1$$

$$R_3=625R_1, L_3=25L_1$$

$$Z_{all} = Z_1 + \left( \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)^{-1} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$I = V_s \frac{1}{Z_{all}} = V_s \left( \frac{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \right)^{-1} = V_s \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

$$\frac{V_s - V_A}{Z_1} = \frac{V_A}{Z_2} + \frac{V_A}{Z_3} \Rightarrow \frac{V_s}{Z_1} = V_A \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \Rightarrow V_A = \frac{V_s}{Z_1} \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)^{-1} = \frac{V_s}{Z_1} \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

$$I_2 = \frac{V_A}{Z_2} = V_s \frac{Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} = V_s \frac{625R_1}{R_1 16R_1 + R_1 625R_1 + 16R_1 625R_1} = \frac{V_s}{R_1} \frac{625}{16 + 625 + 16 \times 625}$$

$$I_3 = \frac{V_A}{Z_3} = V_s \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} = \frac{V_s}{R_1} \frac{16}{16 + 625 + 16 \times 625}$$

$$I_1 = V_s \frac{16R_1 + 625R_1}{R_1 16R_1 + R_1 625R_1 + 16R_1 625R_1} = \frac{V_s}{R_1} \frac{16 + 625}{16 + 625 + 16 \times 625}$$

Θεωρείστε τον πνεύμονα με ελαστικότητα  $E$  ο οποίος συνδέεται με το περιβάλλον με άκαμπτο αγωγό (τραχεία) ωμικής αντίστασης  $R$ . Ο ασθενής παίρνει βαθιά αναπνοή, κρατά την αναπνοή του και την χρονική στιγμή  $t=0$  απελευθερώνει το αέρα, χωρίς επιπλέον αναπνευστική προσπάθεια.

Διατυπώστε τον ορισμό της ελαστικότητας, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πνεύμονας έχει όγκο «ηρεμίας»  $V_0$ . Κατασκευάστε το ηλεκτρικό ανάλογο κύκλωμα και γράψτε την  $\Delta E$  της ροής αέρα. Εντοπίστε τις παραμέτρους του μοντέλου.

Εξηγείστε ποιες μετρήσεις θα παίρνατε για να υπολογίσετε τις παραμέτρους του μοντέλου.

Θεωρείστε πληθυσμό ανδρών και γυναικών και νόσο η οποία μεταδίδεται μόνο μεταξύ ατόμων αντίθετου φύλου. Κάθε άτομο έχει 3 δυνατές καταστάσεις: υγείας (Y), Μολυσμένος (I) και Θεραπευμένος (R). Κάθε μολυσμένος άνδρας (A) και γυναίκα (Γ) μπορεί να απομακρυνθεί (θεραπευθεί) με πιθανότητα ανά ημέρα  $k_5$ ,  $k_6$  αντίστοιχα. Η πιθανότητα ανά ημέρα μόλυνσης A από Γ και Γ από A είναι ανάλογη με αυτή του επιδημιολογικού μοντέλου SIR. Κατασκευάστε τις εξισώσεις του επιδημιολογικού μοντέλου.

Ποιες είναι οι συνθήκες μεταξύ των σταθερών του μοντέλου που θα αποτρέψουν την εκδήλωση επιδημίας ?

Εστω αποικία κυττάρων με  $\alpha=1$ ,  $\beta=0.1$ . Τα κύτταρα αυτά ακτινοβολούνται με ιονίζουσα ακτινοβολία με συνολική δόση 10Gy. Υπολογίστε το ποσοτό επιβίωσης. Υπολογίστε σε πόσες ισόποσες δόσεις πρέπει να κατανεμηθεί η δόση των 10Gy, ώστε το κλάσμα επιβίωσης που προκύπτει να είναι 10 φορές μεγαλύτερο.

Δίνεται πληθυσμός από κύτταρα τα οποία έχουν κυτταρικό κύκλο διάρκειας 10 ώρες. Η φάση της μίτωσης διαρκεί 1 ώρα. Την χρονική στιγμή  $t=0$ , ο πληθυσμός περιέχει 50 κύτταρα σε φάση μίτωσης και 50 κύτταρα σε άλλη φάση. Υπολογίστε το πλήθος των κυττάρων σε μίτωση και μη, μετά πάροδο μεγάλου χρονικού διαστήματος.

Επαναλάβετε τον υπολογισμό για αρχικές συνθήκες 99 και 1 κύτταρο αντίστοιχα.

Σύριγγα με όγκο  $10^{-6} \text{ m}^3$  εισάγεται ενδοφλέβια. Πίεση βλέβας  $P_{\text{vein}}=14\text{mmHg}=1900\text{N/m}^2$ . Διαστάσεις βελόνας  $25\text{mm}$ ,  $0.4\text{mm}$  (μήκος και εσωτερική διάμετρος. Επιφάνεια εμβόλου  $8 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ . Ιξώδες υγρού  $\eta=1.5 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}=1.5 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-2} \text{ sec}$ .

Ποια δύναμη πρέπει να ασκήσουμε στο έμβολο ώστε η σύριγγα να αδειάσει εντός  $3 \text{ sec}$  ?

Τι θα γινόταν αν εισάγαμε την βελόνα σε αρτηρία ?

Πως μεταβάλλονται τα παραπάνω αν πρόκειται για ορό ?

Υπολογίστε την πτώση τάσης στα ακόλουθα αγγεία:

- Αορτή (internal radius  $r = 1.25 \text{ cm}$ , length  $L = 10 \text{ cm}$ , all of the flow)
- Μεγάλες αρτηρίες ( $r = 0.2 \text{ cm}$ ,  $L = 75 \text{ cm}$ ,  $n = 200$ , each with equal flow)
- arterioles ( $r = 30 \mu\text{m}$ ,  $L = 0.6 \text{ cm}$ ,  $n = 5 \times 10^5$ )
- capillaries ( $r = 3.5 \mu\text{m}$ ,  $L = 2 \text{ mm}$ ,  $n = 10^{10}$ )

Εστω ότι την χρονική στιγμή  $t=0$  τοποθετούμε  $N_0=100$  κύτταρα στην θέση  $x=0$ , τα οποία διαχέονται μονοδιάστατα με σταθερά διάχυσης

$D=0.01\text{sec}^{-1}\text{mm}^2$ . Υπολογίστε την συγκέντρωση των κυττάρων για  $t=1\text{ sec}$  και  $t=2\text{sec}$  στις θέσεις που απέχουν έως  $2\text{ mm}$  από την  $x=0$ .

Εστω ότι την  $t=0$  εισάγεται ενδοφλέβια  $m_0=10\text{mg}$  μίας ραδιενεργού ουσίας με ενεργότητα  $10\text{MBq}$ .

Μετά από λίγα λεπτά γίνεται αιμοληψία  $10\text{ ml}$  και διαπιστώνεται ότι περιέχουν ενεργότητα  $2\text{kBq}$ . Ποιος ο όγκος του αίματος του ασθενούς ?

Εστω ότι σε κάθε καρδιακό χτύπο:

- 1% του αίματος περνά από το ήπαρ, το οποίο κατακρατεί το 20% της ραδιενεργού ουσίας
- 5% του αίματος φιλτράρεται από τους νεφρούς και απομακρύνεται η αντίστοιχη ραδιενεργή ουσία

Υπολογίστε:

- Τον διαμερισματικό πίνακα  $K$
- Την αναλυτική μορφή της ενεργότητας που προέρχεται από το ήπαρ συναρτήσει του χρόνου
- Είναι ο  $K$  αντιστρέψιμος? Ποιος ο μέσος χρόνος μετάβασης από το αίμα στο ήπαρ ?



Εστω ότι την  $t=0$  εισάγεται ενδοφλέβια  $m_0=1\text{mg}$  μίας δραστικής ουσίας, η οποία απομακρύνεται με άγνωστο ρυθμό  $k_{01}$  από το αίμα.

Κατασκευάστε τον πίνακα Κ.

Εστω ότι για διάφορες χρονικές στιγμές (αριστερή στήλη) έγιναν οι παρακάτω μετρήσεις μάζας της δραστικής ουσίας (δεξιά στήλη).

Βρείτε τις τιμές των στοιχείων του Κ.

0	1.0486
10.0000	0.9534
20.0000	0.8673
30.0000	0.7894
40.0000	0.7189
50.0000	0.6551
60.0000	0.5974
70.0000	0.5452
80.0000	0.4979
90.0000	0.4552
100.0000	0.4165

Σας δίνεται ο τύπος για την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων:

$$a = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, b = \frac{\sum y - a \sum x}{n}$$

Υπολογίστε την συνάρτηση  $m(t)$  όταν η είσοδος δεν είναι απότομη, αλλά της μορφής  $u(t)=1$ ,  $0 < t < T$ .

## **Βιβλιογραφία**

James Keener, James Sneyd, *Mathematical Physiology*, 2009 Springer, κεφ.11, 14.

Steven T. Karris , *Circuit Analysis II with MATLAB® Computing and Simulink®/SimPowerSystems® Modeling*, Orchard Publications

John K-J Li, *DYNAMICS of the VASCULAR SYSTEM*, World Scientific.

M. Bentourkia and H. Zaidi, *Tracer Kinetic Modeling in Nuclear Medicine: Theory and Applications*, in Habib Zaidi (Ed.), *Quantitative Analysis in Nuclear Medicine Imaging* (κεφ. 12).

Irving P. Herman, *Physics of the Human Body*, Springer 2007, κεφ. 7,8, 9.

M. Zamir, *The Physics of Coronary Blood Flow*, Springer 2005, κεφ. 1 - 7.

Claudio Cobelli, David Foster and Gianna Toffolo *Tracer Kinetics in Biomedical Research*, Kluwer Academic Publishers, 2002 (Κεφ. 4, 5).