

Στοιχεία ρευστομηχανικής και μοντελοποίηση αρτηριακής κυκλοφορίας

Κ. Δελήμπασης

Στένωση αγωγού – Εξίσωση Bernoulli

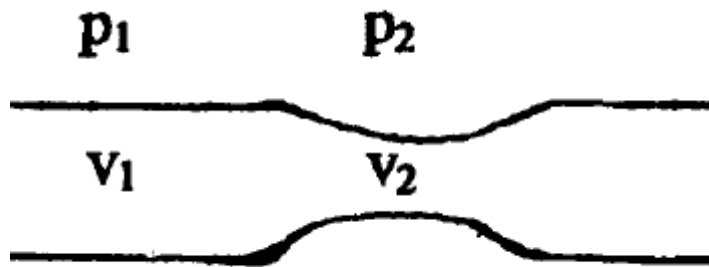
- Εστω αγωγός εντός του οποίου ρέει **ασυμπίεστο** ρευστό (πχ αίμα), όπως στο σχήμα. Αν θεωρήσουμε στοιχειώδη όγκο αέρα δV στα 2 σημεία του σχήματος, καθώς και ότι ο αγωγός είναι οριζόντιος, τότε:

$$E = E_K + E_D = \frac{1}{2} \delta m v_1^2 + P_1 \delta V = \frac{1}{2} \delta m v_2^2 + P_2 \delta V \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \rho \delta V v_1^2 + P_1 \delta V = \frac{1}{2} \rho \delta V v_2^2 + P_2 \delta V \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + P_2$$

- Κατά συνέπεια, μείωση της διαμέτρου \rightarrow αύξηση της ταχύτητας \rightarrow μείωση της πίεσης.



- Στην περίπτωση συμπιεστού ρευστού (πχ αέρα), $\rho = \rho(P)$, οπότε ο προηγούμενος τύπος τροποποιείται

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_1}^p \frac{dp}{\rho(p)} = \text{σταθ. κατά μήκος του αγωγού}$$

- Μία χρήσιμη απλοποίηση του παραπάνω τύπου προκύπτει θεωρώντας αδιαβατική μεταβολή πίεσης/όγκου:

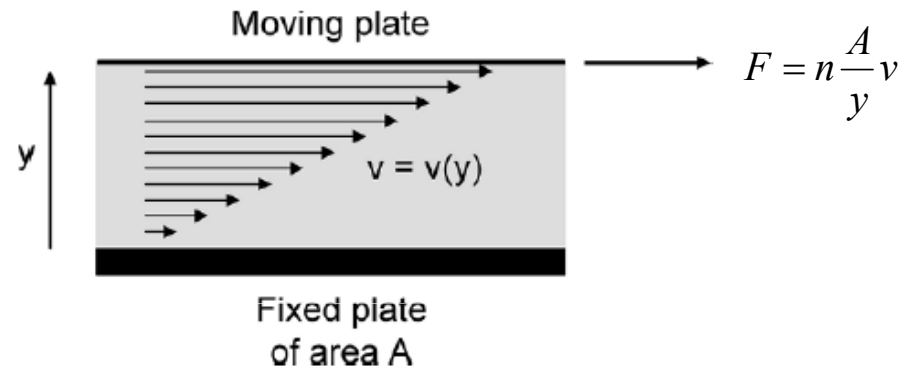
$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \text{σταθ. κατά μήκος του αγωγού}$$

- όπου $\gamma = C_p / C_v$ συντελεστής θερμοχωρητικότητας = θερμοχωρητικότητα υπό σταθ. Πίεση / θερμοχωρητικότητα υπό σταθ. όγκο.

- Σε περίπτωση που ο αεραγωγός είναι ελαστικός, τότε η ελάτωση της πίεσης λόγω του Bernoulli προκαλεί επιπλέον στένωση του αγωγού που επιτείνει το φαινόμενο Bernoulli.
- Θεωρώντας ότι υπάρχει μη μηδενική εξωτερική πίεση στον αγωγό (από το υλικό του τοιχώματος και τους παρακείμενους ιστούς), τελικά ο αγωγός θα αποκλειστεί, μηδενίζοντας την ροή.
- Η διαφορά πίεσης του ρευστού θα επανεκκινήσει την ροή και ο αγωγός θα επανέλθει στην αρχική διάμετρο του.

Ιξώδες ρευστού

- Η εξίσωση Bernoulli θεωρεί ροή ιδανικού υγρού (χωρίς τριβές).
- Κάθε υγρό παρουσιάζει ιξώδες (viscosity), που ορίζεται ως εξής:



- Εστω πακτωμένη και κινούμενη οριζόντια επιφάνεια A με ταχύτητα v. Η δύναμη τριβής ορίζεται:

$$\frac{F}{A} = n \frac{dv}{dy} \Rightarrow n = \frac{F}{A} \underbrace{\left(\frac{dv}{dy} \right)^{-1}}_{\substack{\text{vertical} \\ \text{velocity} \\ \text{gradient}}} = \frac{\text{δύναμη παραμόρφωσης}}{\text{κλίση παραμόρφωσης}} = \frac{\text{shear stress}}{\text{shear rate}}$$

$$\text{units : } 1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = 1 \text{ Poiseuille} = \text{Nm}^{-2} \left(\text{m sec}^{-1} \text{ m}^{-1} \right)^{-1} = \text{Nm}^{-2} \text{ sec}$$

$$1 \text{ Poise} = \text{dynes}\cdot\text{sec} / \text{cm}^2 = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

- Ιξώδες αίματος.
 - Το αίμα αποτελείται από το πλάσμα και τα κύτταρα, η συντριπτική πλειοψηφία των οποίων είναι τα ερυθρά αιμοσφαίρια. Το ιξώδες του πλάσματος είναι ίσο με 0.015 Poise, ενώ το συνολικό ιξώδες του αίματος με κανονικό αιματοκρίτη 40 – 45% είναι 0.032 Poise. Το ιξώδες του αίματος επηρεάζεται από:
 - Την θερμοκρασία
 - Τον αιματοκρίτη
 - Την ελαστικότητα των ερυθροκυττάρων
 - Την ταχύτητα ροής
 - Την ακτίνα του αγγείου

- Μέτρηση του ιξώδους:
 - Περιστρεφόμενο κύλινδρο
 - Μέσω της οριακής ταχύτητας πτώσης μίας σφαίρας γνωστών ιδιοτήτων , διαμέσου του ρευστού (Νόμος του Stokes).

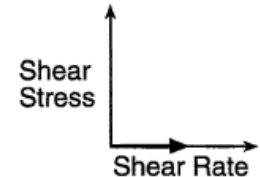


Παραδείγματα ιξώδους

Υγρό	Θερμοκρασία	Ιξώδες
Νερό	0	1.78×10^{-3}
	20	1×10^{-3}
CSF	20	
Ketchup	20	50
Αέρας	20	1.8×10^{-5}
Αίμα	37	4×10^{-3}

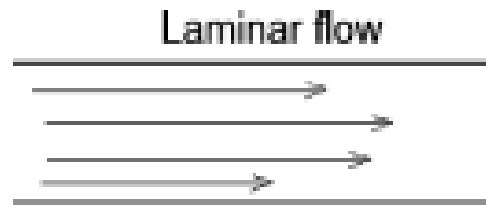
Υγρά, Νευτωνικά και μη

- Τα υγρά για τα οποία ισχύει ο ορισμός του ιξώδους (δηλ. γραμμική σχέση shear stress – shear rate), ονομάζονται Νευτωνικά.
- Για τα μη νευτωνικά υγρά:

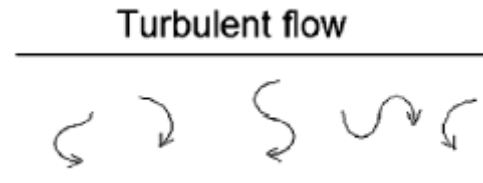
$$\frac{F}{A} = n \left(\frac{dv}{dy} \right)^n \Rightarrow \text{shear stress} = n (\text{shear rate})^n$$

Ideal	$\tau = 0$	
Newtonian	$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$	
Non-Newtonian	$\tau = \eta \left(\frac{dv}{dy} \right)^n$	

Είδη ροής σε αγωγό



Στρωτή ροή



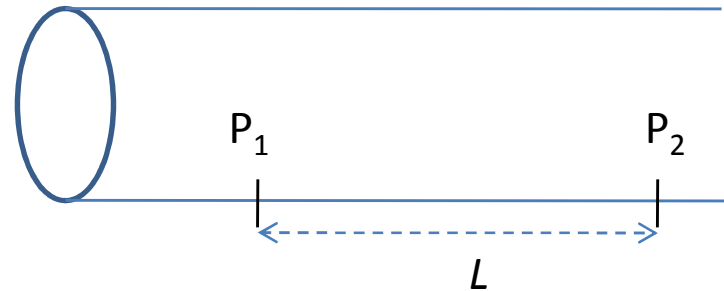
Τυρβώδης ροή

- Η αντίσταση των αεραγωγών οφείλεται στην τριβή των μορίων του ρευστού με τα τοιχώματα
- Διακρίνουμε 2 είδη ροής:
 - στρωτή ροή (laminar flow) με διανύσματα ταχύτητας παράλληλα στον άξονα του αγγείου (Turbulent flow)
 - Τυρβώδης ροή με τυχαία διανύσματα ταχύτητας που προκαλούν δίνες στο αγγείο (Turbulent flow)
- Το είδος της ροής καθορίζεται από τον αριθμό Reynolds Re :

$$\text{Re} = \frac{2\rho r v}{n} = \frac{2\rho Q}{\pi n r}$$

- v : ταχύτητα ρευστού m/sec
 - Q : ροή (όγκος /sec)
 - n : ιξώδες
 - r : ακτίνα αγωγού
 - ρ : πυκνότητα= $1.2 \times 10^{-3} \text{ gr.cm}^{-3}$.
- Για την τραχεία, $r=1\text{cm}$, ροή=1L/sec, $\rightarrow \text{Re}=3000 \rightarrow$ ροή σχεδόν τυρβώδης
 - Στην διακλάδωση 6^{ης} τάξης: θεωρούμε ότι σε κάθε διακλάδωση η ακτίνα διαιρείται δια 2 $\rightarrow r=1\text{mm}$, ροή= 2^{-6} L/sec. Ο αριθμός $\text{Re}=600 \rightarrow$ στρωτή ροή.

Στρωτή ροή σε άκαμπτο αγωγό: Ροή Poiseuille και υπολογισμός της αντίστασης



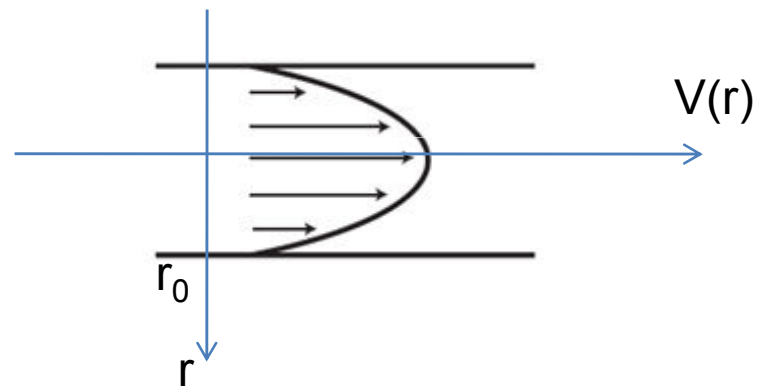
- Εστω αγωγός ακτίνας r , στοιχειώδους πάχους και μήκους l , εντός του οποίου ρέει ασυμπιεστο ρευστό με ιξώδες n . Μεταξύ 2 σημείων του υπάρχει διαφορά πίεσης $\Delta p = P_1 - P_2$. Η δύναμη που κινεί το ρευστό είναι ίση με $\pi r^2 \Delta p$. Εξισώνοντας αυτή με τη δύναμη αντίστασης:

$$\text{Δύναμη αντίστασης (απο ορισμό ιξώδους): } F_{res} = \underbrace{(2\pi r l)}_{\text{παράπλευρη επιφάνεια αγγείου}} n \frac{dv}{dr}$$

$$F_{res} = \Delta p \pi r^2 = \frac{dp}{dl} l \pi r^2 \Rightarrow dv = \frac{1}{2nl} \Delta p r dr \Rightarrow$$

$$v(r) = \frac{\Delta p r^2}{4nl} + k = \frac{\Delta p}{4nl} (r^2 - r_0^2) \text{ ακτινικό προφίλ ταχύτητας}$$

- Προκύπτει ότι το προφίλ της ταχύτητας είναι παραβολικό με μέγιστο για $r=0$ και έχει μηδενική τιμή για $r=r_0$.



- Η ροή Q διαμέσου αγωγού με στρωτή ροή υπολογίζεται με ολοκλήρωση σε όλη την επιφάνεια του αγωγού και αντικατάσταση του παραβολικού προφίλ της ταχύτητας, οπότε και προκύπτει η εξίσωση Poiseuille:

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi r v dr = \int_0^{r_0} 2\pi r \frac{\Delta p r}{4nl} (r^2 - r_0^2) dr = \frac{\pi r_0^4}{8nl} \Delta p$$

Υπολογισμός της μέσης ταχύτητας \bar{v} :

$$Q = \pi r_0^2 \bar{v} \Rightarrow \bar{v} = \frac{r_0^2}{8nl} \Delta p$$

Υπολογισμός της αντίστασης του αγωγού R :

$$R = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{8nl}{\pi r_0^4}$$

Υπολογισμός ωμικής αντίστασης αρτηριακού δέντρου

- Εστω αρτηριακό δένδρο με N διακλαδώσεις . Σε κάθε διακλάδωση ισχύει για το μήκος και την ακτίνα:

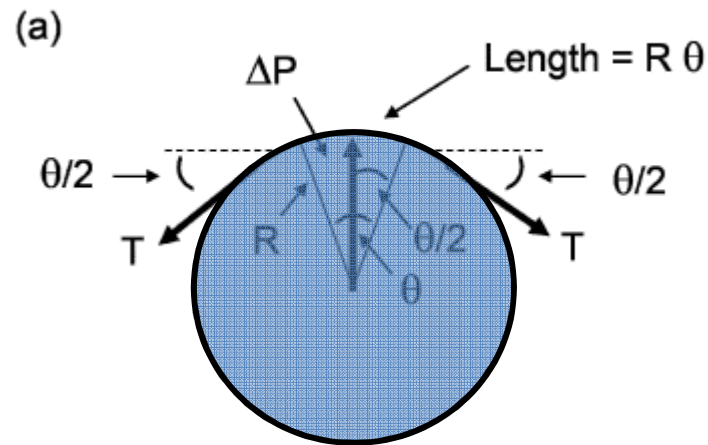
$$r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n, L_{n+1} = L_n / 2$$

Για τη n διακλάδωση θεωρούμε ωμική

$$R_n = \sum_{i=1}^n \frac{\pi a_0^2 2^{-4n}}{8nL_0 2^{-n}} = \frac{\pi a_0^2}{8nL_0} \sum_{i=1}^n 2^{-3n} = \frac{\pi a_0^2}{8nL_0} \left(\frac{1 - 2^{-3(n+1)}}{1 - 2^{-3}} - 1 \right)$$

Φυσική των ρευστών: ο νόμος του Young - Laplace

- Ιδανικό αέριο: $P=nRT$, όπου $R = N_A k_B = 6.023 \times 10^{23} \text{ mole}^{-1} \times 1.381 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1} = 8.31 \text{ Jmole}^{-1} \text{ K}^{-1}$ όπου $n=N/V$ =αρ μορίων / όγκο, T : θερμοκρασία σε βαθμούς Κ.
- Εστω ρευστό πίεσης P που περιέχεται σε αγωγό με λεπτό τοίχωμα που βρίσκεται σε περιβάλλον με πίεση P_{ext} . Ο νόμος του Laplace συνδέει την επιφανειακή τάση του αγωγού με την διαφορά πίεσης $P_{\text{ext}} - P$.
- Η επιφανειακή τάση ορίζεται ως δύναμη / (μήκος διατομής που σχηματίζει μικρή γωνία θ).



Νόμος Laplace για κυλινδρικό αγωγό

μήκος διατομής στο οποίο εφαρμόζεται η επιφανειακή τάση: $R2\pi \frac{\theta}{2\pi} = R\theta$

T : επιφανειακή τάση (δύναμη/μήκος=έργο/επιφάνεια)

$$2T_y L = F \Rightarrow 2TL \sin \frac{\theta}{2} = T\theta L \Rightarrow \Delta P = \frac{T}{R},$$

όπου:

$L\theta R$ = εμβαδό στοιχειώδους λωρίδας στην επιφάνεια του αγγείου παράλληλα στον άξονα του

ΔP διαφορά πίεσης μέσα - έξω = $F/L\theta R$

Νόμος Laplace για σφαίρα

- Για σφαίρα, ο τύπος Laplace τροποποιείται

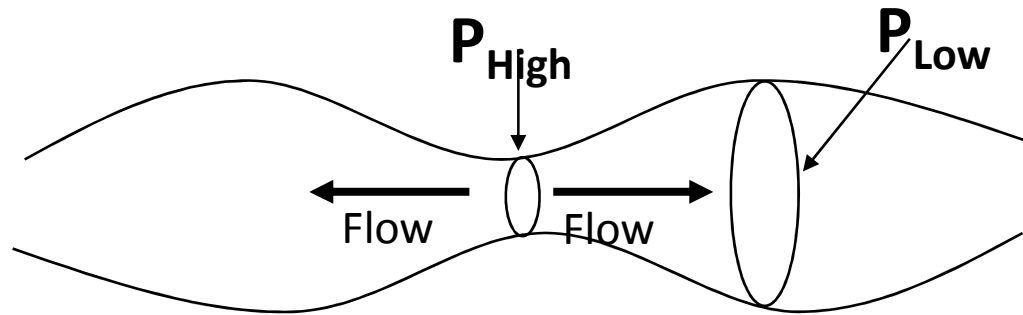
Γενική μορφή της Εξ. Young-Laplace: $P_{out} - P_{in} = T \nabla \cdot \mathbf{n} = TH$,

όπου T επιφανειακή τάση, H : μέση καμπυλότητα επιφ = $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Καμπυλότητα σφαίρας: $\nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2)}{\partial r} = \frac{2}{R}$

$$P_{out} - P_{in} = \frac{2T}{R}$$

Εφαρμογή του Laplace: γιατί σπάνε οι σταγόνες σε μικρότερες



Στρωτή ροή και εξίσωση Poiseuille

- Η εξίσωση Poiseuille $Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8nl}$

Q : ροή

r : ακτίνα αγωγού

Δp : πτώση πίεσης κατά μήκος l του αγωγού

n : ιξώδες

- Ορισμός ιξώδους:

$$n = \frac{F/A}{dv/dr}$$

F : δύναμη που ανθίσταται στην κίνηση του ρευστού

$A = 2\pi rl$: επιφάνεια

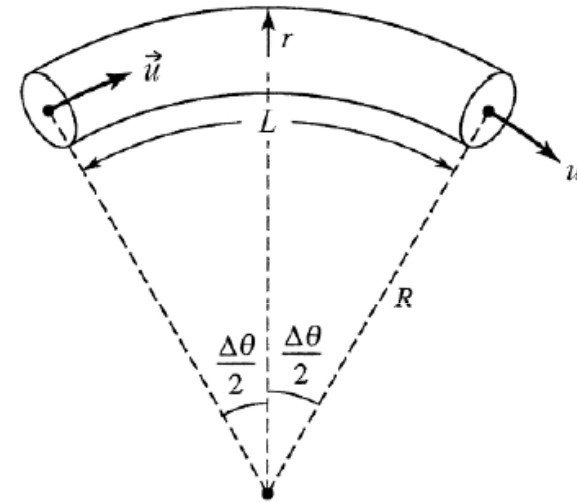
dv/dr : κλίση ταχύτητας ακτινικά του αγωγού

Αγωγός με καμπυλότητα (στροφή)

- Εστω κυλινδρικός αγωγός διατομής A με ακτίνα καμπυλότητας R_0 στον οποίο ρέει ρευστό με πυκνότητα ρ με μέση ταχύτητα u .
- Η δύναμη F που απαιτείται για να αλλάξει κατεύθυνση η ροή υπολογίζεται:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= AL\rho u_1 \\ J_2 &= AL\rho u_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta J = AL\rho u \sin \theta$$

$$\Delta t = \frac{L}{u} = \frac{R_0 \theta}{u}, \quad F = \frac{\Delta J}{\Delta t} = AL\rho \frac{u^2}{R_0}$$



- Η δύναμη F θεωρούμε ότι ασκείται στην μισή εσωτερική επιφάνεια του αγωγού \rightarrow η πίεση που απαιτείται:

$$P = \rho r \frac{u^2}{R_0}$$

- Για το αορτικό τόξο, $\rho=1\text{gr/cm}^3$, $r=1.25\text{cm}$, $R_0=2\text{cm}$, $u=100\text{cm/sec} \rightarrow P=4.7\text{mmHg}$, το οποίο αποτελεί μία επιπλέον πτώση πίεσης στην αορτή.

Επαγωγή αγωγού

- Εστω κυλινδρικός αγωγός ακτίνας a μήκους l , εντός του οποίου βρίσκεται ακίνητο ιδανικό υγρό (ιξώδες=0 \rightarrow κλίση της ταχύτητας ακτινικά $dv/dr = 0$).
- Αν $t=0$ ασκηθεί διαφορά πίεσης ΔP μεταξύ δύο σημείων, το υγρό θα αρχίσει να κινείται με την ταχύτητα που καθορίζει η ροή Poissuille.
- Η ταχύτητα αυτή δεν θα αποκτηθεί στιγμιαία, αλλά σταδιακά, όπως όταν ασκείται δύναμη F σε μάζα m η οποία επιταχύνεται με γ .
- Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην αδράνεια του υγρού (λόγω της μάζας του) και ονομάζεται επαγωγή L (Inductance) λόγω της ομοιότητας που παρουσιάζει με την ένταση του ρεύματος σε κύκλωμα RL.

$$\text{Ορισμός επαγωγής: } \Delta p = L \frac{dq}{dt}$$

$$\underbrace{\Delta p \pi a^2}_{\text{Δύναμη}} = \underbrace{\rho l \pi a^2}_{\text{μάζα}} \underbrace{\frac{du}{dt}}_{\substack{q=upd^2 \\ \text{επιτάχυνση}}} \Rightarrow L = \frac{\rho l}{\pi a^2}$$

Προσομοίωση της κίνησης ρευστού σε αγωγό με αντίσταση R και επαγωγή L

- Σκοπός της προσομοίωσης κίνησης είναι να καταλήξουμε σε μία εξίσωση που συνδέει την πίεση στα άκρα του αγωγού με την ροή.
- Από το νόμο του Kirchoff για κλειστό βρόγχο προκύπτει η ΔΕ:

$$L \frac{dq(t)}{dt} + Rq(t) = p(t) \Rightarrow \dot{q}(t) + \frac{R}{L}q(t) = \frac{1}{L}p(t)$$

- Λύση της εξίσωσης για οποιαδήποτε συνάρτηση p(t).

$$e^{\frac{R}{L}t} \dot{q}(t) + e^{\frac{R}{L}t} \frac{R}{L}q(t) = e^{\frac{R}{L}t} \frac{1}{L}p(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{R}{L}t} q(t) \right) = e^{\frac{R}{L}t} \frac{1}{L}p(t) \Rightarrow q(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \left(\int e^{\frac{R}{L}t} p(t) dt + q(0) \right)$$

- Εστω $p(t)=0$. Είναι προφανές ότι αν υπήρχε αρχική ροή, ελαττώνεται εκθετικά με τον χρόνο

$$p(t) = 0 \Rightarrow q(t) = q(0) \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

- Περίπτωση 2:

$$p(t) = p_0 \Rightarrow q(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \left(p_0 \int e^{\frac{R}{L}t} dt + q(0) \right) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \left(p_0 \int e^{\frac{R}{L}t} dt + q(0) \right) \Rightarrow$$

$$q(t) = \underbrace{\frac{p_0}{R}}_{\text{μόνιμη κατάσταση}} + \underbrace{q(0) \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{μεταβατική κατάσταση}}$$

- Περίπτωση 3: η πίεση είναι ημιτονειδούς μορφής

$$p(t) = p_0 \sin(\omega t) \Rightarrow q(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \left(p_0 \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) + c \right) \Rightarrow$$

$$q(t) = \underbrace{c \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{μεταβατική κατάσταση}} + \underbrace{\frac{p_0}{R^2 + L^2 \omega^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)}_{\text{μόνιμη κατάσταση}}$$

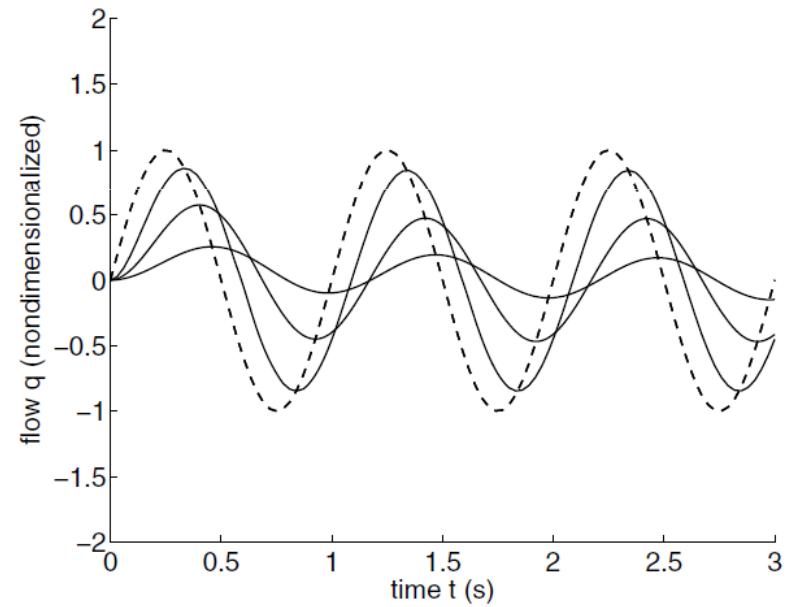
Υπολογισμός σταθεράς c βάσει Αρχ. συνθηκών: $q(0) = 0 \Rightarrow c = \frac{p_0 \omega L^2}{R^2 + L^2 \omega^2}$

$$q(t) = \underbrace{\frac{p_0 \omega L}{R^2 + L^2 \omega^2} e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{μεταβατική κατάσταση}} + \frac{p_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \left(\underbrace{\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}}_{\cos \theta} \sin \omega t - \underbrace{\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}}_{\sin \theta} \cos \omega t \right) =$$

$$q(t) = \frac{p_0 \omega L}{R^2 + L^2 \omega^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{p_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \theta)$$

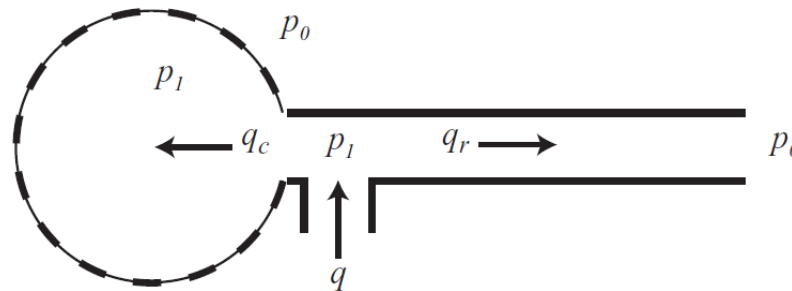
- Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι:
 - Η μιγαδική ποσότητα $Z=R+j\omega$ καλείται εμπέδηση του αγωγού
 - Η μόνιμη κατάσταση (δηλ. το κύμα της ροής $Q(t)$) είναι ημιτονοειδές με ίδια συχνότητα με το κύμα της πίεσης $P(t)$, μέτρο διαιρεμένο με το μέτρο της εμπέδησης και καθυστέρηση φάσης ίση με τη φάση της εμπέδησης
- Το πηλίκο R/L έχει διαστάσεις sec^{-1} και μπορεί να θεωρηθεί χρονική σταθερά του συστήματος.
- Όταν $L \rightarrow 0$ (δηλ μόνο ωμική αντίσταση), δεν υπάρχει καθυστέρηση φάσης
- Όταν L μεγαλώνει σε σχέση με το R (ωμική αντίσταση), αυξάνει η διαφορά φάσης και μειώνεται το πλάτος της ροής

- Παράδειγμα υπολογισμού της ροής για αυξανόμενο L , με $P(t)$ ημιτονοειδές



Αγωγός με ελαστικότητα – Η έννοια της χωρητικότητας

- Τα προηγούμενα αποτελέσματα προϋποθέτουν άκαμπτο αγωγό. Αν ο αγωγός είναι ελαστικός, τότε αύξηση της πίεσης στο εσωτερικό του προκαλεί αύξηση του όγκου του. Θεωρώντας το γραμμικό μοντέλο πίεσης-όγκου, ισχύει
 - $V(P)=V_0+C.P$, όπου V_0 ο όγκος υπό μηδενική πίεση και C η χωρητικότητα του αγωγού
- Μοντέλο αγωγού με χωρητικότητα: άκαμπτος αγωγός ο οποίος συνδέεται με ελαστικό μπαλόνι που προσομοιώνει την χωρητικότητα: λόγω ελαστικότητας:



- Ροή μέσω άκαμπτου αγωγού: $q_r = \Delta p / R = (p_1 - p_0) / R$
- Ροή μέσω χωρητικότητας: $q_c = C d(\Delta p) / dt$
- Ολική ροή: $q = q_r + q_c$.

- Περίπτωση 1: Σταθερή πίεση: $\Delta p = \Delta p_0 \Rightarrow q_r = \frac{\Delta p_0}{R}, q_c = 0$

- Περίπτωση 2: Πίεση γραμμικά αυξανόμενη:

$$\Delta p(t) = \frac{\Delta p_0}{T} t \Rightarrow \begin{cases} q_r(t) = \frac{\Delta p_0}{R} \frac{t}{T} \\ q_c(t) = C \frac{\Delta p_0}{T} \end{cases}$$

- Περίπτωση 3: Ημιτονοειδές κύμα πίεσης: $\Delta p(t) = \sin \omega t \Rightarrow \begin{cases} q_r(t) = \frac{1}{R} \frac{t}{T} \sin \omega t \\ q_c(t) = C \omega \cos \omega t \end{cases}$

- Βάσει της προηγούμενης σχέσης, παρατηρούμε:
 - Η ροή διαμέσου του άκαμπτου αγωγού ακολουθεί την Δp .
 - Η ροή διαμέσου του ελαστικού αγωγού αγωγού (μπαλονιού) αυξάνει όσο αυξάνει η χωρητικότητα,
 - Σχετικά με την $q_c(t)$:
 - Ας ορίσουμε ως εμπέδηση Z την φαντασική ποσότητα $1/(j\omega C) = -1/(\omega C)$
 - Η ροή διαμέσου της χωρητικότητας μπορεί να γραφεί ως η πίεση διαιρεμένη με το μέτρο της Z και με καθυστέρηση φάσης ίση με τη φάση ϕ της Z (η φάση ϕ είναι ίση με $-\pi/2$ αφού η Z είναι αρνητική φαντασική ποσότητα και έτσι το $\cos \rightarrow \sin$).

Διάδοση ελαστικού κύματος κατά μήκος του αγωγού

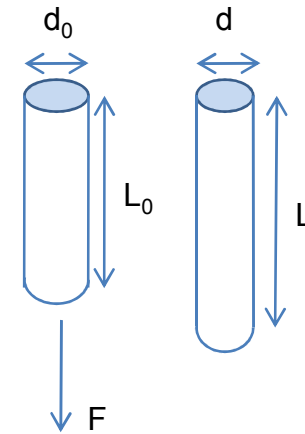
- Ενας αγωγός που έχει ελαστικότητα \rightarrow χωρητικότητα διαφέρει από έναν άκαμπτο αγωγό διότι η αλλαγή της πίεσης δεν διαδίδεται στιγμιαία αλλά δημιουργεί κύμα ελαστικότητας στα τοιχώματα, το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του αγωγού.



- Καθώς το ελαστικό κύμα πλησιάζει ένα σημείο του αγωγού, επιταχύνει τα μόρια του ρευστού κατά την κατεύθυνση της διάδοσής του και καθώς απομακρύνεται, τα επιβραδύνει.

Ελαστικές ιδιότητες των υλικών: Young's modulus of elasticity

- **Stress**=Τάση/εμβαδό διατομής, μονάδα ίδια με αυτή της πίεσης (N/m^2)
- **Strain** (παραμόρφωση)=(μεταβολή μήκους)/(αρχικό μήκος) (αδιάστατο)
- *Υπόλοιπο Young*: $E = \text{Stress} / \text{strain}$
- Transverse strain: (εγκάρσια παραμόρφωση)=(μεταβολή διαμέτρου)/(αρχική διάμετρο) (αδιάστατο)
- Ο λόγος **Strain** / Transverse strain ονομάζεται πηλίκο Poisson.
- Για όλα τα βιολογικά υλικά, η γραφική παράσταση $\text{Stress} = f(\text{strain})$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.



- Ταχύτητα διάδοσης κύματος στο τοίχωμα των αρτηριών

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}}$$

- ρ : πυκνότητα ρευστού, d : διάμετρος αγωγού, h : πάχος αγωγού
- Για αρτηρίες, $E=1000 \text{ dynes/cm}^2$, $h/d=0.1$, $\rho=1\text{gr/cm}^3 \rightarrow c=1000 \text{ cm/sec}$.
- Ιξωδοελαστικά υλικά (viscoelastic materials)

Υπολογισμός της χωρητικότητας C των αγγείων

- Εστω αγγείο όπως στο σχήμα με μήκος L , ακτίνα r και πάχος w , με διαφορά πίεσης εσωτερικά – εξωτερικά ίση με P (transmural).
- Θυμίζουμε τα μεγέθη που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει:
 - Stress= Δύναμη/εμβαδό διατομής (N/m^2) = T/w
 - Strain (παραμόρφωση)=(μεταβολή μήκους)/(αρχικό μήκος) (αδιάστατο) = $d(2\pi r)/(2\pi r) = dr/r$.
 - Υπόλοιπο Young (Young's modulus): $E=\text{Stress}/\text{strain}$
- Η χωρητικότητα του C υπολογίζεται ως εξής:

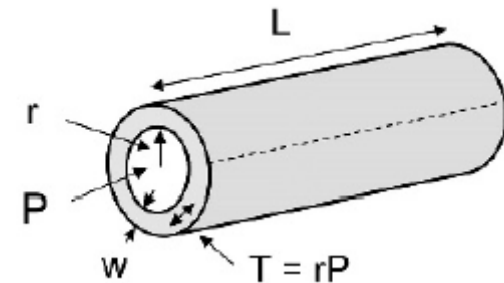
$$\text{Σχέση stress-strain για αγγείο: } \sigma = E\varepsilon \Rightarrow \frac{dr}{r_0} = \frac{1}{E} \frac{T}{w} = \frac{r_0 P}{wE}$$

$$V = \pi r^2 L \Rightarrow dV = 2\pi r L dr = 2\pi r^2 L \frac{dr}{r} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{dV}{2\pi r^2 L}$$

$$\text{Ορισμός ελαστικότητας: } V(P) = V_0 + CP$$

$$V(P) = V_0 \left(1 + \frac{dV}{V_0} \right) = V_0 \left(1 + 2 \frac{r_0 P}{wE} \right) = V_0 + \pi r_0^2 L 2 \frac{r_0 P}{wE}$$

$$C = \pi r_0^2 L 2 \frac{r_0}{wE} = \frac{2\pi r_0^3 L}{wE}$$



- Θυμίζουμε ότι στα ηλεκτρικά κυκλώματα, $C = (\text{φορτίο στον πυκνωτή}) / (\text{τάση στα άκρα του πυκνωτή}) = Q/V$
- $1 \text{ farad} = 1 \text{ Cb/Volt}$
- Ενέργεια για α μεταφερθεί στοιχειώδες φορτίο dQ από την μία πλάκα του πυκνωτή στην άλλη $dW = V dQ = (Q/C)dQ$. Ολοκληρώνοντας υπολογίζουμε την ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή $= (1/2)CV^2$.
- Αν A και d το εμβαδό και η απόσταση των πλακών του πυκνωτή, τότε $C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$, όπου διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_r = 1$, ηλεκτρική σταθερά $\epsilon_0 \approx 8.854187817... \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$.
- Λόγω της μικρής τιμής της ϵ_0 η μονάδα farad είναι πολύ μεγάλη για πρακτικές εφαρμογές.

Αρχή Poiseuille για αγγεία με χωρητικότητα C

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{2}{C'} \frac{dr}{dx}$$

$$\text{Poiseuille} \Rightarrow \Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} Q \Rightarrow \frac{\Delta P}{L} = \frac{8\eta}{\pi r^4} Q \Rightarrow \frac{dP}{dx} = -\frac{8\eta}{\pi r^4} Q$$

$$\text{Αντικαθιστώντας στην παραπάνω: } \frac{2}{C'} \frac{dr}{dx} = \frac{8\eta}{\pi r^4} Q \Rightarrow r^4 dr = -\frac{4\eta}{\pi} C' Q dx$$

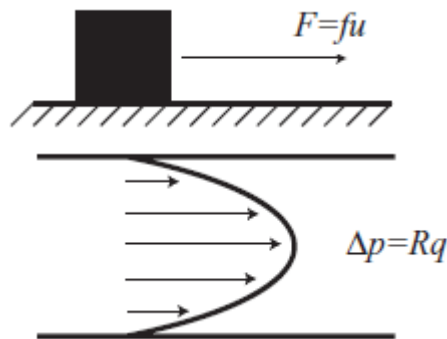
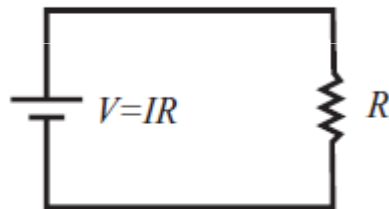
$$\text{Ολοκληρώνοντας από } x=0 \text{ } x=L \text{ την παραπάνω} \Rightarrow r_{x=L}^5 - r_{x=0}^5 = -\frac{20\eta}{\pi} C' Q dx$$

$$\text{Εφαρμόζοντας ότι } r_{x=x_0} = r_0 + \frac{C'}{2} P(x=x_0) \text{ και απλοποιώντας παίρνουμε: } Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \Delta P \left(1 - \frac{C'}{r_d} \Delta P \right)$$

- Η τελευταία σχέση αποτελεί την επέκταση της ροής Poiseuille για αγγεία με χωρητικότητα. Προφανώς, όταν $C=0$ καταλήγουμε στην έκφραση για ροή μόνο με αντίσταση.
- Όταν $C>0 \rightarrow Q>$ ροή μόνο με αντίσταση.

Αντίσταση: αναλογίες ηλεκτρικού, μηχανικού, ρευστομηχανικού συστήματος

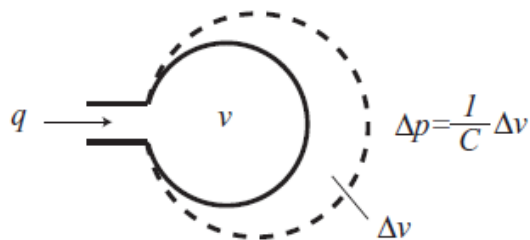
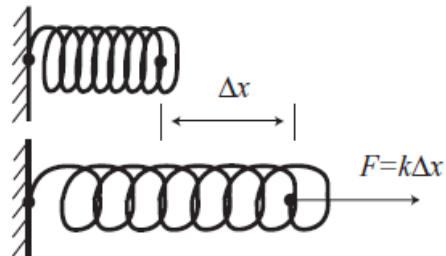
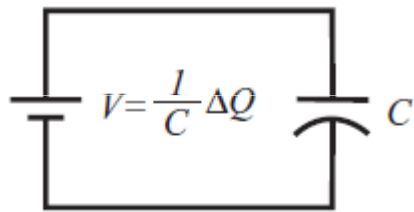
- Η αντίσταση ενός αγωγού μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν
 - Στρωτή ροή υγρού με ιξώδες,
 - Ωμική αντίσταση
 - Σώμα μάζας m που κινείται υπό την επίδραση δύναμης και τριβής ολίσθησης



Ανάλογο σύστημα	Ισοδυναμία μεγεθών		
Ηλεκτρικό	Διαφορά δυναμικού	Ένταση ρεύματος	Ηλεκτρική αντίσταση
Μηχανικό	Δύναμη	Ταχύτητα	Τριβή ολίσθησης
Ρευστομηχανικό	Διαφορά πίεσης	Ροή	Ιξώδες

Χωρητικότητα: αναλογίες ηλεκτρικού, μηχανικού, ρευστομηχανικού συστήματος

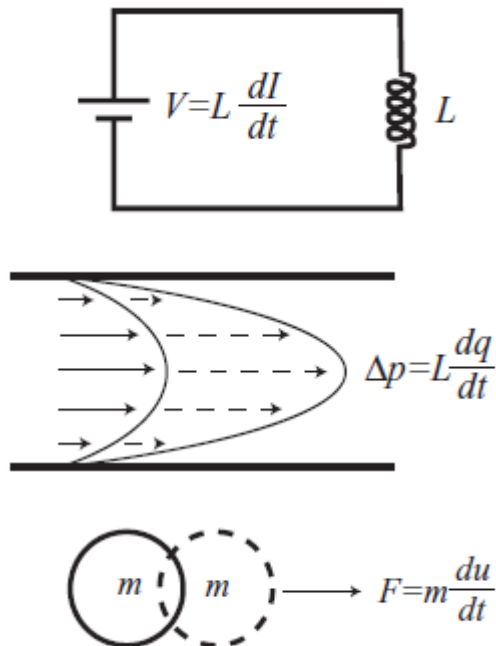
- Η χωρητικότητα ενός αγωγού μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν
 - ελαστικό μπαλόνι που συλλέγει όγκο υγρού (=ολοκλήρωμα ροής),
 - πυκνωτή που συλλέγει φορτίο (=ολοκλήρωμα έντασης
 - Ελατήριο που συλλέγει ενέργεια (ολοκλήρωμα δύναμης*μετατόπιση)



Ανάλογο σύστημα	Ισοδυναμία μεγεθών		
Ηλεκτρικό	Διαφορά δυναμικού	Φορτίο	Ηλεκτρική χωρητικότητα
Ρευστομηχανικό	Δύναμη	Μετατόπιση	Σταθερά ελαστικότητας
Μηχανικό	Διαφορά πίεσης	Ογκος	Ελαστικότητα

Επαγωγή: αναλογίες ηλεκτρικού, μηχανικού, ρευστομηχανικού συστήματος

- Η επαγωγή ενός αγωγού μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν
 - Μάζα που επιταχύνεται υπό την επίδραση δύναμης (=ολοκλήρωμα δύναμης x μετατόπιση),
 - πηνίο που προκαλεί πτώση τάσης λόγω μεταβολής της έντασης
 - Ελατήριο που συλλέγει ενέργεια (ολοκλήρωμα δύναμης*μετατόπιση)



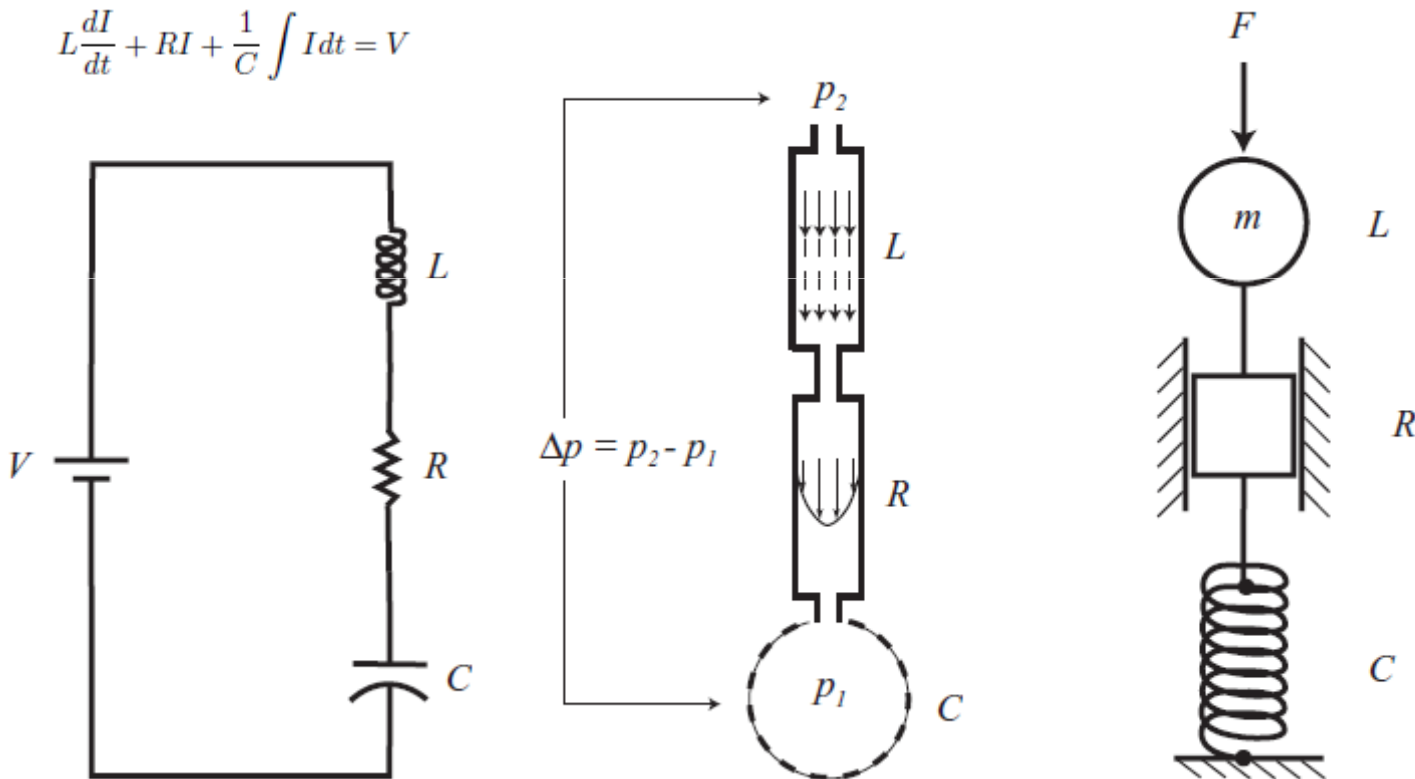
Ανάλογο σύστημα	Ισοδυναμία μεγεθών		
Ηλεκτρικό	Διαφορά δυναμικού	Μεταβολή έντασης ρεύματος	Αυτεπαγωγή
Ρευστομηχανικό	Δύναμη	Επιτάχυνση	Αδράνεια
Μηχανικό	Διαφορά πίεσης	Μεταβολή ροής	Μάζα ρευστού

Πίνακας σχέσεων βάσει αναλογιών συστημάτων

	Μέγεθος		
Σύστημα	Επαγωγή L	Αντίσταση R	Χωρητικότητα L
Ηλεκτρικό	$V = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$	$V = RI = L \frac{dq}{dt}$	$V = \frac{1}{C} \int Idt = \frac{1}{C} (q(t) - q(t_0))$
Μηχανικό	$V = m \frac{du}{dt} = L \frac{d^2x}{dt^2}$	$F = fu = f \frac{dx}{dt}$	$V = k \int udt = k (x(t) - x(t_0))$
Ρευστομηχανικό	$\Delta p = L \frac{dq}{dt} = L \frac{d^2V}{dt^2}$	$\Delta p = Rq = R \frac{dV}{dt}$	$\Delta p = \frac{1}{C} \int qdt = \frac{1}{C} (V(t) - V(t_0))$

Αναλογίες μεταξύ συστημάτων με αντίσταση, επαγωγή και χωρητικότητα σε σειρά

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = V$$



Υπολογισμός της ροής για αγωγό με αντίσταση, επαγωγή και χωρητικότητα σε σειρά

$$L \frac{dq}{dt} + Rq + \frac{1}{C} \int q dt = \Delta p \Rightarrow \frac{L}{R} \frac{dq}{dt} + q + \frac{1}{RC} \int q dt = \frac{1}{R} \Delta p \Rightarrow t_L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{dq}{dt} + \frac{1}{t_C} q = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} (\Delta p)$$

Ομογενής λύση της ΔΕ (μεταβατική κατάσταση):

$$\text{Χαρακτηριστικό πολυώνυμο (ΧΠ): } t_L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{dq}{dt} + \frac{1}{t_C} q = 0$$

Περίπτωση 1, Ισχυρή απόσβεση: $1 - 4 \frac{t_L}{t_C} > 0 \Rightarrow 4t_L < t_C \Rightarrow q(t) = Ae^{a_1 t} + Be^{a_2 t}$

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2t_L} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{t_L}{t_C}} \right)$$

Αρχικές συνθήκες: $q(0), q'(0)$

Περίπτωση 2, Χαμηλή απόσβεση: $1 - 4\frac{t_L}{t_C} < 0 \Rightarrow 4t_L > t_C \Rightarrow$

$$a = -\frac{1}{2t_L}, b = \frac{1}{2t_L} \sqrt{4\frac{t_L}{t_C} - 1}, a_{1,2} = a \pm jb$$

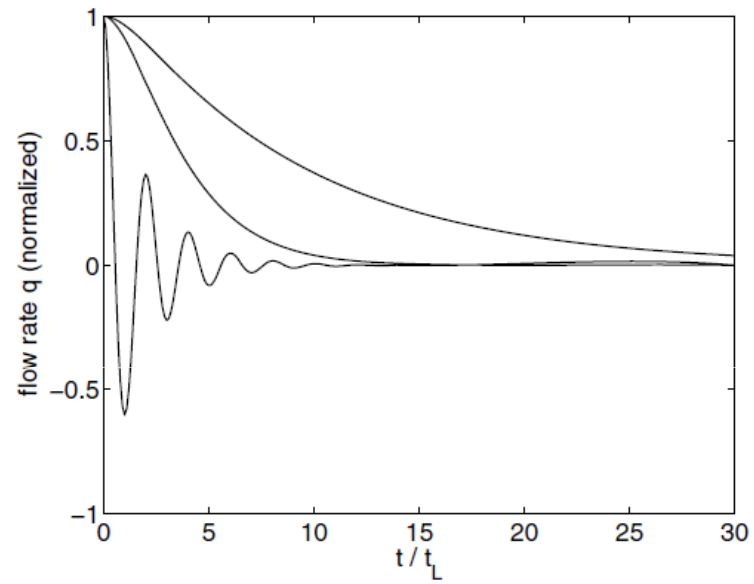
$$q(t) = e^{at} (A \cos(bt) + B \sin(bt))$$

Είναι προφανές ότι $a < 0$ άρα το σύστημα έχει απόσβεση (η ομογενής λύση τείνει στο 0 όσο περνά ο χρόνος).

Σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε μη ευσταθές σύστημα (όχι δυνατό σε RLC κύκλωμα).

Περίπτωση 3, Οριακή απόσβεση: $4t_L = t_C \Rightarrow a_1 = a_2 = \frac{-1}{2t_L} \Rightarrow q(t) = (A + tB)e^{at}$,

$$A = q(0), B = -aq(0) + q'(0)$$



- (α) $4t_L < t_C \rightarrow$ ισχυρή απόσβεση
- (β) $4t_L = t_C \rightarrow$ οριακή απόσβεση
- (γ) $4t_L > t_C \rightarrow$ χαμηλή απόσβεση

- Εστω η περίπτωση που στην προηγούμενη εξίσωση $\Delta p = \Delta p_0 \cos \omega t$

$$t_L \ddot{q} + \dot{q} + \frac{q}{t_C} = -\Delta p_0 \omega \frac{\sin \omega t}{R}$$

Πραγματικές ρίζες του ΧΠ ($4t_L < t_C$): μερική λύση :

$$q_p(t) = K_c \cos \omega t + K_s \sin \omega t$$

Αντικαθιστώντας την μερική λύση στην ΔΕ και διαχωρίζοντας τα ημίτονα και συνιμήτονα:

$$k_c = \frac{\Delta p_0 R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, k_s = \frac{\Delta p_0 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Η λύση της ΔΕ είναι το άθροισμα της ομογενούς και της μερικής λύσης

- Εστω η περίπτωση που στην προηγούμενη εξίσωση $\Delta p = \Delta p_0 e^{j\omega t}$.

$$t_L \ddot{q} + \dot{q} + \frac{q}{t_C} = \Delta p_0 j \omega e^{j\omega t}$$

$$4t_L < t_C, \text{ μερική λύση: } q_p(t) = K e^{j\omega t}$$

Αντικαθιστώντας την μερική λύση στην ΔΕ παίρνουμε: $K = \frac{\Delta p_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$

Εστω κρίσιμη απόσβεση: $4t_L = t_C \Rightarrow q_h(t) = (A + Bt)e^{-\frac{1}{2t_L}t}$

Ο παρονομαστής είναι μιγαδική ποσότητα που θα ονομάζουμε εμπέδηση.

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) = (A + Bt)e^{-\frac{1}{2t_L}t} + K e^{j\omega t}$$

A, B υπολογίζονται βάσει οριακών συνθηκών:

$$A = q(0) - K$$

$$B = \dot{q}(0) + A \frac{1}{2t_L} - j\omega K$$

- Προφανώς, όταν $t \gg t_L \rightarrow$ επικρατεί η $q_p(t)$ (μόνιμη κατάσταση).
- Για κυλινδρικό αγωγό ακτίνας a , το t_L υπολογίζεται με χρήση της έκφρασης για αντίσταση και επαγωγή:

$$t_L = \frac{L}{R} = \left(\frac{8\mu l}{\pi a^4} \right)^{-1} \left(\frac{\rho l}{\pi a^2} \right) = \frac{\rho a^2}{8\mu}$$

$$\text{Αν } \rho = 1 \text{g.cm}^{-3}, \mu = 0.04 \text{g}(\text{cm.sec})^{-1} \Rightarrow t_L = \frac{a^2}{0.32} (\text{sec})$$

Reactance - Impedance

- Reactance – Impedance ορίζονται μόνο σε σχέση με την μόνιμη κατάσταση και όταν Δp είναι τριγωνομετρική συνάρτηση.
- Χρησιμοποιώντας την μερική λύση όταν $\Delta p = \Delta p_0 \cos \omega t$

$$q(t) = \Delta p_0 \frac{R \cos \omega t + S \sin \omega t}{R^2 + S^2} = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{R^2 + S^2}} \cos(\omega t - \theta),$$

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \tan \theta = \frac{S}{R}$$

- Ονομάζουμε την ποσότητα S , reactance.
- Όταν S μικραίνει $\rightarrow \theta < 0$, το πλάτος μεγαλώνει
- Όταν S μεγαλώνει $\rightarrow \theta > 0$, το πλάτος μικραίνει
- Η συχνότητα για την οποία $S=0$ ονομάζεται συχνότητα συντονισμού $\rightarrow \theta=0$,
- $S=0 \rightarrow C=1/(\omega^2 L) \rightarrow q(t), p(t)$ σε φάση και πλάτος ίσο με το πλάτος όταν υπάρχει μόνο R .

Εμπέδηση – Impedance Z

- Χρησιμοποιώντας την μερική λύση όταν $\Delta p = \Delta p_0 \cos \omega t$, επιθυμούμε να την φέρουμε στην μορφή $q(t) = p(t)/Z$

$$t_L \ddot{q} + \dot{q} + \frac{q}{t_C} = \Delta p_0 j \omega e^{j\omega t} \Rightarrow q_p(t) = \frac{\Delta p_0}{R + jS} e^{j\omega t}$$

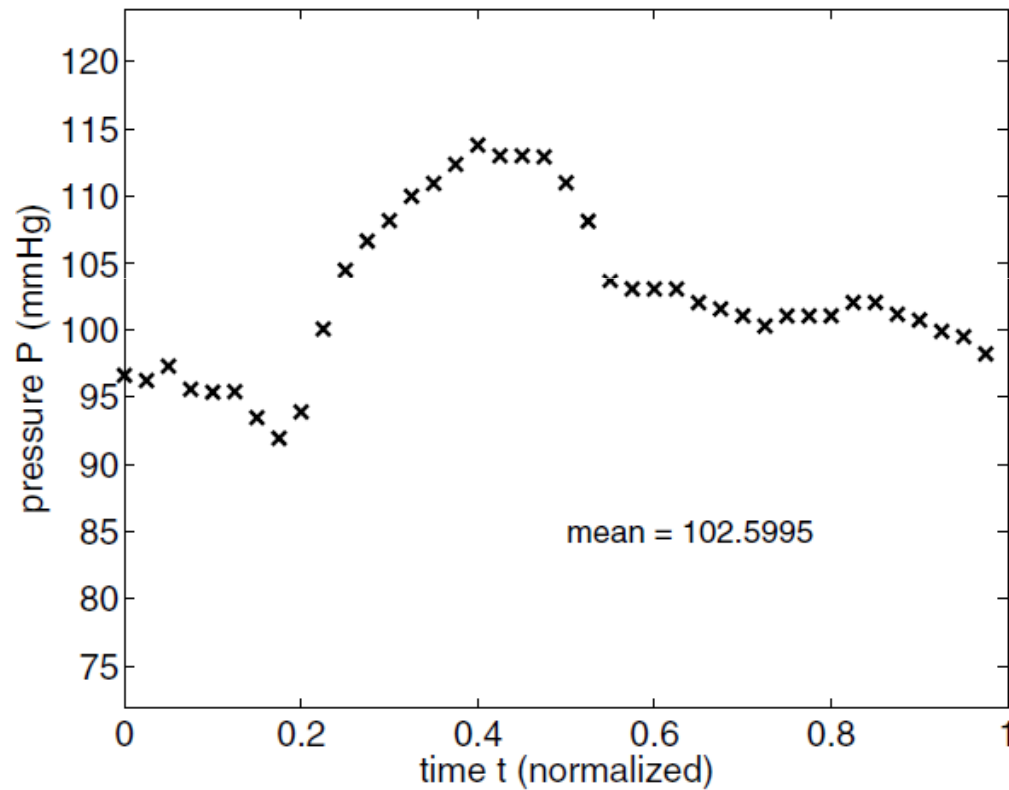
$$\text{Εμπέδηση: } Z = R + jS$$

- Συνεπώς:
 - Z: μιγαδική ποσότητα
 - Μέτρο (Z): επηρεάζει το πλάτος του $q_p(t)$
 - Φάση (Z): επηρεάζει τη φάση του $q_p(t)$

Resistance	R	
Inductance	$j\omega L$	
Capacitance	$1/j\omega C$	
Reactance	$j(\omega L - 1/\omega C)$	

$P(t)$: πραγματικά δεδομένα πίεσης

- Μέτρηση της πίεσης στην είσοδο της αορτής.



- Κάθε συνεχής περιοδική συνάρτηση $p(t)$ με περίοδο T μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα άπειρου αριθμού ημιτόνων και συνημιτόνων:

$$\text{Συντελεστές συνημιτόνων: } A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt, A_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt,$$

$$\text{Συντελεστές ημιτόνων: } B_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt, n = 1, \dots, N-1$$

Ανακατασκευή του σήματος με αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$p(t) = \sum_{n=0}^N A_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + \sum_{n=1}^N B_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

$$\text{Αν } M_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \tan \varphi_n = \frac{B_n}{A_n} \Rightarrow$$

$$p(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N M_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + \varphi_n\right)$$

Προσδιορισμός της ροής $q(t)$

- Αν θεωρήσουμε ότι η $P(t)$ είναι η πίεση που μετράμε στην αορτή (είσοδο ενός επιμέρους αγγείου, όπως της στεφανιαίας κυκλοφορίας, τότε ζητούμενο είναι η ροή σαν συνάρτηση του χρόνου $q(t)$. Αν θεωρήσουμε ότι η πίεση στα τριχοειδή είναι πολύ μικρή, τότε η $P(t) = \Delta P(t)$.
- Όπως είδαμε, όταν ο αγωγός έχει χωρητικότητα, επαγωγή και αντίσταση, η ροή και η ΔP συνδέονται με την σχέση ροή=Πίεση/Εμπέδηση, $q(t)=\Delta P(t)/Z$ (μόνο όταν $\Delta P(t)$ είναι ημιτονοειδές).
- Αλλά, η εμπέδηση είναι συνάρτηση της συχνότητας ω : $Z=Z(\omega)$.
- Σύμφωνα με τα προηγούμενα για κυλινδρικό αγωγό ισχύουν με μήκος l , πάχος w ακτίνα a και υπόλοιπο Young E :

$$\text{Αντίσταση: } R = \frac{8nl}{\pi a^4} \quad \text{Επαγωγή: } L = \frac{\rho l}{\pi a^2}$$

$$\text{Ελαστικότητα: } C = \frac{2\pi a^3 l}{wE}$$

- Απλούστερη περίπτωση: αγωγός με μόνο R $\rightarrow q(t) = \Delta p(t)/R$
- Υπολογισμός ροής με εμπέδηση Z: χρησιμοποιούμε $q(t) = \Delta P(t)/Z$, για κάθε μία από τις αρμονικές του $p(t)$ και αθροίζουμε το αποτέλεσμα.
- Ειδικά για την μέση πίεση που δημιουργεί μία μέση ροή, διαιρούμε με την αντίσταση R και όχι με την εμπέδηση Z.

$$p(t) = \text{ημιτονοειδές} \Rightarrow q(t) = \frac{p(t)}{Z(\omega)} \Rightarrow q_R(t) + jq_I(t) = \frac{p_R(t) + jp_I(t)}{Z_R + jZ_I}$$

$$p_n(t) = M_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T} + \varphi_n\right) + jM_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T} + \varphi_n\right) = M_n e^{j\left(\frac{2\pi nt}{T} + \varphi_n\right)}, n = 1, 2, \dots, N$$

$$p(t) = \bar{p} + \sum_{n=1}^N p_n(t)$$

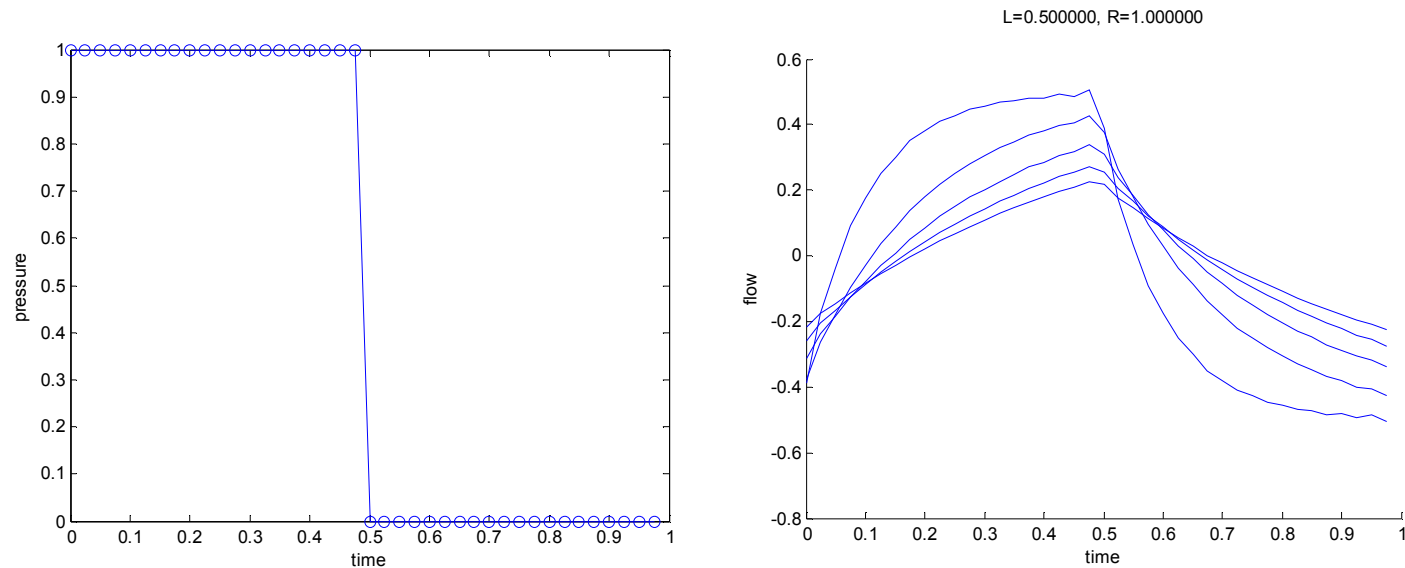
$$\bar{q}(t) = \frac{\bar{p}(t)}{Z}, q_n(t) = \frac{p_n(t)}{Z} \Rightarrow q(t) = \bar{q} + \sum_{n=1}^N q_n(t)$$

Υπολογισμός της $q(t)$ σε αγωγό με επαγωγή και αντίσταση σε σειρά

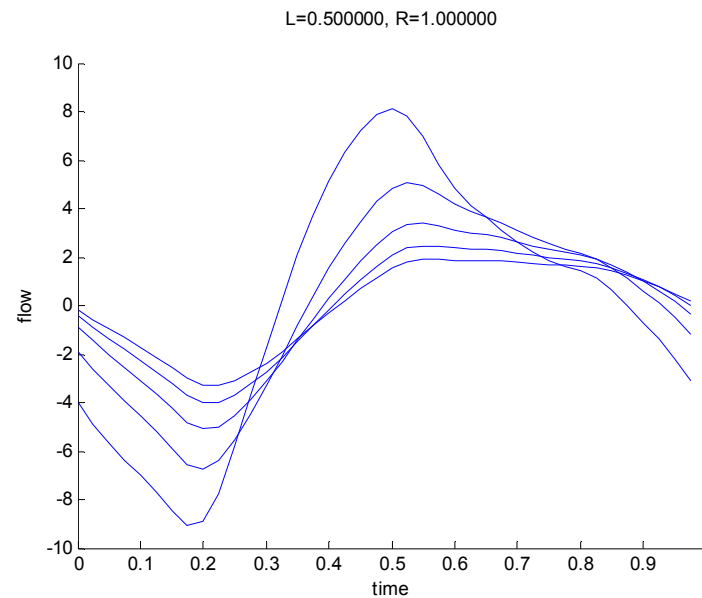
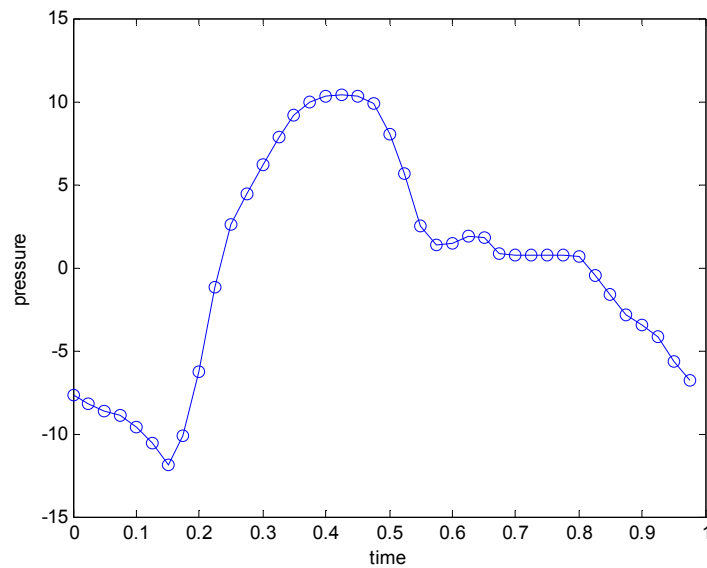
- Υπολογίζουμε την μιγαδική εμπέδηση η οποία είναι συνάρτηση της συχνότητας ω_n για κάθε αρμονική n του FT του κύματος της πίεσης, $Z=R+j\omega_n L$.
- Θυμίζουμε ότι για τον υπολογισμό της ροής μας ενδιαφέρει η μόνιμη κατάσταση (μερική λύση – particular / partial solution) της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης.

$$Z_n = R + j\omega_n L, \omega_n = 2\pi n$$
$$q_n(t) = \frac{RM_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T} - \varphi_n\right) + \omega_n LM_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T} - \varphi_n\right)}{R^2 + \omega_n^2 L^2}$$

- Κύμα πίεσης με μορφή τετραγωνικού παλμού και η παραγόμενη ροή, διαμέσου αγωγού με R,L με $\tau_L=0.1, 0.2, \dots, 0.5$. Στο κύμα ροής πρέπει να προστεθεί και η σταθερή συνιστώσα ροής που παράγεται από τον DC όρο του FT της πίεσης ίση με A_0/R .



- Κύμα πίεσης με πραγματικές τιμές και η παραγόμενη ροή, διαμέσου αγωγού με R,L με $\tau_L=0.1, 0.2, \dots, 0.5$. Στο κύμα ροής πρέπει να προστεθεί και η σταθερή συνιστώσα ροής που παράγεται από τον DC όρο του FT της πίεσης ίση με A_0/R .



Υπολογισμός της $q(t)$ σε αγωγό με χωρητικότητα C και αντίσταση R σε σειρά

Ορισμός μιγαδικής εμπέδησης:

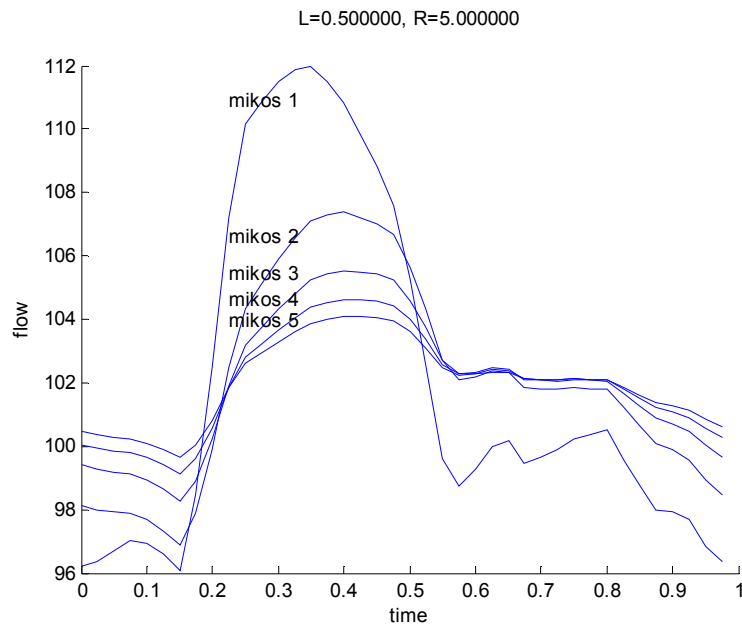
$$Z_n = R + \frac{1}{j\omega_n C} = R - \frac{j}{\omega_n C}, \omega_n = 2\pi n, n = 1, \dots, N$$

Υπολογισμός ροής με αντικατάσταση της εμπέδησης
στην μερική λύση της διαφ. εξ. RC σε σειρά:

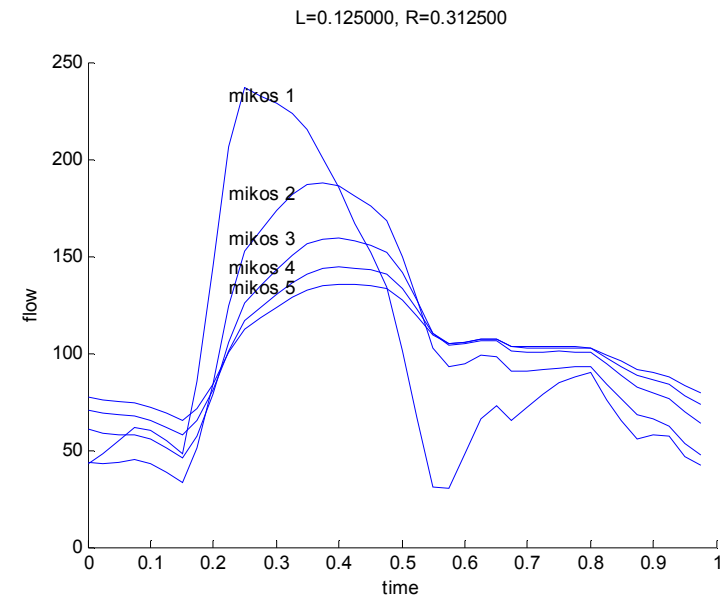
$$q_n(t) = \frac{1}{R^2 + \frac{1}{\omega_n^2 C^2}} \left(R(2\pi n C)^2 M_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} - \varphi_n\right) + \omega_n C M_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} - \varphi_n\right) \right)$$

- Θυμίζουμε ότι για τον υπολογισμό της ροής μας ενδιαφέρει η μόνιμη κατάσταση (μερική λύση – particular / partial solution) της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης.

- Κύμα πίεσης με πραγματικές τιμές και η παραγόμενη ροή, διαμέσου αγωγού με R,C με μήκος 1, 2, ..., 5 cm και $C=0.1 R$ ανά μονάδα μήκους. Στο κύμα ροής έχει προστεθεί και η σταθερή συνιστώσα ροής που παράγεται από τον DC όρο του FT της πίεσης ίση με $A0/R$.



Ακτίνα = 1cm



Ακτίνα = 2cm

Υπολογισμός της $q(t)$ με C, R και L παράλληλα

Ορισμός μιγαδικής εμπέδησης: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C$

$$Z_n = \frac{R - iR^2 \left(\omega_n C - \frac{1}{\omega_n L} \right)}{1 + R^2 \left(\omega_n C - \frac{1}{\omega_n L} \right)^2}, \omega_n = 2\pi n, n = 1, \dots, N$$

Υπολογισμός ροής με αντικατάσταση της εμπέδησης $q_n(t) = q_0 + \operatorname{Re} \left(\frac{P_n}{Z_n} \right)$:

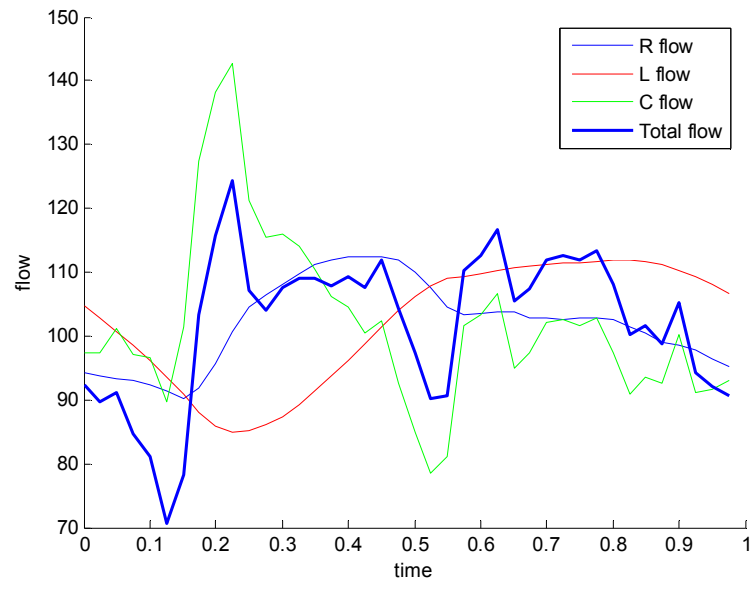
$$q_{nR}(t) = M_n \cos(\omega_n - \varphi_n) \frac{1}{R}$$

$$q_{nL}(t) = M_n \sin(\omega_n - \varphi_n) \frac{1}{\omega_n t_L}$$

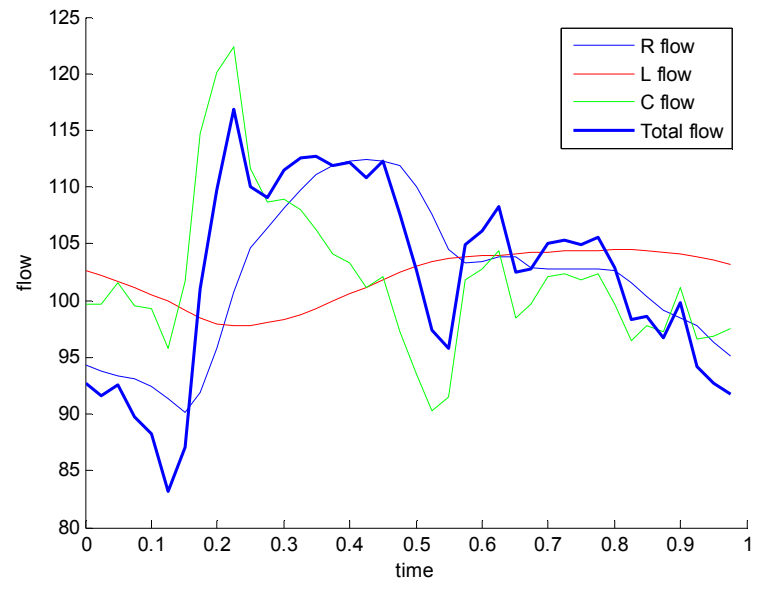
$$q_{nC}(t) = -\omega_n t_C M_n \sin(\omega_n - \varphi_n)$$

$$q_n(t) = q_{nR}(t) + q_{nL}(t) + q_{nC}(t)$$

L=0.100000, R=1.000000



L=0.025000, R=0.062500



Εφαρμογή στο ανθρώπινο κυκλοφοριακό σύστημα

vessel	diameter (mm)	length (mm)	wall thickness (μm)	pressure (mmHg)	total length (mm)	total surface area (mm^2)	total blood volume (mm^3)
aorta	25.0	400	1,500	100	400	31,400	200,000
large arteries	6.5	200	1,000	100	8,000	163,000	260,000
main artery branches	2.4	100	800	95	50,000	377,000	220,000
terminal artery branches	1.2	10	125	90	110,000	415,000	120,000
arterioles	0.1	2	20	60	9,000,000	2,800,000	70,000
capillaries	0.008	1	1	30	19,000,000,000	298,000,000	375,000
venules	0.15	2	2	20	20,000,000	9,400,000	355,000
terminal venules	1.5	10	40	15	110,000	518,000	190,000
main venous branches	5.0	100	500	15	50,000	785,000	1,590,000
large veins	14.0	200	800	10	8,000	352,000	1,290,000
vena cava ^a	30.0	400	1,200	5	400	37,700	280,000
heart chambers	–	–	–	120			450,000
					~19,000 km	312,900,000	5,400,000

Site		Ascending aorta	Descending aorta	Abdominal aorta	Femoral artery	Carotid artery	Arteriole	Capillary	Venule	Inferior vena cava	Main pulmonary artery			
Internal diameter d_i	cm	1.5 1.0-2.4	1.3 0.8-1.8	0.9 0.5-1.2	0.4 0.2-0.8	0.5 0.2-0.8	0.005 0.001-0.008	0.0006 0.0004-0.0008	0.004 0.001-0.0075	1.0 0.6-1.5	1.7 1.0-2.0			
Wall thickness h	cm			0.065 0.05-0.08	0.05 0.04-0.06	0.04 0.02-0.06	0.03 0.02-0.04	0.0001 0.0002	0.0002 0.01-0.02	0.015 0.01-0.02	0.02 0.01-0.03			
h/d_i				0.07 0.055-0.084	0.06 0.04-0.09	0.07 0.055-0.11	0.08 0.053-0.095		0.4 0.17	0.05 0.015	0.01 0.01			
Length	cm	5	20	15	10	15	0.15 10-20	0.06 0.1-0.2	0.15 0.1-0.2	30 20-40	3.5 3-4			
Approximate cross-sectional area	cm ²	2	1.3	0.6	0.2	0.2	2×10^{-5}	3×10^{-7}	2×10^{-5}	0.8	2.3			
Total vascular cross-sectional area at each level	cm ²	2	2	2	3	3	125	600	570	3.0	2.3			
Peak blood velocity	cm s ⁻¹	120 40-290	105 25-250	55 50-60	100 100-120		$\left\{ \begin{array}{l} 0.75 \\ 0.5-1.0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.07 \\ 0.02-0.17 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.35 \\ 0.2-0.5 \end{array} \right.$	25 15-40	70 15			
Mean blood velocity	cm s ⁻¹	20 10-40	20 10-40	15 8-20	10 10-15									6-28
Reynolds number (peak)		4500	3400	1250	1000					0.09	0.001	0.035	700	3000
α (heart rate 2 Hz)		13.2	11.5	8	3.5	4.4	0.04	0.005	0.035	8.8	15			
Calculated wave-speed c_0	cm s ⁻¹		580	770	840	850				100	350			
Measured wave-speed c	cm s ⁻¹		500	700	900	800				400	250			
Young's modulus E	Nm ⁻² $\times 10^5$		400-600	600-750	800-1030	600-1100				100-700	200-330			
			4.8 3-6	10 9-11	10 9-12	9 7-11				0.7 0.4-1.0	6 2-10			

(From C. G. Caro, T. J. Pedley, and W. A. Seed (1974). 'Mechanics of the circulation', Chapter 1 of *Cardiovascular physiology* (ed. A. C. Guyton). Medical and Technical Publishers, London.)

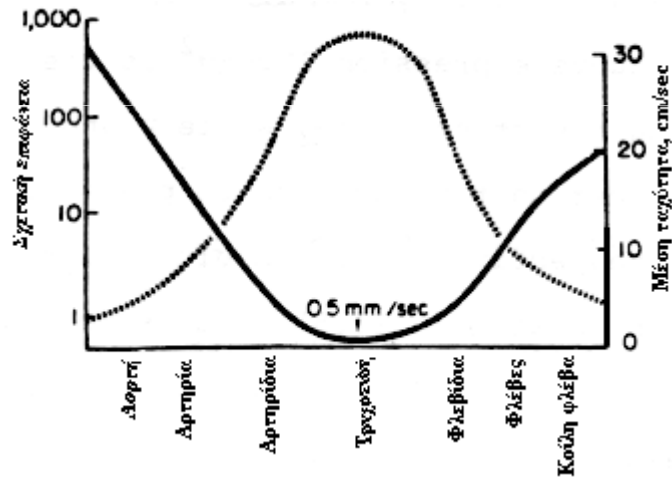
vessel	diameter (mm)	wall thickness, w (mm)	internal pressure, ΔP (mmHg)	wall tension, T (dyne/cm)	T/w (kPa)
aorta	24.0	3.0	100	160,000	53
large artery	8.0	1.0	97	52,000	52
medium artery	4.0	0.8	90	24,000	30
small artery	2.0	0.5	75	10,000	20
arteriole	0.3	0.02	60	1,200	60
capillary	0.008	0.001	30	16	16
venule	0.02	0.002	20	27	13
small vein	3.0	0.2	18	3,600	18
medium vein	5.0	0.5	15	5,000	10
large vein	15.0	0.8	10	10,000	12
vena cava	30.0	1.5	10	20,000	13

Υπολογισμός πτώσης πίεσης στα συστηματικά αγγεία

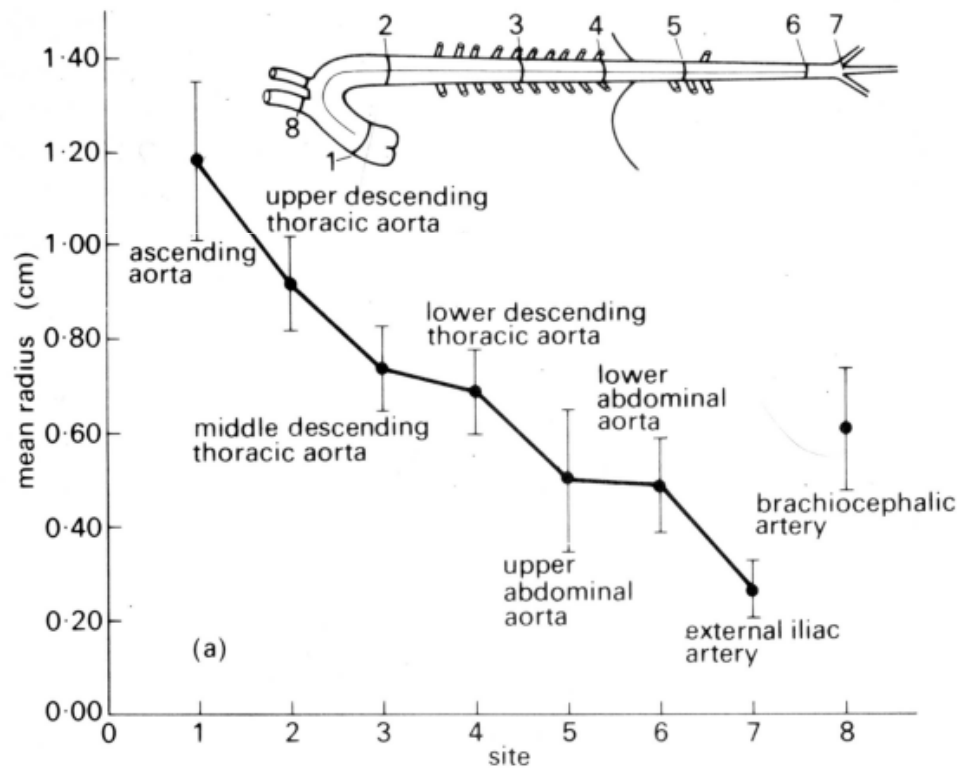
- Για τον υπολογισμό χρησιμοποιούμε δεδομένα για το μήκος, ακτίνα, πλήθος και συνολική επιφάνεια από τους σχετικούς πίνακες. Θεωρούμε μόνο αντίσταση αγγείων:
- Αορτή: $Q_0=80\text{cm}^3/\text{sec}$, $L=10\text{cm}$, $r=1.25\text{cm}$ $\rightarrow \Delta P=0.025$ mmHg
- Μεγάλες αρτηρίες: $N=200$, $Q= Q_0/N$, $L=75\text{cm}$, $r=0.2\text{cm}$ $\rightarrow \Delta P=1.4$ mmHg
- Μικρές αρτηρίες και αρτηριόλια: πλήθος $N=10^5$, $Q= Q_0/N$, $L=0.6\text{cm}$, $r=30\mu\text{m}$ $\rightarrow \Delta P=91$ mmHg
- Τριχοειδή: πλήθος $N=10^{10}$, $Q= Q_0/N$, $L= 0.2\text{cm}$, $r= 3.5\mu\text{m}$ $\rightarrow \Delta P=$ mmHg
- Παρατηρούμε ότι στην αορτή και τις μεγάλες αρτηρίες η πτώση πίεσης είναι πολύ μικρή. Αντίθετα στις μικρές αρτηρίες και αρτηριόλια η πτώση πίεσης είναι πολύ σημαντική.

Ροή Ασυμπίεστου Ρευστού

- Η μέση ταχύτητα στο αγγειακό δένδρο μεταβάλλεται αντίστροφα προς τη συνολική επιφάνεια

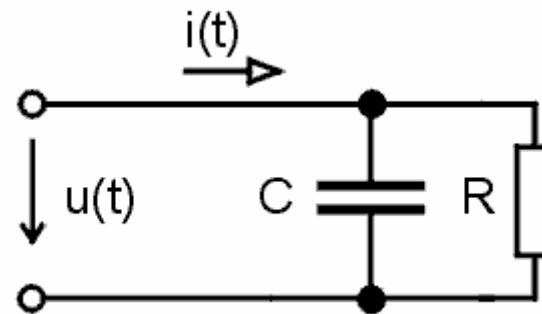


- Η μεταβολή της ακτίνας των μεγάλων αρτηριών



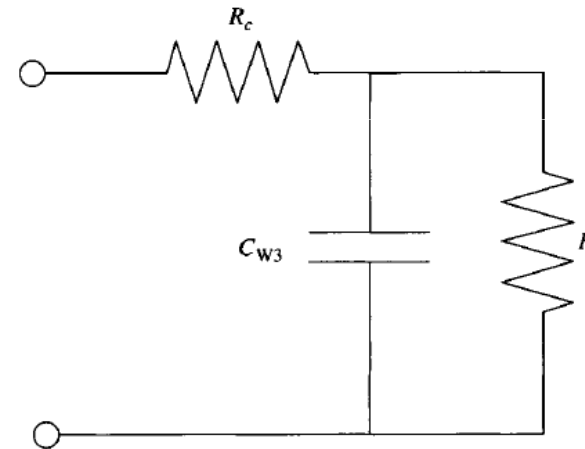
The windkessel model

- Το WK 2 στοιχείων (R, C παράλληλα), προτάθηκε το 1899 Otto Frank, ως κλειστό υδραυλικό σύστημα με αεροθύλακα (windkessel), ο οποίος εξομοιώνει την χωρητικότητα C των αγγείων.
- Resistor R: συνολική περιφερειακή αντίσταση των αγγείων
- Χωρητικότητα C: συστηματική και φλεβική κυκλοφορία



The windkessel model με 3 στοιχεία

- Το WK 2 στοιχείων (R , C παράλληλα), προτάθηκε το 1930 Otto F. Ranke, ως κλειστό υδραυλικό σύστημα με αεροθύλακα (windkessel), ο οποίος εξομοιώνει την χωρητικότητα C των αγγείων με προσθήκη μίας R που αντιστοιχεί στην αντίσταση της αορτής.



The windkessel model με 4 στοιχεία

- Το WK 2 στοιχείων (R, C παράλληλα), προτάθηκε το 1930 Otto F. Ranke, ως κλειστό υδραυλικό σύστημα με αεροθύλακα (windkessel), ο οποίος εξομοιώνει την χωρητικότητα C των αγγείων με προσθήκη μίας R που αντιστοιχεί στην αντίσταση της αορτής.

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I_c dt = I_2 R_2$$

$$\text{Kirchof για τον κύριο βρόγχο: } V_s - IR_1 - \frac{1}{C} \int_0^t I_c dt - \dot{I}L = 0 \Rightarrow \frac{dV_s}{dt} - R \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C} I_c - L \frac{d^2 I}{dt^2} = 0$$

$$\text{Υπολογισμός του } I_c : I_c = I - I_2 = I - \frac{1}{R_2} \left(V_s - IR_1 - L \frac{dI}{dt} \right)$$

$$\frac{dV_s}{dt} - R \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C} \left(I - \frac{1}{R_2} \left(V_s - IR_1 - L \frac{dI}{dt} \right) \right) - L \frac{d^2 I}{dt^2} = 0$$

$$LC \frac{d^2 I}{dt^2} + \left(R_1 C + \frac{L}{R_2} \right) \frac{dI}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) I = C \frac{dV_s}{dt} + \frac{1}{R_2} V_s$$

Παράδειγμα: υπολογίστε την αντίσταση αγγείου χωρίς ελαστικότητα για ροή αίματος σε 37⁰.

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} \Rightarrow R_0 = R(L = 1cm, r = 1cm) = \frac{8 \times 4 \times 10^{-3} N \text{ sec } m^{-2} \times 1cm}{\pi (1cm)^4} =$$

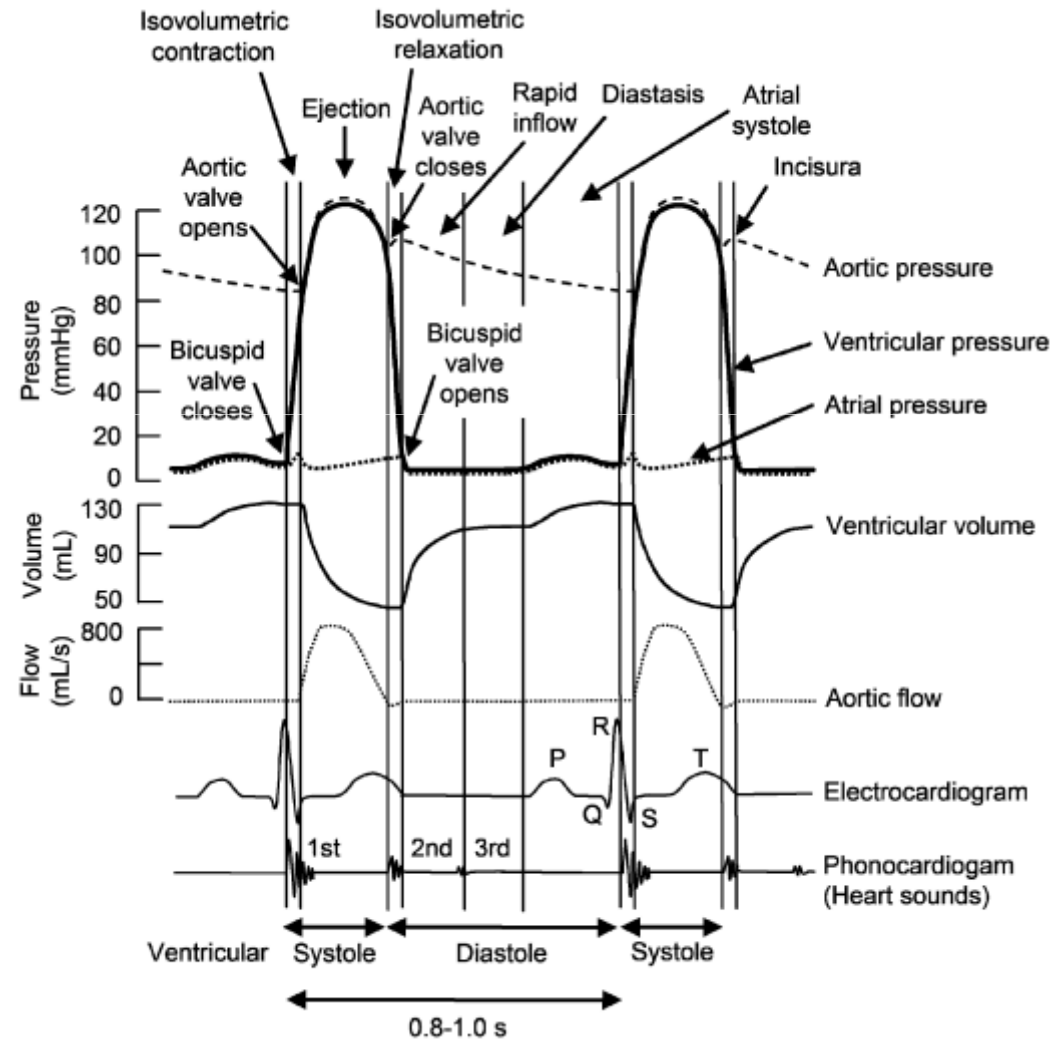
$$\frac{8 \times 4 \times 10^{-3} N \text{ sec } m^{-2} \times 1cm}{\pi (1cm)^4} = 7.7 \times 10^{-5} mmHg / (cm^3 \text{ sec}^{-1}) = 1PRU$$

1PRU = αντίσταση αγωγού με μήκος=διάμετρο=1 cm³ όταν ροή =1cm³ sec⁻¹

Παραγωγή του κύματος πίεσης στην αρχή της αορτής

- Όταν η πίεση στον Α κόλπο $>$ πίεση Α κοιλία η μητροειδής βαλβίδα ανοίγει και αίμα ρέει στην Α κοιλία.
- Εναρξη ισομετρικής συστολής Α κοιλίας: πολύ σύντομα η πίεση στην Α κοιλία γίνεται μεγαλύτερη από την πίεση στον Α κόλπο και η μητροειδής βαλβίδα κλείνει.
- Η ισομετρική συστολή της Α κοιλίας συνεχίζεται έως ότου η πίεση της να γίνει μεγαλύτερη από αυτή της αορτής. Τότε η αορτική βαλβίδα ανοίγει.
- Όσο η Αο Βαλβ είναι ανοικτή, πίεση Α κοιλίας = P_{ao} . Η Α κοιλία συνεχίζει την συστολή, έως ένα κλάσμα του όγκου του αίματος (=κλάσμα εξώθησης) της να ρεύσει στην αορτή (με ταυτόχρονη μείωση του όγκου της).
- Όταν η LV χαλαρώνει ισομετρικά, η Αο Βαλβ κλείνει και έτσι η πίεση στην αορτή διατηρείται, χωρίς να επιστρέφει το αίμα στην Α κοιλία.

Παραγωγή του κύματος πίεσης στην αρχή της αορτής



Ελαστικό μοντέλο της αριστερής κοιλίας της καρδιάς (LV)

- Η LV έχει ελαστικότητα η οποία είναι συνάρτηση της πίεσης $C_{LV} = C_{LV}(P_{LV})$.
- Εστω $C_s = C_{LV}(ES)$ και $C_d = C_{LV}(ED)$ η ελαστικότητα της LV κατά την συστολή και διαστολή αντίστοιχα. Τότε:

$$V_{ES} = V_{\min} + C_s P_a$$

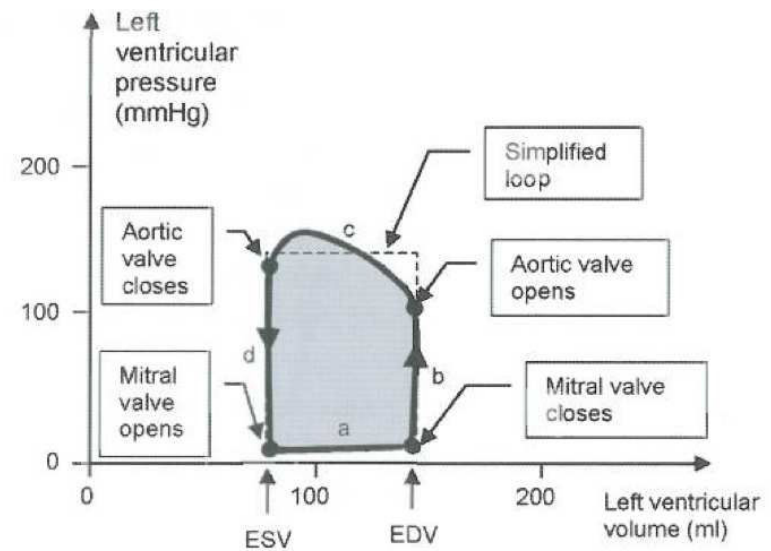
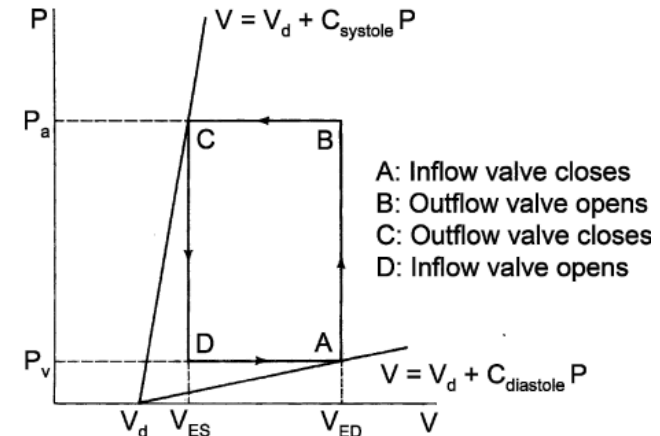
$$V_{ED} = V_{\max} + C_d P_v$$

P_a, P_v : αρτηριακή και φλεβική πίεση

$$V = V_0(t) + C(t)P$$

Εργο που παράγεται από την καρδιά κατά τον καρδιακό κύκλο:

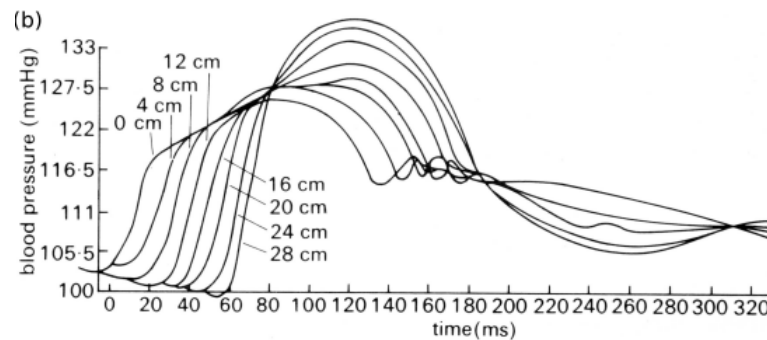
$$W = \oint pdV \approx \Delta P \Delta V = 1.44 \text{ Cal} = 1.68 \text{ J}$$



- Τυπικές τιμές
 - Σε σκύλο 20 kg: $C_s \sim 0.1 \text{ ml/mmHg}$, $CD \sim 4 \text{ ml/mmHg}$, $V_{\min} = V_{\max} = 5 \text{ ml}$
 - Σε άνθρωπο: $C_s \sim 0.4 \text{ ml/mmHg}$, $CD \sim 10 \text{ ml/mmHg}$, $V_{\min} = V_{\max} = 15 \text{ ml}$

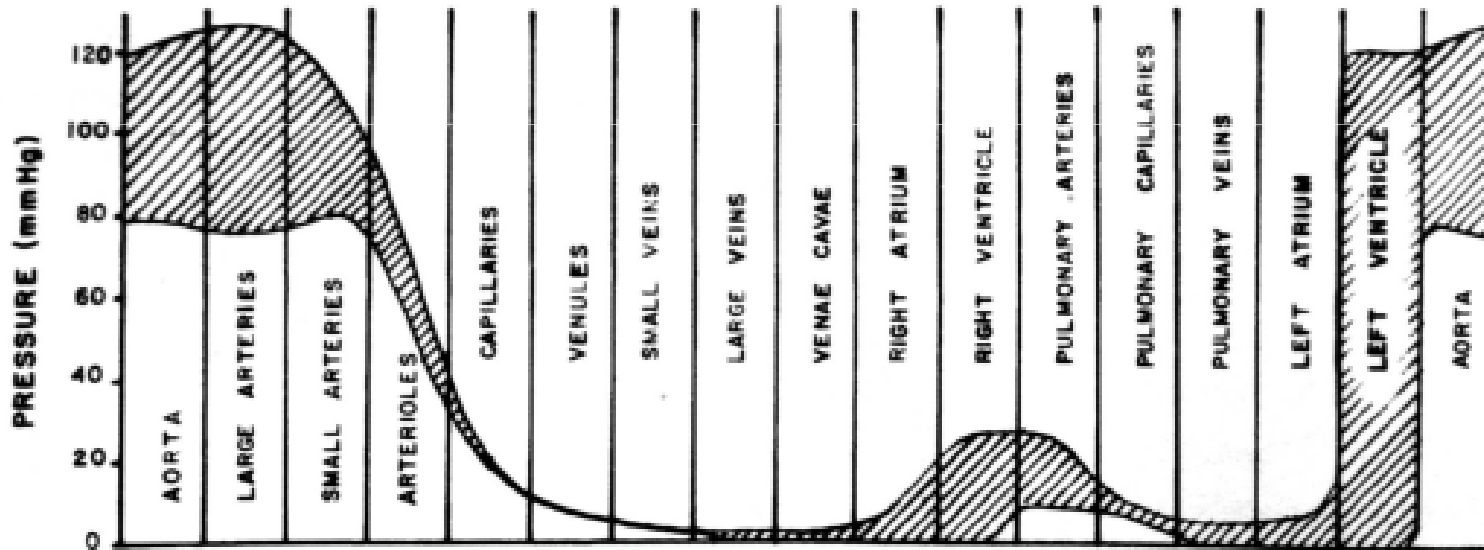
Αποτελέσματα που δεν μπορούν να παραχθούν από lumped μοντέλα

- Lumped μοντέλα: το αρτηριακό δέντρο αντιμετωπίζεται σαν ένα στοιχείο, με επιμέρους στοιχεία που αντιστοιχούν στην αντίσταση, χωρητικότητα και επαγωγή.
- Είναι κατάλληλα για τον συνολικό υπολογισμό της ροής, αλλά όχι για τον υπολογισμό της κυματομορφής κατά μήκος επιμέρους αγγείων.
- Παραδειγματικά αναφέρεται ότι η μεταβολή του κύματος της πίεσης σαν συνάρτηση της απόστασης από την είσοδο της αορτής (βλ σχήμα) δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί από lumped μοντέλα.



Αποτελέσματα που δεν μπορούν να παραχθούν από lumped μοντέλα

Η συστολική και διαστολική πίεση στα διάφορα αγγεία του κυκλοφοριακού συστήματος.



Διακλάδωση αγωγού

- Εστω αγωγός ακτίνας a_0 , μήκους l_0 με ροή q_0 , που διακλαδώνεται σε δύο αγωγούς ακτίνας a_1, a_2 μήκους l_1, l_2 με ροή q_1, q_2 , αντίστοιχα.

$$q_0 = q_1 + q_2$$

$$p_0(x_0) = p_0(0) - \frac{8\mu}{\pi a_0^4} q_0 x_0$$

$$p_1(x_1) = p_0(l_0) - \frac{8\mu}{\pi a_1^4} q_1 x_1$$

$$p_2(x_2) = p_0(l_0) - \frac{8\mu}{\pi a_2^4} q_2 x_2$$

