ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ –ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ

Λαμία, 17/04/2014

Φυλλάδιο 2.

1. Έστω η εξίσωση Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ ικανοποιεί μια εξίσωση Laplace.
2. Θεωρούμε την εξίσωση Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$. Να δείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις ικανοποιούν μια εξίσωση Laplace.
   i) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$
   ii) $f(x,y,z)=2z^3-3z(x^2+y^2)$
3. Αν $z=f(x,y)$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $f_{xx}+f_{yy}=0$ και $x=\frac{u^2-v^2}{2}$ $y=uv$, τότε $z_{uu}+z_{vv}=0$.
4. Έστω $f(x,y)$ συνάρτηση C^2-τάξης (συνεχείς μερικές παράγωγοι έως και δεύτερης τάξης) και $u=x+\lambda y$, $v=x+\mu y$. Να βρεθούν $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $3f_{xx}-2f_{xy}-f_{yy}=0$ μετασχηματίζεται στην $f_{uv}=0$.
5. Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $h(x,y,z)=-y+x\,f(u,v)$ με $u=x^2+y^2$ και $v=ze^{-x}$ ισχύει $y\,h_x-x\,h_y+y\,z\,h_z=x+y\,f(u,v)$.
6. Έστω $f(x,y)$ συνάρτηση C^2-τάξης (συνεχείς μερικές παράγωγοι έως και δεύτερης τάξης) και $u=\lambda x+y$, $v=\mu x+y$. Να βρεθούν $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $f_{xx}-f_{xy}-2f_{yy}=0$ μετασχηματίζεται στην $f_{uv}=0$.

7. Έστω $f(x,y)$ συνάρτηση C^2-τάξης (συνεχείς μερικές παράγωγοι έως και δεύτερης τάξης) και $x+y=\ln(u+v)$, $x-y=\ln(u-v)$. Να δειχθεί ότι ισχύει η εξίσωση $f_{xx}-f_{yy}=(u^2-v^2)(f_{uu}-f_{vv})$.

8. Έστω για τη συνάρτηση $f(u,v)$ ισχύει $f_{uu}+f_{vv}=0$. Να δειχθεί ότι για την $f\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ ισχύει $f_{xx}+f_{yy}=0$.

9. Έστω οι συναρτήσεις $f(x,y,z)=x+y+z$, $g(x,y,z)=xy+yz+xz$ και $h(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$. Να αποδειχθεί ότι οι παραπάνω συναρτήσεις είναι συναρτησιακά εξαρτημένες και να βρεθεί η συναρτησιακή σχέση που επαληθεύουν.

10. Να υπολογισθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

    i) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}-4xy+9y^2+3x-14y+\dfrac{1}{2}$

    ii) $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+3xy+3yz+3zx$

11. Να υπολογισθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

    i) $f(x,y)=x^2+y^2$, υπό τη συνθήκη $x^3+y^3=6xy$.

    ii) $f(x,y)=64x-2x^2+4xy-4y^2+32y-14$, υπό τη συνθήκη $x+y\le 54$.

    iii) $f(x,y)=x^2-y^2$, υπό τη συνθήκη $x^2-y^2\le 1$.

    iv) $f(x,y)=4x^2-2xy+6y^2$, υπό τη συνθήκη $x+y=72$.

    v) $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$, υπό τη συνθήκη $x^2+y^2+z^2=4$.

    vi) $f(x,y,z)=x+y+z$, υπό τις συνθήκες $x^2+y^2=2$ και $x+z=1$.

12. Να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

    i) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$, όταν $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$.

    ii) $f(x,y)=9-x^2-y^2$, όταν $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1\}$.

    iii) $f(x,y)=x^3+xy+y^3$, όταν $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1,\ y\le 0\}$.

13. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z)=400xyz^2$ πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$.

14. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z)=x+y+z$ πάνω στη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=81$.