5 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

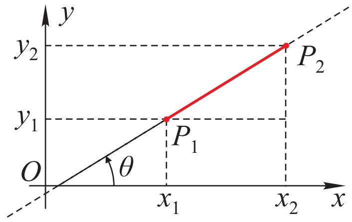
5.1 Σε δύο Διαστάσεις

Συστήματα συντεταγμένων

Για να καθοριστεί η θέση, το σχήμα και η κίνηση των σωμάτων στο χώρο (που θεωρείται Ευκλείδειος, δηλαδή με θετική απόσταση μεταξύ δύο σημείων) χρησιμοποιούνται *συστήματα συντεταγμένων*, δηλαδή άξονες ή καμπύλες κατάλληλα αριθμημένοι. Σε δύο διαστάσεις ένα *ορθογώνιο καρτεσιανό* σύστημα συντεταγμένων xOy δίνεται στο Σχ. 5-1. Η θέση του σημείου P_1 δίνεται από την *τετμημένη* x_1 και την *τεταγμένη* y_1, που ορίζονται από τις κάθετες προς τους άξονες.

Σημεία

Απόσταση δύο σημείων



Σχ. 5-1

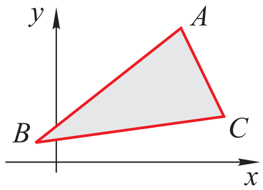
Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος P_1P_2 είναι

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(x_1, y_1) = καρτεσιανές συντεταγμένες σημείου P_1

(x_2, y_2) = καρτεσιανές συντεταγμένες σημείου P_2

Εμβαδό τριγώνου



Σχ. 5-2

Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ είναι οι κορυφές του τριγώνου, το εμβαδό του ισούται με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

Ευθεία

Εξίσωση από δύο σημεία

Αν η ευθεία περνάει από δύο σημεία $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$, έχει εξίσωση

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Η *κλίση* της ευθείας είναι

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$

και η τεταγμένη της τομής με τον άξονα y

$$b = y_1 - mx_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

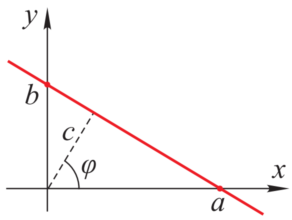
Η εξίσωση της ευθείας γράφεται επίσης

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ή $$y = mx + b$$

ή $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

όπου a η τετμημένη της τομής με τον άξονα x.



Σχ. 5-3

Κανονική μορφή της εξίσωσης μιας ευθείας

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = c$$

όπου c η απόσταση της αρχής O από την ευθεία και φ η γωνία της κάθετης στην ευθεία με το θετικό ημιάξονα x.

Γενική μορφή της εξίσωσης μιας ευθείας

$$Ax + By + C = 0$$

Απόσταση σημείου από ευθεία

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(x_1, y_1) = καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου

Γωνία δύο ευθειών

Αν m_1 και m_2 είναι οι κλίσεις δύο ευθειών, τότε η εφαπτόμενη της γωνίας τους είναι

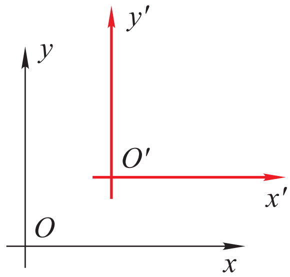
$$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2 + 1}$$

Οι ευθείες είναι παράλληλες ή συμπίπτουν, μόνο αν $m_1 = m_2$.

Οι γραμμές είναι κάθετες, αν και μόνο αν $m_2 = -1/m_1$.

Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Οι συντεταγμένες ενός σημείου σε δύο συστήματα συντεταγμένων συνδέονται μεταξύ τους με σχέσεις που καλούνται *μετασχηματισμοί*



Σχ. 5-4

Μεταφορά

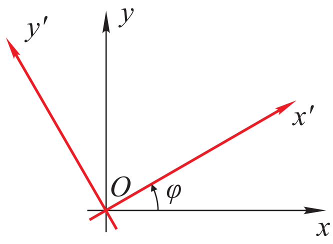
$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

(x, y) = συντεταγμένες ως προς το σύστημα xOy

(x', y') = συντεταγμένες ως προς το σύστημα $x'O'y'$

(x_0, y_0) = συντεταγμένες του O' ως προς το xOy

Στροφή



Σχ. 5-5

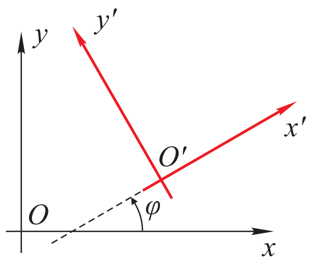
$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi \end{cases}$$

φ = γωνία στροφής

Μεταφορά και στροφή



Σχ. 5-6

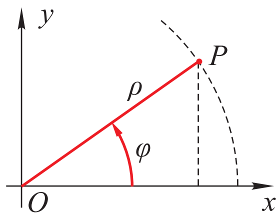
$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0 \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0 \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi \\ y' = (y - y_0)\cos\varphi - (x - x_0)\sin\varphi \end{cases}$$

(x_0, y_0) = συντεταγμένες του O' ως προς το xOy

Πολικές συντεταγμένες



Σχ. 5-7

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$

(x, y) = καρτεσιανές συντεταγμένες

(ρ, φ) = πολικές συντεταγμένες

Επίπεδες καμπύλες

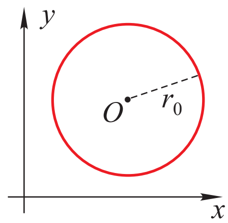
Γενικά, μια εξίσωση της μορφής $f(x, y) = 0$ παριστάνει μία *καμπύλη* στο επίπεδο xy. Μια καμπύλη μπορεί να δοθεί σε *παραμετρική* μορφή με δύο εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$, όπου t κάποια παράμετρος. Η ευθεία είναι η απλούστερη καμπύλη, αφού η $f(x, y)$ είναι γραμμική ως προς x και y. Αν η $f(x, y)$ είναι δεύτερου βαθμού πολυώνυμο, έχουμε *κωνική τομή* (κύκλο, έλλειψη, υπερβολή ή παραβολή).

Κύκλος

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

(x_0, y_0) = καρτεσιανές συντεταγμένες κέντρου

R = ακτίνα του κύκλου

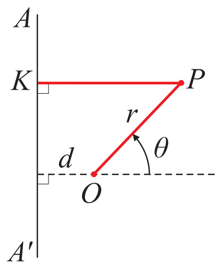


Σχ. 5-8

Κωνικές τομές

Έστω $\varepsilon = \dfrac{PO}{PK}$ ο λόγος των αποστάσεων σημείου P από ένα σημείο O και από μιά ευθεία AA'. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P, για τα οποία ε = σταθ., είναι μια *κωνική τομή* με εξίσωση

$$r = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon \cos\theta}$$



Σχ. 5-9

Η κωνική τομή είναι

έλλειψη, αν $\varepsilon < 1$,

παραβολή, αν $\varepsilon = 1$,

υπερβολή, αν $\varepsilon > 1$.

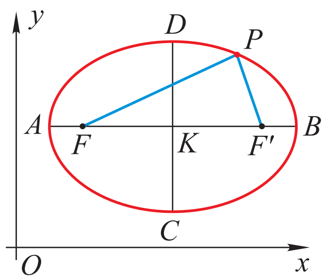
Η σταθερή ε καλείται *εκκεντροτητα*.

Έλλειψη

Η έλλειψη με μεγάλο άξονα $2a$ και μικρό άξονα $2b$, παράλληλους προς τους άξονες συντεταγμένων Ox και Oy αντίστοιχα, έχει εξίσωση

$$\frac{(x - x_0)}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

όπου (x_0, y_0) οι συντεταγμένες του κέντρου K της έλλειψης. Στο Σχ. 5-10 είναι



Σχ. 5-10

$AB = 2a$

$CD = 2b$

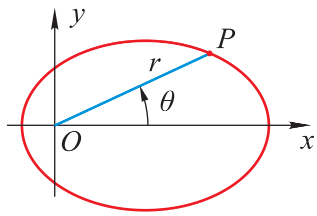
$KF = KF' = \sqrt{a^2 - b^2}$

$PF + PF' = 2a$ (P τυχόν σημείο της έλλειψης)

$\varepsilon =$ εκκεντρότητα $= \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

Αν το F ταυτίζεται με το O, έχουμε το Σχ. 5-11, όπου

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\theta}, \qquad p = a(1 - \varepsilon^2)$$



Σχ. 5-11

Υπερβολή

Η υπερβολή με μεγάλο άξονα $2a$ και μικρό άξονα $2b$, παράλληλους προς τους άξονες συντεταγμένων Ox και Oy αντίστοιχα, έχει εξίσωση

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

όπου (x_0, y_0) οι συντεταγμένες του κέντρου K της υπερβολής. Στο Σχ. 5-12 είναι

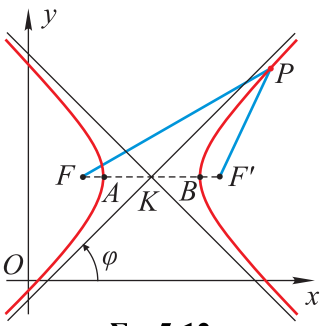
$AB = 2\alpha$

$KF = KF' = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|PF - PF'| = 2a$
(P τυχόν σημείο της υπερβολής)

$\varepsilon =$ εκκεντρότητα $= \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

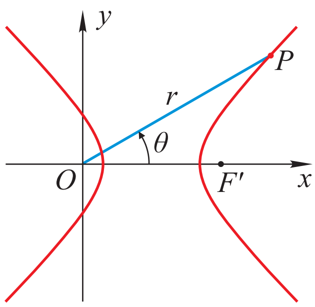
$\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$



Σχ. 5-12

Αν το F ταυτίζεται με το O, έχουμε το Σχ. 5-13, όπου

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\theta}, \qquad p = \alpha(\varepsilon^2 - 1)$$



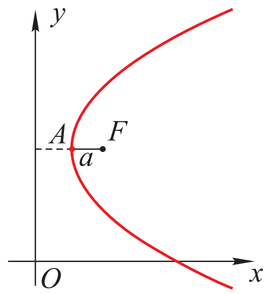
Σχ. 5-13

Παραβολή

Η παραβολή με άξονα παράλληλο προς τον Ox (Σχ. 5-14) έχει εξίσωση

$$(y - y_0)^2 = 4a(x - x_0),$$

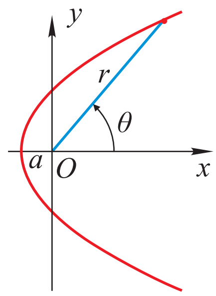
όπου (x_0, y_0) οι συντεταγμένες του A και $AF = a$.



Σχ. 5-14

Αν το F ταυτίζεται με το O (Σχ. 5-15), τότε η παραβολή έχει εξίσωση

$$r = \frac{2a}{1-\cos\theta}$$



Σχ. 5-15

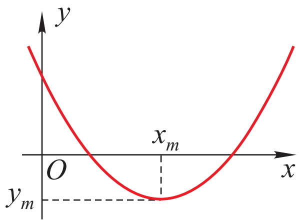
Η εξίσωση

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a > 0,$$

παριστάνει παραβολή (Σχ. 5-16) με συντεταγμένες ελάχιστου

$$x_m = -\frac{b}{2a},$$

$$y_m = \frac{4ac - b^2}{4a}$$



Σχ. 5-16

Σύνοψη κωνικών τομών

	Έλλειψη	Υπερβολή	Παραβολή
Εξίσωση	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 4px$
Εκκεντρότητα	$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$	$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$	$\varepsilon = 1$
Εστίες	$(-a\varepsilon, 0) \quad (a\varepsilon, 0)$	$(-a\varepsilon, 0) \quad (a\varepsilon, 0)$	$(p, 0)$
Διευθετούσα	$x = -a/\varepsilon \quad x = a/\varepsilon$	$x = -a/\varepsilon \quad x = a/\varepsilon$	$x = -p$
Χορδή στην εστία κάθετη στον άξονα	$2b^2/a$	$2b^2/a$	$4p$
Εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες	$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\theta}$	$r^2 = \frac{-b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\theta}$	$r = \frac{4p\cos\theta}{1 - \cos^2\theta}$

Κυβική παραβολή (Σχ. 5-17)

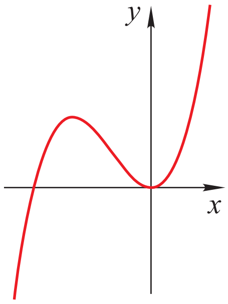
Εξίσωση

$$y = x^2(x - a)$$

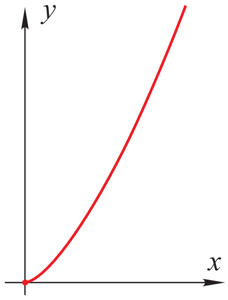
Ημικυβική παραβολή (Σχ. 5-18)

Εξίσωση

$$y = ax^{2/3}$$



Σχ. 5-17



Σχ. 5-18

Κισσοειδής του Διοκλή (Σχ. 5-19)

Το Q κινείται κατά μήκος της QQ' (εφαπτόμενης του κύκλου και κάθετης στον άξονα Ox) και παίρνουμε $OP = RQ$. Το P γράφει την καμπύλη.

Εξισώσεις

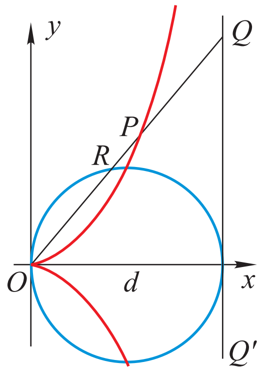
$$y^2 = \frac{x^3}{d - x}$$

ή $\quad r = d\sin\theta\tan\theta$

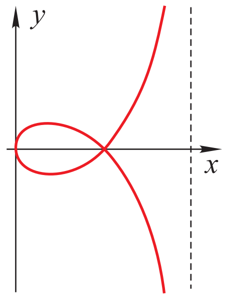
Στροφοειδής (Σχ. 5-20)

Εξίσωση

$$x^3 + x(a^2 + y^2) = 2a(x^2 + y^2)$$



Σχ. 5-19



Σχ. 5-20

Φύλλο του Descartes (Σχ. 5-21)

Εξισώσεις

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

ή $\quad x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \quad y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$

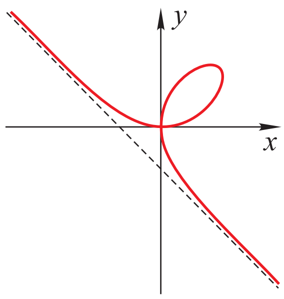
Ασύμπτωτη $\quad x + y + a = 0$

Εμβαδό $\quad E = (3/2)a^2$

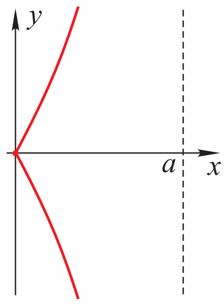
Τριχοτομούσα (Σχ. 5-22)

Εξίσωση

$$y^2 = \frac{x^2(3a + x)}{a - x}$$



Σχ. 5-21



Σχ. 5-22

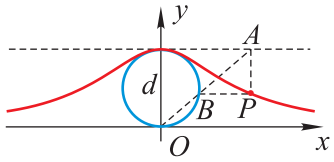
Μάγισσα της Agnesi (Σχ. 5-23)

Το A κινείται πάνω στην ευθεία $y = d$. Το B είναι η τομή της OA με το σταθερό κύκλο κέντρου $(0,\ d/2)$ και διαμέτρου d. Το P είναι η τομή των ευθειών που φέρονται από τα A και B παράλληλες προς τους άξονες.

Εξισώσεις

$$y = \frac{d^3}{x^2 + d^2} \qquad \text{ή} \qquad \begin{cases} x = d\cot\varphi \\ y = d\sin^2\varphi \end{cases}$$

όπου $\varphi = \widehat{AOx}$.



Σχ. 5-23

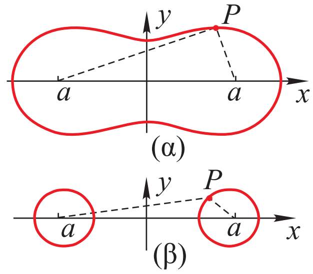
Ωοειδής του Cassini (Σχ. 5-24)

Οι αποστάσεις του P από δύο σταθερά σημεία έχουν σταθερό γινόμενο b^2.

Εξίσωση

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4$$

Αν $a < b$, έχουμε το Σχ. 5-24α. Αν $a > b$, το Σχ. 5-24β.



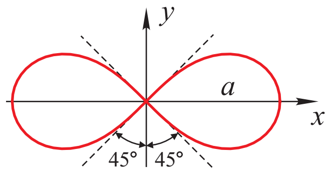
Σχ. 5-24

Λημνίσκος του Bernoulli (Σχ. 5-25)

Εξίσωση

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad \text{ή} \quad r^2 = a^2\cos 2\theta.$$

Εμβαδό (ολικό) $\quad E = a^2$

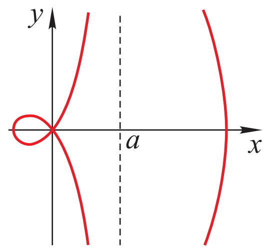


Σχ. 5-25

Κογχοειδής του Νικομήδη (Σχ. 5-26)

Εξίσωση

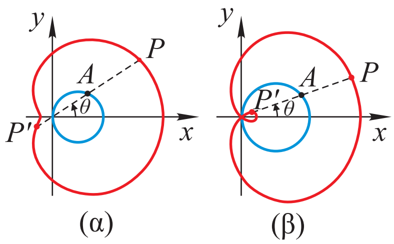
$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2x^2 \quad \text{ή} \quad r = \frac{a}{\cos\theta} + b$$



Σχ. 5-26

Σαλίγκαρος του Pascal (Σχ. 5-27)

Το A κινείται πάνω στο σταθερό κύκλο διαμέτρου d. Στην ευθεία που συνδέει το A με την αρχή των αξόνων παίρνουμε δύο σημεία P και P' με $PA = P'A = b < 2d$. Αυτά γράφουν την καμπύλη.



(α) (β)

Σχ. 5-27

Εξίσωση $\quad r = b + d\cos\theta$

Αν $d < b$, έχουμε το Σχ. 5-27α. Αν $b < d$, έχουμε το Σχ. 5-27β.

Καρδιοειδής (Σχ. 5-28

Ο κύκλος (B, a) κυλάει στο εξωτερικό του σταθερού κύκλου (A, a). Το σημείο P γράφει την καμπύλη.

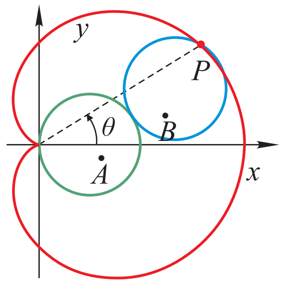
Εξίσωση

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

ή $\quad r = 2a(1 + \cos\theta)$

Μήκος (ολικό) $= 8a$

Εμβαδό $\quad E = (3/2)\pi a^2$



Σχ. 5-28

Αστροειδής (Σχ. 5-29)

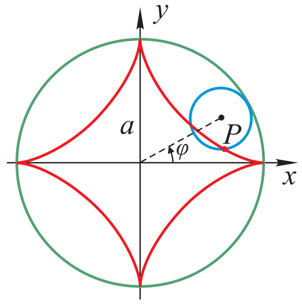
Ο μικρός κύκλος με ακτίνα $a/4$ κυλάει μέσα στο μεγάλο κύκλο με ακτίνα a. Το σημείο P γράφει την καμπύλη.

Εξισώσεις

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = a\cos^3\varphi \\ y = a\sin^3\varphi \end{cases}$$

Μήκος (ολικό) $= 6a$

Εμβαδό $\quad E = \frac{3}{8}\pi a^2$



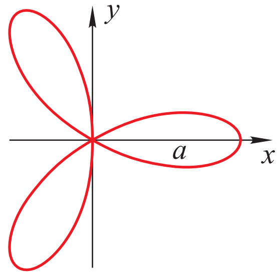
Σχ. 5-29

Τρίφυλλο ρόδο (Σχ. 5-30)

Εξίσωση

$$r = a\cos 3\theta$$

Γενικά, για n περιττό η $r = a\cos n\theta$ έχει n φύλλα.



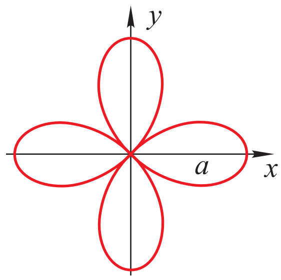
Σχ. 5-30

Τετράφυλλο ρόδο (Σχ. 5-31)

Εξίσωση

$$r = a\cos 2\theta$$

Γενικά, για n άρτιο η $r = a\cos n\theta$ έχει $2n$ φύλλα.



Σχ. 5-31

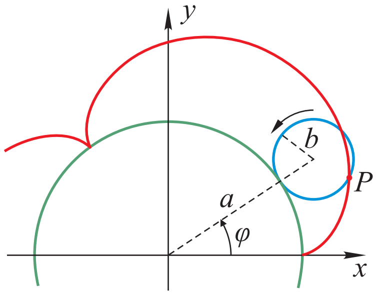
Επικυκλοειδής (Σχ. 5-32)

Ο μικρός κύκλος κυλάει στο εξωτερικό του μεγάλου. Το σημείο P είναι σταθερό ως προς το μικρό κύκλο, απέχει c από το κέντρο του και γράφει την καμπύλη.

Εξισώσεις

$$x=(a+b)\cos\varphi-c\cos\left(\frac{a+b}{b}\varphi\right)$$

$$y=(a+b)\sin\varphi-c\sin\left(\frac{a+b}{b}\varphi\right)$$



Σχ. 5-32

Στο Σχ. 5-32 η περίπτωση $b=c$.

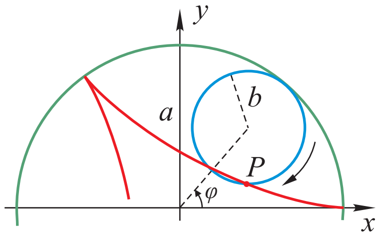
Υποκυκλοειδής (Σχ. 5-33)

Ο μικρός κύκλος κυλάει στο εσωτερικό του μεγάλου. Το σημείο P είναι σταθερό ως προς το μικρό κύκλο, απέχει c από το κέντρο του και γράφει την καμπύλη.

Εξισώσεις

$$x=(a-b)\cos\varphi+c\cos\left(\frac{a-b}{b}\varphi\right)$$

$$y=(a-b)\sin\varphi-c\sin\left(\frac{a-b}{b}\varphi\right)$$

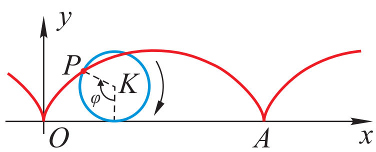


Σχ. 5-33

Στο Σχ. 5-33 η περίπτωση $b=c$.

Κυκλοειδής (Σχ. 5-34)

Ο κύκλος (K, a) κυλάει πάνω στον άξονα Ox. Το σημείο P είναι σταθερό στην περιφέρεια και γράφει την καμπύλη.



Σχ. 5-34

Εξισώσεις

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi)$$

Τετμημένη του $A = 2\pi a$

Μήκος του τόξου $OA = 8a$

Εμβαδό ενός τμήματος $E = 3\pi a^2$

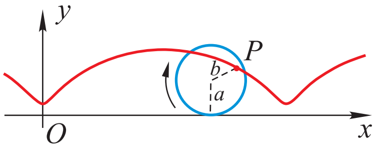
Τροχοειδής (Σχ. 5-35)

Ο κύκλος με ακτίνα a κυλάει πάνω στον άξονα Ox. Το σημείο P είναι σταθερό ώς προς τον κύκλο, απέχει απόσταση b από το κέντρο και γράφει την καμπύλη.

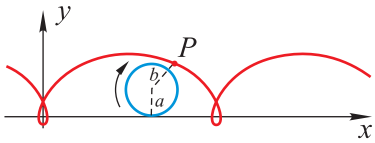
Εξισώσεις

$$x = a\varphi - b\sin\varphi, \qquad y = a - b\cos\varphi$$

Αν $b < a$ έχουμε το Σχ. 5-35α. Αν $b > a$, το Σχ. 5-35β. Αν $b = a$, παίρνουμε την κυκλοειδή του Σχ. 5-34.



Σχ. 5-35α



Σχ. 5-35β

Σπείρες (Σχ. 5-36)

Γραμμική (του Αρχιμήδη)

Εξίσωση

$$r = a\theta$$

Παραβολική

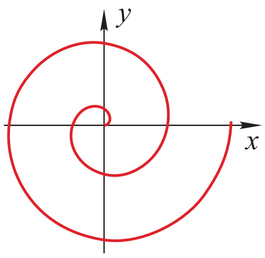
Εξίσωση

$$r^2 = 4p\theta$$

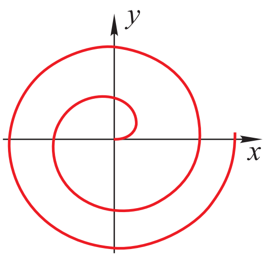
Λογαριθμική

Εξίσωση

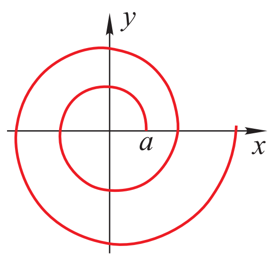
$$r = ae^{b\theta}$$



Σχ. 5-36α



Σχ. 5-36β



Σχ. 5-36γ

Ενειλιγμένη κύκλου (Σχ. 5-37)

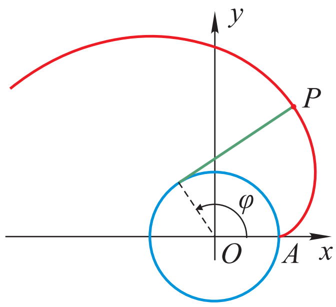
Το P είναι το άκρο ενός σχοινιού που είναι τυλιγμένο σε έναν κύκλο ακτίνας a. Το σχοινί ξετυλίγεται και το P γράφει την καμπύλη.

Εξισώσεις

$$x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$$

$$y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$$

Μήκος τόξου $\qquad s = \frac{1}{2}a\varphi^2$



Σχ. 5-37

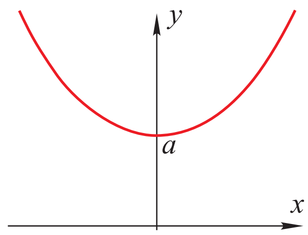
Αλυσοειδής (Σχ. 5-38)

Το σχήμα μιας ομογενούς αλυσίδας αναρτημένης από τα σημεία A και B.

Εξίσωση

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

Μήκος από -x έως x $\quad s = 2a\sinh(x/a)$



Σχ. 5-38

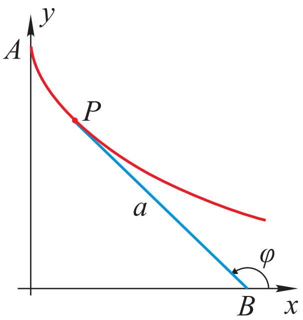
Έλκουσα (Σχ. 5-39)

Η καμπύλη αρχίζει από το σημείο $A(0,\ a)$. Η εφαπτόμενη στο τυχόν σημείο P τέμνει τον άξονα Ox στο B. Το μήκος PB παραμένει σταθερό και ίσο με a.

Εξισώσεις

$$x = a\left(\cos\varphi + \ln\tan\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y = a\sin\varphi$$



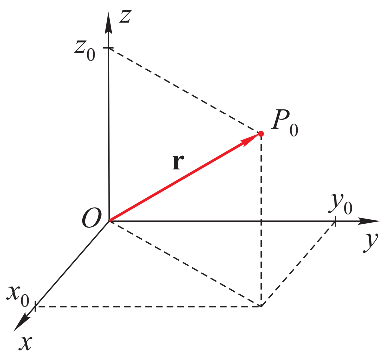
Σχ. 5-39

5.2 Σε τρεις Διαστάσεις

Συστήματα συντεταγμένων

Στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο χρησιμοποιούνται *συστήματα συντεταγμένων* με τρεις συντεταγμένες.

Οι *καρτεσιανές συντεταγμένες* x, y, z ονομάζονται αντίστοιχα *τετμημένη*, *τεταγμένη* και *κατηγμένη* και μετριώνται από την αρχή O κατά μήκος τριών ορθογώνιων αξόνων Ox, Oy, Oz. Ένα σημείο P_0 παριστάνεται από μία τριάδα τιμών $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, που ορίζουν τρία *συντεταγμένα επίπεδα* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.



Σχ. 5-40

Στις διευθύνσεις των αξόνων Ox, Oy, Oz ορίζουμε αντίστοιχα τα *μοναδιαία διανύσματα βάσης* **i**, **j**, **k**. Κάθε σημείο αντιστοιχεί σε ένα *διάνυσμα θέσης*

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Το *μήκος* ή *μέτρο* του διανύσματος **r** συμβολίζεται με $|\mathbf{r}|$ ή r και είναι

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

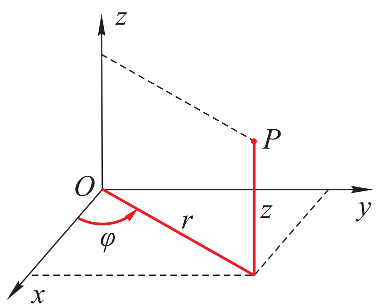
Γενικότερα, η θέση ενός σημείου στο χώρο μπορεί να καθοριστεί από τρεις *καμπυλλόγραμμες συντεταγμένες* x_1, x_2, x_3, οι οποίες συνδέονται με τις x, y, z και μετριώνται κατά μήκος τριών *συντεταγμένων καμπυλών* (που με τη σειρά τους ορίζονται ως τομές των τριών *συντεταγμένων επιφανειών* x_1 = σταθ., x_2 = σταθ., x_3 = σταθ.). Το σύστημα συντεταγμένων που θα χρησιμοποιηθεί επιλέγεται έτσι ώστε να γίνει απλούστερη η περιγραφή του φυσικού συστήματος. Οι συχνότερα χρησιμοποιούμενες συντεταγμένες (μετά τις καρτεσιανές) είναι οι κυλινδρικές και οι σφαιρικές συντεταγμένες.

Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

(x, y, z) = καρτεσιανές συντεταγμένες

(ρ, φ, z) = κυλινδρικές συντεταγμένες



Σχ. 5-41

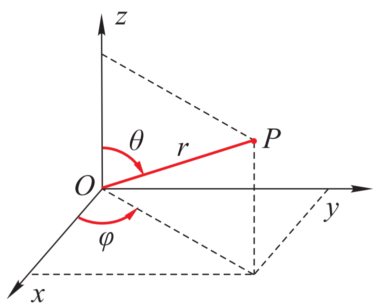
Σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

(x, y, z) = καρτεσιανές συντεταγμένες

(r, φ, θ) = σφαιρικές συντεταγμένες



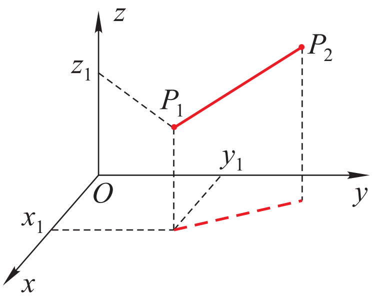
Σχ. 5-42

Σημεία

Απόσταση δύο σημείων (Σχ. 5-43)

$$d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(x_i, y_i, z_i) = καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου P_i ($i = 1, 2, 3$).



Σχ. 5-43

Απόσταση σημείου από επίπεδο

$$d_0 = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

όπου $P(x_0, y_0, z_0)$ είναι το σημείο και $Ax + By + Cz + D = 0$ το επίπεδο.

Ευθεία

Εξισώσεις ευθείας που περνάει από δύο σημεία $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Τα *συνημίτονα κατεύθυνσης* είναι

$$l = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \qquad m = \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \qquad n = \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

όπου α, β, γ οι γωνίες της ευθείας P_1P_2 με τους θετικούς ημιάξονες x, y, z και d το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος P_1P_2. Είναι

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad \text{ή} \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Οι εξισώσεις της ευθείας γράφονται επίσης

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad \text{ή} \qquad x = x_1 + lt, \;\; y = y_1 + mt, \;\; z = z_1 + nt$$

όπου t παράμετρος.

Με διανύσματα οι εξισώσεις της ευθείας γράφονται

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \kappa(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{a} \qquad \text{όπου } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

και κ και λ παράμετροι.

Ευθεία από σημείο και παράλληλη σε διάνυσμα

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z} \quad \text{ή} \quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t$$

όπου $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ είναι το σημείο και $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$ το παράλληλο διάνυσμα.

Ευθεία από σημείο και κάθετη σε επίπεδο

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C} \quad \text{ή} \quad x=x_0+At,\ y=y_0+Bt,\ z=z_0+Ct$$

όπου (x_0, y_0, z_0) το σημείο και $Ax + By + Cz + D = 0$ το επίπεδο.

Γωνία δύο ευθειών

Για τη γωνία ψ μεταξύ δύο ευθειών με συνημίτονα κατεύθυνσης l_1, m_1, n_1 και l_2, m_2, n_2 ισχύει

$$\cos\psi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

Αν οι παραμετρικές εξισώσεις των ευθειών είναι $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda_1\mathbf{a}_1$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \lambda_2\mathbf{a}_2$, τότε ($\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων)

$$\cos\psi = \frac{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}$$

Απόσταση σημείου από ευθεία

$$d_0' = \left\{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1|^2 - [(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{v}_0]^2\right\}^{1/2}$$

όπου $\mathbf{r}_0$ είναι το σημείο, $\mathbf{r}_1$ ένα σημείο της ευθείας και $\mathbf{v}_0$ μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της ευθείας.

Επίπεδο

Γενική εξίσωση

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{ή} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{r} + D = 0,$$

όπου $\mathbf{A} = (A, B, C)$ είναι το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο.

Επίπεδο από τρία σημεία

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ή} \quad [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_3)] = 0$$

όπου (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3$, είναι οι συντεταγμένες των τριών σημείων και $[\mathbf{abc}]$ το τριπλό μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων.

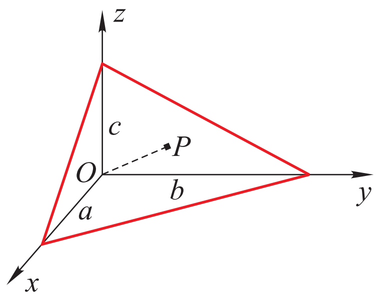
Επίπεδο από τις τομές με τους άξονες

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Κανονική μορφή της εξίσωσης ενός επιπέδου

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = d$$

όπου d είναι η απόσταση του O από το επίπεδο και α, β, γ οι γωνίες της κάθετης OP με τους θετικούς άξονες Ox, Oy, Oz.



Σχ. 5-44

Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων που ακολουθούν είναι όλοι *γραμμικοί*. Συνεπώς, ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού n των x, y, z παραμένει πολυώνυμο βαθμού n των x', y', z' μετά το μετασχηματισμό.

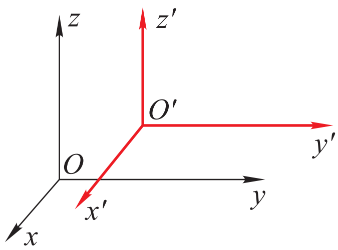
Μεταφορά

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases}$$

(x, y, z) = συντεταγμένες ως προς το σύστημα O

(x', y', z') = συντεταγμένες ως προς το σύστημα O'

(x_0, y_0, z_0) = συντεταγμένες του σημείου O' ως προς το σύστημα O



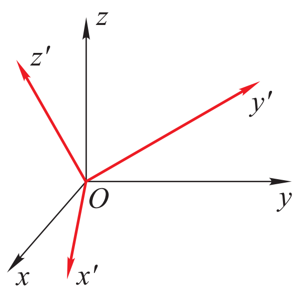
Σχ. 5-45

Στροφή

$$\begin{cases} x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z' \\ y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' \\ z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} x' = l_1 x + m_1 y + n_1 z \\ y' = l_2 x + m_2 y + n_2 z \\ z' = l_3 x + m_3 y + n_3 z \end{cases}$$



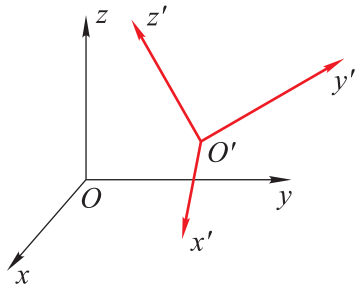
Σχ. 5-46

όπου (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης των αξόνων Ox', Oy', Oz' ως προς το σύστημα O.

Μεταφορά και στροφή

$$\begin{cases} x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z' + x_0 \\ y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' + y_0 \\ z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' + z_0 \end{cases}$$

ή
$$\begin{cases} x' = l_1(x - x_0) + m_1(y - y_0) + n_1(z - z_0) \\ y' = l_2(x - x_0) + m_2(y - y_0) + n_2(z - z_0) \\ z' = l_3(x - x_0) + m_3(y - y_0) + n_3(z - z_0) \end{cases}$$



Σχ. 5-47

(x_0, y_0, z_0) = συντεταγμένες του σημείου O' ως προς το σύστημα O.

Διαδοχικοί μετασχηματισμοί

Δύο ή περισσότεροι γραμμικοί μετασχηματισμοί (μεταφορές, στροφές ή συνδυασμοί αυτών) ισοδυναμούν με έναν κατάλληλο γραμμικό μετασχηματισμό.

Επιφάνειες

Σφαίρα (Σχ. 5-48)

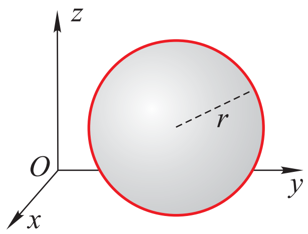
Εξίσωση επιφάνειας σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

(x_0, y_0, z_0) = κέντρο της σφαίρας

R = ακτίνα της σφαίρας

Κάθε τομή με επίπεδο που απέχει από το κέντρο λιγότερο από R είναι κύκλος.



Σχ. 5-48

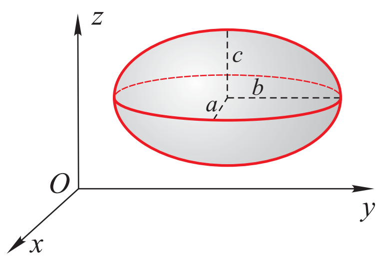
Ελλειψοειδές (Σχ. 5-49)

Εξίσωση επιφάνειας

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

(x_0, y_0, z_0) = κέντρο

a, b, c = ημιάξονες



Σχ. 5-49

Κάθε πραγματική τομή με επίπεδο είναι κλειστή δευτεροβάθμια καμπύλη, άρα είναι έλλειψη (με ειδική περίπτωση τον κύκλο).

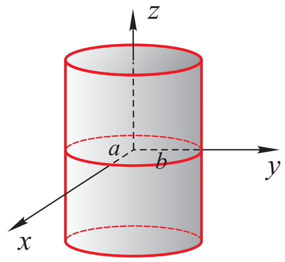
Ελλειπτικός κύλινδρος (Σχ. 5-50)

Για κύλινδρο παράλληλο προς τον άξονα Oz η εξίσωση της επιφάνειας είναι

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

όπου a, b οι ημιάξονες της ελλειπτικής διατομής.

Κάθε τομή με επίπεδο μη παράλληλο προς τον άξονα των z είναι έλλειψη (με ειδική περίπτωση τον κύκλο).



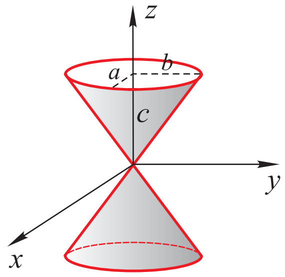
Σχ. 5-50

Ελλειπτικός κώνος (Σχ. 5-51)

Για κώνο με άξονα παράλληλο προς τον άξονα Oz η εξίσωση της επιφάνειας είναι

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Μια τομή με επίπεδο είναι έλλειψη (αν είναι κλειστή καμπύλη), υπερβολή (αν έχει δύο τμήματα) ή παραβολή (αν είναι ανοικτή με ένα τμήμα).



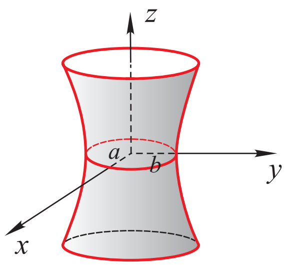
Σχ. 5-51

Μονόχωνο υπερβολοειδές (Σχ. 5-52)

Εξίσωση επιφάνειας

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Οι οριζόντιες τομές είναι ελλείψεις. Οι κατακόρυφες τομές (με επίπεδο της μορφής $Ax + By + C = 0$) είναι υπερβολές.



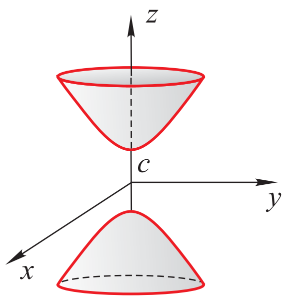
Σχ. 5-52

Δίχωνο υπερβολοειδές (Σχ. 5-53)

Εξίσωση επιφάνειας

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Οι οριζόντιες τομές για $|z| > c$ είναι ελλείψεις. Οι κατακόρυφες τομές (με επίπεδο της μορφής $Ax + By + C = 0$) είναι υπερβολές.



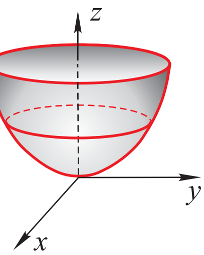
Σχ. 5-53

Ελλειπτικό παραβολοειδές (Σχ. 5-54)

Εξίσωση επιφάνειας

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c}=0$$

Οι τομές με επίπεδο (οριζόντιες με $z > 0$ ή πλάγιες) είναι ελλείψεις. Οι κατακόρυφες τομές (με επίπεδο της μορφής $Ax + By + C = 0$) είναι παραβολές.



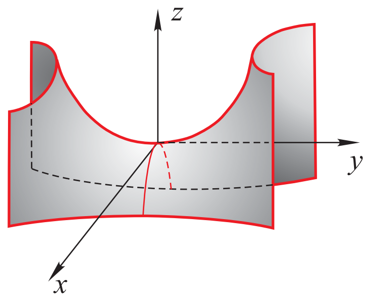
Σχ. 5-54

Υπερβολικό παραβολοειδές (Σχ. 5-55)

Εξίσωση επιφάνειας

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c}=0$$

Οι τομές με επίπεδο είναι υπερβολές, αν έχουν δύο τμήματα (π.χ. οριζόντιες τομές με z = σταθ.) ή παραβολές, αν έχουν ένα τμήμα (π.χ. κατακόρυφες τομές με x = σταθ. ή y = σταθ.)..



Σχ. 5-55