



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ -Χαρακτηριστικά ποσά

Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ

1. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}, 0 \leq u \leq 2\pi,$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογισθούν

- i) το χαρακτηριστικό τους πολυώνυμο
- ii) οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά τους
- iii) μια βάση για κάθε ιδιόχωρο
- iv) το ελάχιστο πολυώνυμο τους
- v) είναι οι πίνακες αντιστρέψιμοι; Υπολογίστε τους αντίστροφους, όπου αυτοί ορίζονται.

2. Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

όταν αυτός θεωρηθεί ως στοιχείο του

- i) $M_3(\mathbb{R})$
- ii) $M_3(\mathbb{C})$

3. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ a & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το $x = (-1 \ -1 \ 1)^t$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A . Για τις τιμές του a που υπολογίσατε να βρεθεί η διάσταση του ιδιόχωρου του A που περιέχει το x .

4. Να υπολογίσετε τα $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

όταν $x_1 = (1 \ 1 \ 1)^t$ και $x_2 = (1 \ 0 \ -1)^t$ είναι ιδιοδιανύσματά του. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ελάχιστο πολυώνυμο του A . Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A^4 ;

5. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, y - z, x - y + 2z).$$

i) Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της f .

ii) Είναι η f αντιστρέψιμη; Αν ναι, υπολογίστε την $f^{-1}(x, y, z)$.

6. Έστω ο ορθογώνιος πίνακας A . Αποδείξτε ότι:

i) αν ο πίνακας είναι $(2n+1) \times (2n+1)$ με $\det A = 1$, τότε έχει ιδιοτιμή τη μονάδα.

ii) αν έχει $\det A = -1$, τότε έχει ιδιοτιμή το -1 .

7. Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$, τέτοιος ώστε $A^2 = I$. Να αποδείξετε ότι $\sigma(A) = \{-1, 1\}$.

8. Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ με ιδιοτιμές $\lambda_i \in \mathbb{F}$, τέτοιες ώστε $|\lambda_i| < 1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $I - A$ είναι αντιστρέψιμος. Ποιο είναι το $\sigma(I - A)$;

9. Έστω ο αντιστρέψιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ με ιδιοτιμές λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Να αποδείξετε ότι οι ιδιοτιμές του $\text{adj}A$ είναι $(\det A)\lambda_i^{-1}$.

10. Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι κανονικός. Να αποδείξετε ότι

είτε ο A είναι συμμετρικός είτε ότι έχει τη μορφή $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Και στις δύο

περιπτώσεις υπολογίστε τις ιδιοτιμές του. Τι παρατηρείτε;

11. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$. Να εκφράσετε τον πίνακα A^{-2} και A^5 ως

συναρτήσεις των πινάκων A και I .

12. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

i) Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

ii) Αν $B = A^3 + 4A^2 - 5I$, να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές του B^{-1} .

13. Έστω $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

i) Να εκφραστεί ο πίνακας A^{10} συναρτήσει των πινάκων A^2 , A , I και να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του.

ii) Να υπολογισθεί ο πολυωνυμικός πίνακας $B = A^{123} + 3A^{52} - 6A^{45}$.

iii) Να αποδειχθεί ότι $A^{2007} + 2A^{2006} + 3A^{2003} + 2I = 2(A + I)^2$.

14. i) Βρείτε έναν πίνακα A που να έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 7\lambda + 4.$$

ii) Ο πίνακας A αντιστρέφεται; Υπολογίστε (αν υπάρχει) τον αντίστροφό του.

iii) Να υπολογισθεί ο πολυωνυμικός πίνακας $B = A^5 - 3A^4 + 2A^3 + A^2 - 2A + 70I$.

Ποια είναι τα ιδιοποσά του B ; Ο B αντιστρέφεται;