



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - Πίνακες

Λιδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ

1. Να υπολογιστούν όσες από τις παραστάσεις $A+B, AB, BA, BA^t, B^2A,$

AA^t, A^tA έχουν νόημα, με $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Να υπολογιστούν όσες από τις παραστάσεις $A+B, A-B, AB, BA, A^2,$ έχουν νόημα, για τους σύνθετους πίνακες

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 2 & 4 & \vdots & 3 \\ 1 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & \vdots & 3 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \dots & \dots \\ 4 & 1 \\ 7 & 9 \\ \dots & \dots \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$

3. Για τους σύνθετους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 3 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- i) Να υπολογισθεί το γινόμενο AB .
- ii) Υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα A ; Αν ναι, ποιος είναι;
4. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί πίνακες X τέτοιοι ώστε $AX = XA$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^2 + 2A - 3I = \mathbf{0}$.
- Να απλοποιηθεί η παράσταση $A^4 + 2A^3 - 4A^2 - A + I$.
 - Αποδείξτε ότι οι πίνακες A , $A + I$, $A + 2I$ είναι αντιστρέψιμοι.
6. Αν για τους $n \times n$ πίνακες A, B ισχύει $AB^3 + 4I = -A$, να αποδείξετε ότι ο A αντιστρέφεται και να εκφράσετε τον A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό των δυνάμεων του B .
7. Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ και ο A είναι αντιστρέψιμος, να λυθεί η εξίσωση
- $$XA + B = \mathbf{0}.$$
8. Έστω οι $n \times n$ πίνακες A, B με $A^2 = A$ και $B^2 = B$. Να αποδείξετε ότι
- $$(A + B)^2 = A + B \quad \text{αν και μόνο αν} \quad AB = BA = \mathbf{0}.$$
9. Έστω οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$.
- Αν οι A, B είναι συμμετρικοί πίνακες, τότε ο $A + B$ είναι συμμετρικός πίνακας.
 - Αν οι A, B είναι αντισυμμετρικοί πίνακες, τότε ο $A + B$ είναι αντισυμμετρικός πίνακας.
 - Αν ο A είναι συμμετρικός πίνακας, τότε ο $-A$ είναι συμμετρικός.
 - Αν ο A είναι αντισυμμετρικός πίνακας, τότε ο $-A$ είναι αντισυμμετρικός.
 - Να δειχθεί ότι ο πίνακας AA^t και $A^t A$ είναι πάντα συμμετρικοί.
 - Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και συμμετρικός, τότε ο A^{-1} είναι συμμετρικός.
 - Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και αντισυμμετρικός, τότε ο A^{-1} είναι αντισυμμετρικός.
10. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Να λύσετε την εξίσωση
- $$XB = A, \quad (X \text{ είναι κατάλληλος άγνωστος πίνακας}).$$
- Να βρείτε τους πίνακες X^{-1} , X^t (αν υπάρχουν). Τι παρατηρείτε για τους πίνακες XX^t , $X^t X$ και $(XX^t)^{-1}$; Όσοι από τους πίνακες υπάρχουν να υπολογισθούν.

11. Αν $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, να αποδείξετε ότι ισχύουν οι ισότητες

$$J_n^2 = nJ_n \quad \text{και} \quad (I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}J_n.$$

12. Αν οι $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες και $C, D \in M_n(\mathbb{F})$, αποδείξτε ότι ισχύουν :

i) $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$,

ii) $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} + B^{-1} = B(A + B)^{-1}A$

iii) $(A + CBD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1}DA^{-1}$

13. Να αποδείξετε τις ισότητες, όταν οι αντίστροφοι πίνακες που εμφανίζονται υπάρχουν:

i) $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$

ii) $(I_n + AB)^{-1}A = A(I_n + BA)^{-1}$

iii) $(A + BB^T)^{-1}B = A^{-1}B(I_n + B^T A^{-1}B)^{-1}$

14. Έστω οι πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Να αποδείξετε ότι ισχύουν τα επόμενα :

i) $A(I + BA) = (I + AB)A$ και $(I + BA)B = B(I + AB)$

ii) Αν υπάρχει ο πίνακας $(I + AB)^{-1}$, τότε ισχύει

$$(I + BA)^{-1} = I - B(I + AB)^{-1}A.$$

15. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 & -2^n + 1 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

16. Αν $A = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, να αποδείξετε ότι

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 - 3n & -9n \\ n & 1 + 3n \end{pmatrix},$$

για κάθε φυσικό αριθμό n , και στη συνέχεια να υπολογίσετε τον πίνακα A^{2015} .

17. Έστω ένας $k \times k$ πίνακας A με $A^2 = A$. Να αποδείξετε ότι

$$(A - I)^n = \begin{cases} I - A, & n = 2r, \quad r \in \mathbb{N} \\ A - I, & n = 2r + 1, \quad r \in \mathbb{N} \end{cases},$$

και στη συνέχεια να υπολογίσετε τους πίνακες $(A - I)^{2011}$ και $(A - I)^{2012}$.

18. Ένα αεροσκάφος ίπταται έτσι ώστε οι συντεταγμένες (x_n, y_n, z_n) του σημείου όπου βρίσκεται μετά από n λεπτά πτήσης ικανοποιούν τις σχέσεις

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n - z_n$$

$$y_{n+1} = y_n + z_n$$

$$z_{n+1} = z_n$$

$n = 1, 2, \dots$, όπου $x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του αεροσκάφους μετά από 5 ώρες πτήσης.

Υπόδειξη Έχουμε
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Άρα αρκεί να υπολογιστεί η δύναμη A^{300} .

Αποδείξτε με επαγωγή ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & (n-1)^2 - 1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

19. Δίνονται οι πίνακες $\mathbf{x}_1 = (\sqrt{2} \quad 1 \quad \sqrt{2})^T$ και $\mathbf{x}_2 = (1 \quad 0 \quad -1)^T$.

Αν P ο πίνακας είναι:

$$P = \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T}{\|\mathbf{x}_1\|^2} + \frac{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^T}{\|\mathbf{x}_2\|^2}.$$

Να αποδείξετε ότι ισχύουν: $P^4 = P^2 = P$, $(I - P)^4 = (I - P)^2 = I - P$.

20. Αν το διάνυσμα $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ είναι μοναδιαίο, αποδείξτε ότι ο πίνακας $H = I - 2\mathbf{a}\mathbf{a}^t$ είναι συμμετρικός και ορθογώνιος.