

Κεφάλαιο 1

Π Ι Ν Α Κ Ε Σ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την έννοια του πίνακα, θα ορίσουμε τις πράξεις ανάμεσα σε πίνακες και θα μελετήσουμε τις ιδιότητες τους.

1.1 Γενικές έννοιες

Με το σύμβολο \mathbb{F} δηλώνεται είτε το σύνολο \mathbb{R} των Πραγματικών Αριθμών, είτε το σύνολο \mathbb{C} των Μιγαδικών Αριθμών.

Ορισμός 1.1

Ένας **πίνακας** A με στοιχεία από το \mathbb{F} είναι μια (ορθογώνια) διάταξη των m αριθμών a_{ij} , στοιχείων του συνόλου \mathbb{F} σε σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Οι αριθμοί a_{ij} ονομάζονται **στοιχεία** του πίνακα και είναι τοποθετημένοι σε m γραμμές και σε n στήλες, γι' αυτό σε αυτούς έχουν σημειωθεί δύο δείκτες i και j οι οποίοι δείχνουν τη θέση που κατέχει το κάθε στοιχείο στον πίνακα. Ο πρώτος δείκτης i ονομάζεται **δείκτης γραμμής**, ο δε δεύτερος j λέγεται **δείκτης στήλης**, η γραφή αυτή δηλώνει ότι το a_{ij} βρίσκεται συγχρόνως στην i -γραμμή και στην j -στήλη. Λέμε ότι ο **τύπος** ή το **μέγεθος** του παραπάνω πίνακα είναι $m \times n$ ή ότι ο πίνακας είναι ένας $m \times n$ πίνακας.

Ο πίνακας A στα επόμενα θα συμβολίζεται (a_{ij}) , $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$. Πιο απλά θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $A=(a_{ij})$, όταν είναι σαφές ποια είναι τα m,n .

Στο εξής με $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το \mathbb{F} .

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ είναι ένας 1×3 πίνακας, ο $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ είναι 2×1 ,

ο $\begin{pmatrix} 2+i & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ είναι 2×2 και ο $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ είναι 3×2 .

Δύο ή περισσότεροι πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών χαρακτηρίζονται ως πίνακες του **ίδιου τύπου**. Αν διαγράψουμε κάποιες γραμμές ή στήλες ή γραμμές και στήλες από τον πίνακα A , ο πίνακας που απομένει ονομάζεται **υποπίνακας** του A .

Αρκετές φορές στις εφαρμογές εμφανίζονται προβλήματα που η λύση τους στηρίζεται σε πίνακες αρκετά μεγάλου μεγέθους και η μελέτη τους διευκολύνεται αν οι πίνακες αυτοί διαμερισθούν σε μικρότερα τμήματα. Έτσι ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ονομάζεται **σύνθετος** πίνακας αν τα στοιχεία του είναι πίνακες μικρότερου μεγέθους από αυτό του A , η δε διαμέριση γίνεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε, τα στοιχεία-υποπίνακες που βρίσκονται στην ίδια γραμμή, έχουν όλα τον ίδιο αριθμό γραμμών και τα στοιχεία-υποπίνακες που βρίσκονται στην ίδια στήλη έχουν όλα τον ίδιο αριθμό στηλών. Τον σύνθετο πίνακα θα τον συμβολίζουμε $A = (A_{ij})$, όπου A_{ij} είναι το στοιχείο-υποπίνακας που προκύπτει από τη διαμέριση του αρχικού πίνακα A . Σημειώνουμε δε ότι η διαμέριση του αρχικού πίνακα γίνεται με τη χάραξη κατακόρυφων και οριζόντιων γραμμών ανάμεσα στις γραμμές και στις στήλες του αρχικού πίνακα.

Για παράδειγμα, $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & i \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \\ (1 \ -1) \ (5) & (-2 \ 4 \ 3) \end{pmatrix}$, όπου είναι

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2i \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & i \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = (1 \quad -1), \quad A_{22} = (5) \text{ και} \\ A_{23} = (-2 \quad 4 \quad 3).$$

Στη συνέχεια αναφέρουμε διάφορα είδη πινάκων που θα μας χρειαστούν.

Ορισμός 1.2 (ειδικές κατηγορίες πινάκων)

- Ένας $1 \times n$ πίνακας λέγεται **πίνακας-γραμμή** ή **διάνυσμα**, ένας $m \times 1$ πίνακας λέγεται **πίνακας-στήλη**. Οι πίνακες αυτοί θα σημειώνονται με έντονα μικρά γράμματα, για παράδειγμα, ένας 1×3 πίνακας-γραμμή είναι $\mathbf{a} = (1 \quad -2 \quad 3)$.
- Ένας $m \times n$ πίνακας λέγεται **μηδενικός** αν όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με μηδέν και συμβολίζεται με $\mathbb{O}_{m \times n}$ ή απλά \mathbb{O} . Για τον μηδενικό πίνακα γραμμή ή στήλη θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\mathbf{0}$.
- Ένας $m \times n$ πίνακας λέγεται **τετραγωνικός** αν $m = n$, δηλαδή είναι ο πίνακας που έχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών.

Το σύνολο $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το \mathbb{F} συμβολίζεται πιο απλά $M_n(\mathbb{F})$.

- Τα **διαγώνια στοιχεία** ενός $m \times n$ πίνακα (a_{ij}) είναι τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$, όπου $k = \min\{m, n\}$. Λέμε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην **κύρια διαγώνιο** του πίνακα.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται **διαγώνιος** αν για κάθε $i \neq j$ ισχύει $a_{ij} = 0$. Τους πίνακες θα τους συμβολίζουμε $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας είναι διαγώνιος αν κάθε στοιχείο που δεν

βρίσκεται στη διαγώνιο είναι ίσο με 0. Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

είναι διαγώνιος ενώ ο πίνακας $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ δεν είναι.

Ειδικότερα, ο διαγώνιος πίνακας που έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με τη

μονάδα ονομάζεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται $I_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$.

- Το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του πίνακα A , συμβολίζεται $\text{tr}A$ ή $\text{tr}A$, ονομάζεται **ίχνος** του A , είναι δηλαδή

$$\text{tr}A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{kk}, \text{ με } k = \min\{m, n\}.$$

- Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται **άνω τριγωνικός** αν για κάθε $i > j$ έχουμε $a_{ij} = 0$.

Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται άνω τριγωνικός αν τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι ίσα με μηδέν.

Για παράδειγμα, άνω τριγωνικοί είναι οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1+2i & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5+i \end{pmatrix}$.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται **κάτω τριγωνικός** αν για κάθε $i < j$ έχουμε $a_{ij} = 0$.

Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται κάτω τριγωνικός αν τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιο είναι όλα ίσα με 0. Για παράδειγμα, κάτω

τριγωνικοί είναι οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 5+i \end{pmatrix}$.

- Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ο $n \times m$ πίνακας (a_{ji}) ονομάζεται **ανάστροφος** του A και συμβολίζεται με A^t .

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2+i & -8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, τότε $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3 \\ 3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας (a_{ij}) λέγεται **συμμετρικός** αν για κάθε i, j ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$.

Ισοδύναμα, ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν ισχύει $A = A^t$.

Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1+i \\ \sqrt{3} & 0 & 2i \\ -1+i & 2i & 3 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικοί.

Παρατηρούμε ότι στο συμμετρικό πίνακα τα στοιχεία που βρίσκονται σε

συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαγώνιο είναι ίσα.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας (a_{ij}) λέγεται **αντισυμμετρικός** αν για κάθε i, j ισχύει $a_{ij} = -a_{ji}$.

Ισοδύναμα, ένας πίνακας A είναι αντισυμμετρικός αν και μόνο αν $A = -A^t$.

Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2+i \\ 1 & -2-i & 0 \end{pmatrix}$ είναι αντισυμμετρικοί.

Βλέπουμε ότι σε έναν αντισυμμετρικό πίνακα στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαγώνιο είναι αντίθετα, τα δε διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με το μηδέν, και αυτό γιατί η σχέση $a_{ij} = -a_{ji}$ για τα διαγώνια στοιχεία γράφεται $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$.

- Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ο $m \times n$ πίνακας (\bar{a}_{ij}) ονομάζεται **συζυγής** του A και συμβολίζεται με \bar{A} .
- Ο $n \times m$ πίνακας (\bar{a}_{ji}) ονομάζεται **αναστροφοσυζυγής** του πίνακα $A = (a_{ij})$ και συμβολίζεται $A^* = \bar{A}^t$.

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2i \\ 2-i & 3 & 5-i \end{pmatrix}$, τότε ο συζυγής είναι

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2i \\ 2+i & 3 & 5+i \end{pmatrix} \text{ και ο αναστροφοσυζυγής είναι } A^* = \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 7 & 3 \\ -2i & 5+i \end{pmatrix}.$$

- Ένας τετραγωνικός πίνακας (a_{ij}) λέγεται **Ερμιτιανός** (Hermitian) αν για κάθε i, j ισχύει $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

Ισοδύναμα, ένας πίνακας A είναι Ερμιτιανός αν και μόνο αν $A = A^*$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 4 & 2-i & -4i \\ 2+i & -1 & 2 \\ 4i & 2 & 7 \end{pmatrix}$ είναι Ερμιτιανός. Παρατηρείστε

ότι σε έναν Ερμιτιανό πίνακα στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαγώνιο είναι συζυγή, τα δε στοιχεία της διαγωνίου είναι πραγματικοί αριθμοί, επειδή αν θεωρήσουμε ότι είναι της μορφής $a_{jj} = x_j + iy_j$, με $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$a_{jj} = \overline{a_{jj}} \Rightarrow x_j + iy_j = x_j - iy_j \Rightarrow y_j = 0 \Rightarrow a_{jj} = x_j \in \mathbb{R}.$$

- ♦ Ένας τετραγωνικός πίνακας (a_{ij}) λέγεται **αντιερμιτιανός** αν για κάθε i, j ισχύει $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$

Ισοδύναμα, ένας πίνακας A είναι αντιερμιτιανός αν και μόνο αν $A = -A^*$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 3i & 2-i & -4i \\ -2-i & i & 5 \\ -4i & -5 & -6i \end{pmatrix}$ είναι αντιερμιτιανός.

Παρατηρείστε ότι σε έναν αντιερμιτιανό πίνακα τα διαγώνια στοιχεία είναι καθαρά φανταστικοί αριθμοί, αφού αν $a_{jj} = x_j + iy_j$, με $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$a_{jj} = -\overline{a_{jj}} \Rightarrow x_j + iy_j = -x_j + iy_j \Rightarrow x_j = 0 \Rightarrow a_{jj} = iy_j.$$

Είναι φανερό ότι αν αναφερόμαστε σε τετραγωνικό πραγματικό πίνακα, $A \in M_n(\mathbb{R})$, οι έννοιες του συμμετρικού και του αντισυμμετρικού είναι ταυτόσημες με αυτές του Ερμιτιανού και αντιερμιτιανού πίνακα αντίστοιχα.

Αρκετές φορές οι πίνακες που προκύπτουν από τις εφαρμογές είναι αρκετά πολύπλοκοι, δεδομένο που καθιστά τη λύση του προβλήματος χρονοβόρα και κοπιαστική, αντίθετα η δυνατότητα «απλοποίησής» τους διατηρώντας ουσιώδεις ιδιότητές τους αναλλοίωτες οδηγεί στη σύντομη λύση του προβλήματος. Συχνά η «απλοποίηση» είναι στενά συνδεδεμένη με τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς των γραμμών ή των στηλών του δεδομένου πίνακα.

Στο εξής θα συμβολίζουμε με r_i , $i = 1, 2, \dots, m$, τις γραμμές του $m \times n$ πίνακα A , εδώ

δηλαδή $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$, και θα σημειώνουμε με c_j , $j = 1, 2, \dots, n$, τις στήλες του A , οπότε

ο πίνακας θα γράφεται $A = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$.

Ορισμός 1.3 (στοιχειώδεις μετασχηματισμοί-πίνακες)

Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, καθεμία από τις επόμενες διαδικασίες ονομάζεται **στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών** του πίνακα A , ο οποίος σχετίζεται με

- i) τον πολλαπλασιασμό όλων των στοιχείων μιας γραμμής του A επί $k \in \mathbb{F}$ με $k \neq 0$, ο μετασχηματισμός θα σημειώνεται $r_i \rightarrow kr_i$ με $k \in \mathbb{F}$ και $k \neq 0$,
- ii) την πρόσθεση των στοιχείων μιας γραμμής στα πολλαπλάσια των αντίστοιχων στοιχείων κάποιας άλλης γραμμής, αυτή η διαδικασία θα σημειώνεται $r_i \rightarrow r_i + kr_j$ με $i \neq j$ και $k \in \mathbb{F}$, και τέλος με
- iii) την εναλλαγή δυο γραμμών. Η εναλλαγή θα συμβολίζεται $r_i \leftrightarrow r_j$.

Ανάλογοι **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών** μπορούν να πραγματοποιηθούν μεταξύ των στηλών του πίνακα $A = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$.

Ένας πίνακας $E \in M_n(\mathbb{F})$ λέγεται **στοιχειώδης πίνακας** αν προκύψει από τον μοναδιαίο I_n , εφαρμόζοντας σε αυτόν στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών. Και μάλιστα ανάλογα με τον τύπο του μετασχηματισμού που εφαρμόσαμε αποκτούμε στοιχειώδη πίνακα τύπου I, II, ή III ως εξής:

$$E_I(i, k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \textcircled{0} \\ & & & k & \\ & & & & 1 & \ddots \\ \textcircled{0} & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-γραμμή},$$

είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον I_n , αν πολλαπλασιάσουμε την i -γραμμή επί $k \neq 0$.

$$\begin{array}{l} \text{είναι ο} \\ \text{πίνακας που} \\ \text{προκύπτει} \\ \text{από τον } I_n, \\ \text{αν} \end{array} E_{II}(i, k, j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \textcircled{0} \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & k \\ & & & & \ddots \\ \textcircled{0} & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i\text{-γραμμή} \\ \leftarrow j\text{-γραμμή} \end{array}$$

πολλαπλασιάσουμε την j -γραμμή επί $k \neq 0$ και την προσθέσουμε στην i -γραμμή.

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbb{O} \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & \mathbb{O} & & \ddots & \\ & & \mathbb{O} & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i\text{-γραμμή} , \\ \\ \leftarrow j\text{-γραμμή} \end{matrix}$$

αυτός προκύπτει από την εναλλαγή της j -γραμμής με την i -γραμμή του μονοδιάστατου πίνακα I_n .

Ορισμός 1.3 (ισότητα πινάκων)

Ας θεωρήσουμε δυο $m \times n$ πίνακες $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ με στοιχεία από το \mathbb{F} . Θα λέμε ότι οι πίνακες A, B είναι **ίσοι** και θα γράφουμε $A = B$ αν ισχύει

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{για κάθε } i = 1, \dots, m \text{ και } j = 1, \dots, n,$$

δηλαδή ίσοι είναι δύο πίνακες του ιδίου τύπου των οποίων τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια θέση είναι ίσα.

Για παράδειγμα, από την ισότητα των πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -x \\ y & x+z & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z & -x \\ x+z & w & x+y+z \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} x+z=y \\ x+z=w \\ x+y+z=6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y=w=x+2 \\ x+x+2+2=6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} y=w=3 \\ x=1 \end{matrix}.$$

1.2 Πράξεις πινάκων

Οι πράξεις των πινάκων αναφέρονται στο άθροισμα, την διαφορά πινάκων, στο γινόμενο αριθμού επί πίνακα και στο γινόμενο πινάκων.

Ορισμός 1.4 (άθροισμα)

Εστω $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Το άθροισμα, $A + B$, των πινάκων A και B ορίζεται να είναι ο πίνακας $A + B = (\gamma_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, ο οποίος είναι του ίδιου τύπου με τους αρχικούς, έχει ως στοιχεία το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B , δηλαδή

$$A + B = (\gamma_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Σύμφωνα με τον ορισμό η πρόσθεση πινάκων ορίζεται **μόνο** όταν οι πίνακες είναι του ίδιου τύπου.

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & x \\ 1 & y & 0 \end{pmatrix}$, τότε

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & x \\ 1 & y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + (-4) & 2 + 3 & 7 + x \\ -1 + 1 & 3 + y & 4 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 + x \\ 0 & 3 + y & 4 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 1.5 (γινόμενο πίνακα με αριθμό)

Εστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ και $k \in \mathbb{F}$. Το γινόμενο kA του k με τον A είναι πίνακας ίδιου τύπου με τον αρχικό πίνακα A , τα στοιχεία του προκύπτουν από τα αντίστοιχα του A με πολλαπλασιασμό τους επί k , δηλαδή ο πίνακας είναι $kA = (ka_{ij})$.

Για παράδειγμα, αν $k = 2$ και $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ -1 & 3 + i & 4 \end{pmatrix}$, τότε

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot (3 + i) & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 & 10 \\ -2 & 6 + 2i & 8 \end{pmatrix}.$$

Ιδιαίτερα, όταν $k = -1$ ο πίνακας $(-1)A$ συμβολίζεται $-A$ και ονομάζεται **αντίθετος** του A . Για τη **διαφορά** δύο πινάκων γράφουμε $A - B$ και εννοούμε $A + (-1)B$. Για παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 3 & 5 - 6 \\ 1 - (-4) & -7 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Για τους σύνθετους πίνακες $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ το άθροισμα ορίζεται μόνο όταν η διαμέριση έχει γίνει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ανάμεσα στις γραμμές και στήλες των πινάκων. Κατά συνέπεια προκύπτουν υποπίνακες του ίδιου τύπου με αποτέλεσμα το άθροισμα σύνθετων πινάκων να ανάγεται στο άθροισμα των αντίστοιχων υποπινάκων τους. Επίσης για τους σύνθετους πίνακες $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, επειδή η διαμέριση είναι ίδια, εφόσον και οι υποπίνακες A_{ij}, B_{ij} , για κάθε $i, j = 1, 2$ είναι του ίδιου τύπου, μπορεί να ορισθεί η πρόσθεση ή η αφαίρεσή τους, ως $A \pm B = (A_{ij} \pm B_{ij})$.

Έτσι, αν θεωρήσουμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \vdots & 1 & 0 \\ -1 & \vdots & -3 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4 & \vdots & -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \vdots & 2 & -1 \\ 3 & \vdots & 6 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -5 & \vdots & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

τότε ορίζεται το άθροισμά τους ως

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 3 & -1 \\ 2 & \vdots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \vdots & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{ενώ αν } B = \begin{pmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \vdots & 2 \\ 3 & \vdots & 6 \\ \dots & \dots & \dots \\ -5 & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ το άθροισμα } A + B \text{ δεν ορίζεται, επειδή οι}$$

υποπίνακες \hat{B}_{ij} , για κάθε $i, j = 1, 2$ δεν είναι του ίδιου τύπου με τους αντίστοιχους υποπίνακες του πίνακα A .

Από τον ορισμό των δύο πράξεων που ορίσαμε πριν προκύπτουν οι ιδιότητες.

Πρόταση 1.1 (ιδιότητες πρόσθεσης-βαθμωτού πολ/σμού)

Έστω $A, B, \Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ και $k_1, k_2 \in \mathbb{F}$. Τότε ισχύουν τα εξής.

- | | |
|--|---|
| i) $(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$ | v) $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$ |
| ii) $A + \mathbb{O}_{m \times n} = A$ | vi) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ |
| iii) $A - A = \mathbb{O}_{m \times n}$ | vii) $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$ |
| iv) $A + B = B + A$ | viii) $1A = A$ και $0A = \mathbb{O}_{m \times n}$. |

Άμεση συνέπεια των ορισμών του ανάστροφου και του αναστροφοσυζυγούς πίνακα καθώς και των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πίνακα επί αριθμό είναι οι παρακάτω ιδιότητες.

Πρόταση 1.2 (ανάστροφοι, αναστροφοσυζυγείς πίνακες)

- i) Για κάθε πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ έχουμε $A = (A^t)^t$ και $A = (A^*)^*$.
- ii) Έστω $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(A + B)^t = A^t + B^t$ και $(A + B)^* = A^* + B^*$.
- iii) Έστω $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ και $k \in \mathbb{F}$. Τότε $(kA)^t = kA^t$ και $(kA)^* = \bar{k}A^*$.
- iv) Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, ο πίνακας $A + A^t$ είναι συμμετρικός ενώ ο $A - A^t$ είναι αντισυμμετρικός.
- v) Κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Απόδειξη Προφανώς οι σχέσεις των ανάστροφων πινάκων είναι ειδικές περιπτώσεις των αναστροφοσυζυγών, οπότε οι αποδείξεις τους είναι όμοιες αρκεί να παραλειφθεί η συζυγία των αριθμών. Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

- i) Από τον ορισμό του ανάστροφου πίνακα έχουμε $A^t = (a_{ij})^t = (a_{ji})$ και από τον αναστροφοσυζυγή προκύπτει $A^* = (a_{ij})^* = (\bar{a}_{ji})$, οπότε

$$(A^*)^* = (\overline{a_{ji}})^* = \left(\overline{(\overline{a_{ij}})} \right) = (a_{ij}) = A.$$

ii) Αν $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, από τον ορισμό της πρόσθεσης των πινάκων έχουμε $A + B = (\gamma_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$, οπότε

$$(A + B)^* = \overline{(A + B)^t} = (\overline{\gamma_{ji}}) = (\overline{a_{ji} + b_{ji}}) = A^* + B^*.$$

iii) Για $k \in \mathbb{F}$, έχουμε $(kA)^* = (ka_{ij})^* = (\overline{k} \overline{a_{ji}}) = \overline{k} (\overline{a_{ji}}) = \overline{k} A^*.$

iv) Πράγματι, από την i) και ii) έχουμε

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

και

$$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t).$$

v) Σύμφωνα με το iv) είναι φανερό πως ο πίνακας A γράφεται

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t).$$

◆◆◆

Ορισμός 1.6 (γινόμενο πινάκων)

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$ και $B = (b_{st}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε το **γινόμενο**, AB , των πινάκων A και B , είναι ο πίνακας $AB = (\gamma_{ij}) \in M_{l \times n}(\mathbb{F})$ με στοιχεία από το \mathbb{F} ,

όπου στη θέση (i, j) υπάρχει το στοιχείο $\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}.$

Παρατηρείστε ότι το γινόμενο ορίζεται μόνο όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B και για τις διαστάσεις του πίνακα AB έχουμε

$$\underbrace{A}_{l \times m} \underbrace{B}_{m \times n} = \underbrace{AB}_{l \times n}.$$

Σχηματικά, το στοιχείο του γινομένου AB στη θέση (i, j) προκύπτει από την i -γραμμή του πίνακα A και την j -στήλη του B όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα

$$\begin{pmatrix} \dots & & & \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{im}} & & & \\ \dots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \boxed{b_{1j}} & \dots \\ \dots & \boxed{b_{2j}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \boxed{b_{mj}} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \boxed{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix}$, τότε το γινόμενο AB

ορίζεται γιατί ο πίνακας A είναι 2×3 , άρα έχει τον ίδιο αριθμό στηλών με τον αριθμό γραμμών του B που είναι τύπου 3×3 , το δε γινόμενο AB είναι

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+2b-1c & 3d+2e-1f & 3g+2h-1k \\ -4a+5b+6c & -4d+5e+6f & -4g+5h+6k \end{pmatrix}.$$

Παρατηρείστε ότι το γινόμενο BA δεν ορίζεται.

Επίσης για τους πίνακες-διανύσματα $A = (1 \quad 2 \quad 3)$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, έχουμε τα γινόμενα

$$AB = (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + 2b + 3c \text{ και } BA = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 3) = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ b & 2b & 3b \\ c & 2c & 3c \end{pmatrix}.$$

Έχει ενδιαφέρον να αναφερθούμε στον πολλαπλασιασμό σύνθετων πινάκων, όπου ο τρόπος πολλαπλασιασμού των πινάκων διατηρείται και επιπλέον θα πρέπει να επιτρέπεται και η πραγματοποίηση του πολλαπλασιασμού των στοιχείων-υποπινάκων. Γι' αυτό πρέπει να προσέχουμε τον τρόπο διαμέρισης των σύνθετων πινάκων A, B , ώστε να ορίζεται το γινόμενο AB . Για να συμβαίνει αυτό πρέπει ο τρόπος διαμέρισης των γραμμών του B να είναι ο ίδιος με τον τρόπο διαμέρισης των στηλών του A . Για παράδειγμα, οι σύνθετοι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} K_{2 \times 2} & L_{2 \times 3} \\ M_{3 \times 2} & N_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} P_{2 \times 1} & Q_{2 \times 4} \\ R_{3 \times 1} & T_{3 \times 4} \end{pmatrix}$$

δίνουν γινόμενο

$$AB = \begin{pmatrix} KP + LQ & KQ + LT \\ MP + NT & MQ + TT \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τους ορισμούς 1.4, 1.5 και 1.6 προκύπτουν οι ιδιότητες.

Πρόταση 1.3 (ιδιότητες του γινομένου πινάκων)

i) Έστω $A \in M_{k \times l}(\mathbb{F})$, $B \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $\Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$.

(προσεταιριστική ιδιότητα)

ii) Έστω $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $B, \Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$.

(αριστερά επιμεριστική ιδιότητα)

iii) Έστω $A, B \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $\Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(A + B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$.

(δεξιά επιμεριστική ιδιότητα)

iv) Έστω $k \in \mathbb{F}$, $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

v) Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $I_m A = A I_n = A$, $\mathbb{O}_{l \times m} A = \mathbb{O}_{l \times n}$ και $A \mathbb{O}_{n \times l} = \mathbb{O}_{m \times l}$.

vi) Έστω $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(AB)^t = B^t A^t$ και $(AB)^* = B^* A^*$.

Απόδειξη

i) Έστω οι πίνακες $A = (a_{ij}) \in M_{k \times l}(\mathbb{F})$, $B = (b_{js}) \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $\Gamma = (\gamma_{sv}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$

αρκεί να αποδείξουμε ότι οι πίνακες στα δύο μέλη της ισότητας έχουν τα ίδια στοιχεία στις ίδιες θέσεις. Ας δούμε πρώτα το (p, q) -στοιχείο του πίνακα $(AB)\Gamma$.

Το (p, ω) -στοιχείο του AB είναι το $\sum_{t=1}^l a_{pt} b_{t\omega} = a'_{p\omega}$ άρα το (p, q) -στοιχείο του

$(AB)\Gamma$ είναι

$$\sum_{\omega=1}^m a'_{p\omega} \gamma_{\omega q} = \sum_{\omega=1}^m \left(\sum_{t=1}^l a_{pt} b_{t\omega} \right) \gamma_{\omega q} = \sum_{\omega=1}^m \left(\sum_{t=1}^l (a_{pt} b_{t\omega}) \gamma_{\omega q} \right). \quad (*)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία υπολογίζουμε το (p, q) -στοιχείο του πίνακα

$A(B\Gamma)$. Το (t, q) -στοιχείο του $B\Gamma$ είναι το $\sum_{\omega=1}^m b_{t\omega} \gamma_{\omega q} = c_{tq}$ άρα το (p, q) -στοιχείο

του $A(B\Gamma)$ είναι

$$\sum_{t=1}^l a_{pt} c_{tq} = \sum_{t=1}^l a_{pt} \left(\sum_{\omega=1}^m b_{t\omega} \gamma_{\omega q} \right) = \sum_{t=1}^l \left(\sum_{\omega=1}^m a_{pt} (b_{t\omega} \gamma_{\omega q}) \right) = \sum_{t=1}^l \left(\sum_{\omega=1}^m (a_{pt} b_{t\omega}) \gamma_{\omega q} \right), \quad (**)$$

το τελευταίο τμήμα της (**) ισότητας οφείλεται στην προσεταιριστική ιδιότητα που ισχύει στο \mathbb{F} . Είναι γνωστό ότι

$$\sum_{\omega=1}^m \left(\sum_{t=1}^l (a_{pt} b_{t\omega}) \gamma_{\omega q} \right) = \sum_{t=1}^l \left(\sum_{\omega=1}^m (a_{pt} b_{t\omega}) \gamma_{\omega q} \right),$$

άρα τα (p, q) -στοιχεία των πινάκων $(AB)\Gamma$ και $A(B\Gamma)$ είναι ίσα, συνεπώς $(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$.

ii) Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $B = (b_{st}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ και $\Gamma = (\gamma_{st}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε ο πίνακας $B + \Gamma = (b_{st} + \gamma_{st}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ και ένα (p, q) -στοιχείο του πίνακα $A(B + \Gamma)$ είναι

$$\sum_{k=1}^m a_{pk} (b_{kq} + \gamma_{kq}) = \sum_{k=1}^m (a_{pk} b_{kq} + a_{pk} \gamma_{kq}) = \sum_{k=1}^m a_{pk} b_{kq} + \sum_{k=1}^m a_{pk} \gamma_{kq}.$$

Το τελευταίο είναι το (p, q) -στοιχείο του πίνακα $AB + A\Gamma$, επειδή $\sum_{k=1}^m a_{pk} b_{kq}$ είναι το

(p, q) -στοιχείο του πίνακα AB και $\sum_{k=1}^m a_{pk} \gamma_{kq}$ είναι το (p, q) -στοιχείο του πίνακα

$A\Gamma$. Επομένως η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει με πολλαπλασιασμό επί έναν κατάλληλο πίνακα από αριστερά ενός αθροίσματος πινάκων.

iii) Όμοια απόδειξη με την ii).

iv) Η απόδειξη γίνεται με ανάλογο τρόπο για τα γινόμενα των πινάκων και αφήνεται για άσκηση.

v) Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ και $I_m = (e_{ij}) = \begin{cases} 1, & \alpha \nu \quad i = j \\ 0, & \alpha \nu \quad i \neq j \end{cases}$. Ένα (p, q) -στοιχείο

του $I_m A$ πίνακα είναι $\sum_{k=1}^m e_{pk} a_{kq} = a_{pq}$, το στοιχείο αυτό είναι το (p, q) -στοιχείο του

A . Όμοια και η ισότητα $AI_n = A$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.1 (iii) για

κάποιον $X \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$ και τη δεξιά επιμεριστική ιδιότητα έχουμε

$$\mathbb{O}_{l \times m} \stackrel{\text{Πρ.1.1 (iii)}}{=} (X + (-X)) A \stackrel{\text{επιμ. ιδ. (iii)}}{=} XA + (-X)A = XA - XA \stackrel{\text{Πρ.1.1 (iii)}}{=} \mathbb{O}_{l \times n}.$$

Η επόμενη ισότητα αποδεικνύεται όμοια.

vi) Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$ ο ανάστροφός του είναι $A^t = (a'_{ij}) \in M_{m \times l}(\mathbb{F})$ με

$a'_{ij} = a_{ji}$, αν $B = (b_{st}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, τότε $B^t = (b'_{st}) \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ με $b'_{st} = b_{ts}$. Έτσι, το

(p, q) -στοιχείο του πίνακα $B^t A^t$ είναι

$$\sum_{k=1}^m b'_{pk} a'_{kq} = \sum_{k=1}^m b_{kp} a_{qk} = \sum_{k=1}^m a_{qk} b_{kp}.$$

Το τελευταίο είναι το (q, p) -στοιχείο του πίνακα AB , συνεπώς είναι το (p, q) -στοιχείο του $(AB)^t$. Επομένως, $(AB)^t = B^t A^t$. Η επόμενη ισότητα προκύπτει όμοια, συμπληρώνοντας στην ισότητα τη συζυγία στους αριθμούς. ♦♦♦

Είναι φανερό πως ο πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζεται πάντα όταν οι πίνακες είναι τετραγωνικοί, και στην ειδική περίπτωση που ο πολλαπλασιασμός είναι ανάμεσα στον ίδιο τετραγωνικό πίνακα ορίζεται και η έννοια των δυνάμεων πινάκων.

Ορισμός 1.7 (δυνάμεις πινάκων)

Για έναν τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ορίζεται η k -δύναμη του A ως

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{k-\text{φορές}} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N},$$

με $A^0 = I_n$ και $A^1 = A$.

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τον A^{501} , A^{2006} (και

γενικότερα τις k -στές δυνάμεις του), επειδή $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$,

άρα

$$A^{501} = A^{500} A = (A^2)^{250} A = I^{250} A = IA = A,$$

$$A^{2006} = (A^2)^{1003} = I^{1003} = I$$

Εδώ (επειδή ο πίνακας είναι μικρού τύπου και σχετικά απλός) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι

$$A^2 = I, \quad A^3 = A^2 A = IA = A, \quad A^4 = A^3 A = AA = A^2 = I, \quad A^5 = A^4 A = IA = A, \quad \dots$$

από όπου υποψιαζόμαστε ότι $A^k = \begin{cases} I, & \text{αν } k \text{ άρτιος} \\ A, & \text{αν } k \text{ περιττός.} \end{cases}$

Πράγματι, αν k είναι άρτιος, $k = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, τότε $A^k = A^{2m} = (A^2)^m = I^m = I$,

ενώ αν k είναι περιττός, $k = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, τότε

$$A^k = A^{2m+1} = (A^2)^m A = I^m A = IA = A.$$

Άρα αποδείχθηκε η εικασία $A^k = \begin{cases} I, & \text{αν } k \text{ άρτιος} \\ A, & \text{αν } k \text{ περιττός} \end{cases}$, η οποία επαληθεύει και τα συγκεκριμένα αποτελέσματα για τις δυνάμεις A^{501} και A^{2006} .

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό 1.7 εύκολα αποδεικνύονται οι επόμενες ιδιότητες.

Εφαρμογή 1.4 (ιδιότητες των δυνάμεων πίνακα)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Τότε για κάθε $m, k \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\text{i) } A^m A^k = A^{m+k} \quad \text{ii) } (A^m)^k = A^{mk} \quad \text{iii) } (\lambda A)^k = \lambda^k A^k, \lambda \in \mathbb{F}.$$

iv) Έστω ο διαγώνιος πίνακας $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$A^k = \text{diag}(a_{11}^k, a_{22}^k, \dots, a_{nn}^k).$$

Παρατηρώντας τις ιδιότητες της Πρότασης 1.3 αναρωτιόμαστε αν στον πολλαπλασιασμό πινάκων διατηρούνται πολλές από τις γνωστές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, για παράδειγμα αν οι διαστάσεις των πινάκων είναι κατάλληλες για να ορίζεται η πράξη ισχύει $AB = \mathbb{O} \Rightarrow A = \mathbb{O}$ ή $B = \mathbb{O}$; Ή αναρωτιόμαστε αν αληθεύει η αντιμεταθετική ιδιότητα $AB = BA$ ή μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε αν ισχύουν οι γνωστές ταυτότητες των αριθμών μεταξύ τετραγωνικών πινάκων.

Οι απαντήσεις σε πολλά από τα παραπάνω ερωτήματα είναι αρνητικές όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα.

Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πίνακες $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Υπολογίζουμε

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}, \text{ οπότε προφανώς } \underline{\text{δεν}} \text{ μπορούμε να βγάλουμε κανένα συμπέρασμα}$$

για τους πίνακες A, B , όπως συνέβαινε στους αριθμούς.

Καθώς επίσης αν για τους πίνακες $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $B, \Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, ισχύει $AB = A\Gamma$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε το νόμο της διαγραφής που ισχύει στους αριθμούς δηλαδή $B = \Gamma$, αφού αν οι A, B είναι όπως στο προηγούμενο και $\Gamma = \mathbb{O}_{2 \times 2}$, τότε $AB = \mathbb{O} = A\mathbb{O}$, αλλά $B \neq \mathbb{O}$.

Εφαρμογή-αντιπαράδειγμα 1.5 (ιδιότητες πινάκων)

- Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ δυο τετραγωνικοί πίνακες. Προφανώς ορίζονται τα γινόμενα AB και BA . Τονίζουμε ότι γενικά δεν ισχύει $AB = BA$.

Πράγματι, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, τότε $AB = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ και $BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

- Έστω $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Δεν αληθεύει γενικά $(AB)^2 = A^2B^2$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους πίνακες έχουμε

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad A^2B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 64 \\ 11 & 48 \end{pmatrix}.$$

Σωστό είναι

$$(AB)^2 = ABAB.$$

Η τελευταία εφαρμογή δίνει το έναυσμα για να ορίσουμε και μια άλλη κατηγορία τετραγωνικών πινάκων.

Ορισμός 1.8 (αντιμεταθετικοί πίνακες)

Δύο τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ λέγονται **αντιμεταθετικοί** αν ισχύει $AB = BA$.

Παρατηρούμε ότι **μόνο** αν οι τετραγωνικοί πίνακες A, B είναι **αντιμεταθετικοί**, ισχύουν

$$(AB)^2 = A(BA)B = AAB B = A^2B^2$$

ή

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + (BA) + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Γενικότερα ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες που αποδεικνύονται με τη μέθοδο της επαγωγής.

Εφαρμογή 1.6 (ιδιότητες των δυνάμεων αντιμεταθετικών πινάκων)

Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ και $AB = BA$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύουν

i) $(AB)^k = A^k B^k$

ii) $(A+B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^{k-j} B^j$, όπου $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$, $0! = 1$
(διωνυμικό ανάπτυγμα)

Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι αν $A \in M_n(\mathbb{F})$ σύμφωνα με την Πρόταση 1.3 ν) οι πίνακες A, I είναι αντιμεταθετικοί, συνεπώς γι' αυτούς ισχύει πάντα το διωνυμικό ανάπτυγμα, το οποίο είναι

$$(A+I)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^{k-j}.$$

Έτσι όταν χρειάζεται να υπολογίσουμε τον A^k , όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, γράφουμε

$$\text{τον πίνακα } A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + B. \text{ Επειδή ο } I$$

αντιμετατίθενται με τον B εφαρμόζεται το διωνυμικό ανάπτυγμα, δηλαδή,

$$A^k = (I+B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} I^{k-j} B^j = I + \binom{k}{1} B + \binom{k}{2} B^2 + \binom{k}{3} B^3 + \dots + \binom{k}{k} B^k.$$

Μετά από μερικούς υπολογισμούς έχουμε

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

και προφανώς $B^k = \mathbb{O}$, για κάθε $k \geq 3$.

Συνεπώς στο διωνυμικό ανάπτυγμα απομένουν μόνο τρεις όροι και ο πίνακας είναι

$$\begin{aligned}
 A^k &= I + \binom{k}{1}B + \binom{k}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & ka & ack(k-1)/2 \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Επίσης, όταν γνωρίζουμε συνθήκες που ικανοποιούνται από έναν πίνακα μπορούμε να αποκτήσουμε συμπεράσματα και για τις δυνάμεις κάποιου γραμμικού συνδυασμού του, όπως για παράδειγμα, αν για τον τετραγωνικό πίνακα A , ισχύει $A^2 = 9I$, για τον τετραγωνικό πίνακα $B = \frac{1}{3}(A + 3I)$ ισχύει $B^2 = 2B$.

Πράγματι,

$$B^2 = \frac{1}{9}(A + 3I)^2 = \frac{1}{9}(A^2 + 6A + 9I) \stackrel{A^2=9I}{=} \frac{1}{9}(9I + 6A + 9I) = \frac{2}{3}(A + 3I) = 2B.$$

1.3 Αντίστροφος πίνακας

Μέχρι εδώ ασχοληθήκαμε με το λογισμό των πινάκων ορίζοντας τις πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού, χωρίς να αναφερθούμε στη διαίρεση, άραγε η βασική ιδέα σχετίζεται με κάποια έννοια αντίστροφου πίνακα όπως συνέβαινε στους αριθμούς και πράξη πολλαπλασιασμού;

Ορισμός 1.9 (αντιστρέψιμος πίνακας)

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ λέγεται **αντιστρέψιμος** (invertible) ή **μη ιδιάζων** (nonsingular) αν υπάρχει πίνακας $B \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε $AB = BA = I_n = I$. Ο πίνακας B αν υπάρχει ονομάζεται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται A^{-1} .

Αξίζει να σημειώσουμε ότι αν υπάρχει ο πίνακας B , είναι μοναδικός. Πράγματι, αν υπήρχε και ο \hat{B} ο οποίος ικανοποιούσε την ίδια συνθήκη με τον B , δηλαδή $A\hat{B} = \hat{B}A = I$, τότε

$$\hat{B} = \hat{B}I = \hat{B}(AB) = (\hat{B}A)B = IB = B,$$

συνεπώς αν υπάρχει ο A^{-1} είναι μοναδικός και ισχύει

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n. \quad (1.1)$$

Για παράδειγμα, θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ και εξετάζουμε αν υπάρχει

πίνακας 2×2 για τον οποίο ισχύει η (1.1). Υπολογίζοντας τον A^3 μπορούμε να έχουμε σχέση που να μας οδηγήσει στον αντίστροφο του A . Πράγματι, επειδή

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2,$$

η τελευταία σχέση συνδυάζει τον A και τον μοναδιαίο, οπότε εύκολα επαληθεύεται ο ορισμός 1.9

$$-A^3 = I \Rightarrow A(-A^2) = (-A^2)A = I \Rightarrow A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Όλοι οι πίνακες δεν μπορούν να οδηγούν σύντομα σε συνδυασμούς με τον μοναδιαίο ή ακόμη μπορεί και να μην υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας, όπως διαπιστώνουμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.7 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ και θα εξετάσουμε αν έχει

αντίστροφο, ελέγχοντας αν ισχύει ο παραπάνω ορισμός, μια και δεν μπορούμε να ακολουθήσουμε τη μέθοδο του προηγούμενου παραδείγματος, αφού οι δυνάμεις του A δεν σχετίζονται με τον μοναδιαίο πίνακα. Έστω ότι υπάρχει αντίστροφος και είναι

της μορφής $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ k & l & m \end{pmatrix}$, συνεπώς επαληθεύει τη σχέση

$$AB = I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+6a & 2y+6b & 2z+6c \\ 3x+9a & 3y+9b & 3z+9c \\ -k & -l & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και από την ισότητα των πινάκων έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x+6a=1, \quad 2y+6b=0, \quad 2z+6c=0, \quad 3x+9a=0, \quad 3y+9b=1, \\ 3z+9c=0, \quad -k=0, \quad -l=0 \quad \text{και} \quad -m=1. \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο, αφού πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με -3 και την τέταρτη με 2 και προσθέτοντας τις προκύπτουσες κατά μέλη καταλήγουμε στο

$$0 = -3,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, **δεν** είναι αντιστρέψιμος ο πίνακας A .

Πρόταση 1.8 (ιδιότητες αντιστρέψιμων πινάκων)

- i) Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ με τον πίνακα A αντιστρέψιμο και $AB = \mathbb{O}$, τότε $B = \mathbb{O}$.
- ii) Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ με τον πίνακα B αντιστρέψιμο και $AB = \mathbb{O} \Rightarrow A = \mathbb{O}$.
- iii) Αν $A, B, \Gamma \in M_n(\mathbb{F})$ με τον πίνακα A αντιστρέψιμο και $AB = A\Gamma \Rightarrow B = \Gamma$.
- iv) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.
- v) Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ αντιστρέψιμοι, τότε ο AB είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- vi) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, για κάθε $k \in \mathbb{F}$, $k \neq 0$.

Απόδειξη i) Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1} και έτσι έχουμε με πολλαπλασιασμό της δοθείσας σχέσης με τον A^{-1} και εφαρμογή του ορισμού 1.9 και της Πρότασης 1.3 (v)

$$A^{-1}AB = A^{-1}\mathbb{O} \Rightarrow (A^{-1}A)B = \mathbb{O} \Rightarrow IB = \mathbb{O} \Rightarrow B = \mathbb{O}.$$

ii) Όμοια με την i).

iii) Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει ο A^{-1} , οπότε με πολλαπλασιασμό της $AB = A\Gamma$ με τον A^{-1} και εφαρμογή του ορισμού 1.9 έχουμε $A^{-1}AB = A^{-1}A\Gamma \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)\Gamma \Rightarrow IB = I\Gamma \Rightarrow B = \Gamma$.

iv) Επειδή A αντιστρέψιμος υπάρχει ο A^{-1} , ισχύει η (1.1) στην οποία αν θέσουμε όπου $A \equiv (A^{-1})^{-1}$ έχουμε $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I$, δηλαδή για τον πίνακα A^{-1} ισχύει ο ορισμός 1.9. Επιπλέον, αν χρησιμοποιήσουμε την αντιστρεψιμότητα του A και την Πρόταση 1.3 vi) σταδιακά έχουμε :

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I$$

και

$$(A^{-1})^*A^* = (AA^{-1})^* = I^* = I.$$

Συνεπώς ισχύει ο ορισμός 1.9, επομένως ο $(A^{-1})^*$ ταυτίζεται με τον αντίστροφο του A^* , δηλαδή $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

ν) Επειδή A αντιστρέψιμος **υπάρχει ο** A^{-1} και ισχύει $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, όμοια και για τον B έχουμε $BB^{-1} = B^{-1}B = I$. Υπολογίζοντας τα γινόμενα $(AB)(B^{-1}A^{-1})$ και $(B^{-1}A^{-1})(AB)$ έχουμε

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = I,$$

συνεπώς για τον πίνακα AB ισχύει ο ορισμός 1.9.

vi) Επειδή A αντιστρέψιμος **υπάρχει ο** A^{-1} επομένως ισχύει η (1.1), καθώς επίσης από $k \in \mathbb{F}$, $k \neq 0$ έχουμε $kk^{-1} = 1$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές και την Πρόταση 1.3 iv παίρνουμε

$$(kA)(k^{-1}A^{-1}) = (kk^{-1})(AA^{-1}) \stackrel{(1.1)}{=} 1 \cdot I = I,$$

$$(k^{-1}A^{-1})(kA) = (k^{-1}k)(A^{-1}A) \stackrel{(1.1)}{=} 1 \cdot I = I,$$

άρα για τον kA ισχύει ο ορισμός 1.9 και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ◆◆◆

Η ύπαρξη και ο υπολογισμός αντιστρόφου πίνακα θα μελετηθεί στο κεφάλαιο ορίζουσες, ωστόσο για 2×2 είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε την προϋπόθεση ύπαρξης και τη μορφή του αντίστροφου, όπως φαίνεται με την επόμενη εφαρμογή.

Εφαρμογή 1.9 (υπολογισμός αντιστρόφου 2×2 πίνακα)

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με $ad - bc \neq 0$. Τότε $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Πράγματι, εύκολα επαληθεύουμε τον ορισμό 1.9, αφού

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - dc & -cb + ad \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

και όμοια υπολογίζουμε και $A^{-1}A = I$.

Παράδειγμα 1.10 Να υπολογισθεί ο πίνακας A , αν γνωρίζουμε ότι ισχύει

$(A^t - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.8 (iv) και την Εφαρμογή 1.9

έχουμε

$$A^t - 2I = \left((A^t - 2I)^{-1} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως είναι

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ άρα } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.4 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 1.11 Να γραφούν σε μορφή γινομένου πραγματικών πινάκων τα αθροίσματα:

i) $q_1 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

ii) $q_2 = a_{11}x_1^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4$

Απόδειξη i) Έχουμε $q_1 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t \mathbf{x}$, όπου

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}).$$

ii) Αν θεωρήσουμε το συμμετρικό πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$,

ο οποίος έχει στοιχεία τους συντελεστές της q_2 και τον πίνακα-στήλη $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, τότε

μπορούμε να υπολογίσουμε πως ισχύει

$$q_2 = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} . \quad \diamond \diamond \diamond$$

Παράδειγμα 1.12 Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογισθούν οι πίνακες AA^t και

$A^t A$ και να αποδειχθεί ότι αυτοί είναι συμμετρικοί.

Απόδειξη Ο πίνακας $AA^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$ και

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ οι οποίοι είναι συμμετρικοί.}$$

Γενικότερα για έναν πίνακα $A_{m \times n}$ οι πίνακες $B = AA^t$ και $C = A^t A$ είναι τετραγωνικοί πίνακες και για καθέναν από αυτούς επαληθεύεται ο ορισμός του συμμετρικού πίνακα ($B^t = B$) αν αξιοποιήσουμε τις ιδιότητες των ανάστροφων πινάκων. Συγκεκριμένα,

$$B^t = (AA^t)^t \stackrel{\text{Πρ.1.3(vi)}}{=} (A^t)^t A^t \stackrel{\text{Πρ.1.2(i)}}{=} AA^t = B$$

και

$$C^t = (A^t A)^t \stackrel{\text{Πρ.1.3(vi)}}{=} A^t (A^t)^t \stackrel{\text{Πρ.1.2(i)}}{=} A^t A = C. \quad \blacklozenge \blacklozenge \blacklozenge$$

Παράδειγμα 1.13 Να υπολογισθούν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες X , για τους οποίους ισχύει $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Απόδειξη Ο πίνακας X πρέπει να είναι ένας 2×2 πίνακας, έστω ότι είναι ο $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Επαληθεύοντας τη δοθείσα ισότητα έχουμε

$$X^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x+w) \\ z(x+w) & w^2 + yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα που περιγράφεται παρακάτω από τις ισότητες (1) και (3).

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + yz = 4 \\ w^2 + yz = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \boxed{(1)} \\ \Rightarrow (x-w)(x+w) = 0 \Rightarrow x = w \text{ ή } x = -w \end{array} \quad \boxed{(2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(x+w) = 1 \\ z(x+w) = 0 \end{array} \right\} \boxed{(3)}$$

Αφαιρώντας τις ισότητες του (1) καταλήγουμε στις σχέσεις (2), η δεύτερη από αυτές δεν μπορεί να επαληθεύσει την πρώτη ισότητα του (3), γι' αυτό την απορρίπτουμε και μάλιστα $x = w \neq 0$ για να επαληθεύεται ταυτόχρονα και η πρώτη ισότητα του (3). Συνεπώς από τη δεύτερη του (3) προκύπτει $z = 0$ και έτσι οι εξισώσεις του (1) γίνονται $x^2 = w^2 = 4 \Rightarrow x = w = \pm 2$.

Επομένως για $x = w = 2$ η πρώτη του (3) δίνει $y = \frac{1}{4}$, οπότε $X = \begin{pmatrix} 2 & 1/4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ενώ για

$x = w = -2$ έχουμε $y = -\frac{1}{4}$, δηλαδή ο πίνακας είναι $X = \begin{pmatrix} -2 & -1/4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. ♦♦♦

Παράδειγμα 1.14 Αν ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ επαληθεύει την ισότητα $A^n + A^{n-1} + \dots + A^2 + A + I = \mathbb{O}$, ο αντίστροφός του είναι $A^{-1} = A^n$.

Απόδειξη Η δοθείσα ισότητα δίνει

$$A^n = -A^{n-1} - \dots - A^2 - A - I, \quad (*)$$

καθώς επίσης γράφεται και $A^n + A^{n-1} + \dots + A^2 + A = -I$ από όπου έχουμε

$$\Rightarrow A(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I) = (A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I)A = -I$$

$$\Rightarrow A(-A^{n-1} - A^{n-2} - \dots - A - I) = (-A^{n-1} - A^{n-2} - \dots - A - I)A = I$$

και οι τελευταίες ισότητες με αντικατάσταση της (*) γράφονται $AA^n = A^nA = I$.

Συνεπώς επαληθεύεται ο Ορισμός 1.9, άρα $A^{-1} = A^n$. ♦♦♦

Παράδειγμα 1.15 Έστω ότι ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ επαληθεύει την ισότητα

$$A^2 - A + I = \mathbb{O}. \quad (*)$$

i) Οι πίνακες A , $A - 2I$ είναι αντιστρέψιμοι.

ii) Απλοποίηση των παραστάσεων $A^5 + 2A^3 - 5A^2 + 6A + I$ και $A^4(A - I)^5 - I$.

Απόδειξη i) Από την υπόθεση έχουμε τη σχέση

$$A(A - I) = (A - I)A = -I \Rightarrow A(-A + I) = (-A + I)A = I. \quad (**)$$

Συνεπώς ο πίνακας A ικανοποιεί τον ορισμό 1.9 άρα είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = -A + I$.

Θέτοντας $B = A - 2I$ έχουμε $A = B + 2I$ και με αντικατάστασή της στην (*) αποκτούμε

$$(B + 2I)^2 - (B + 2I) + I = \mathbb{O} \Rightarrow B^2 + 3B + 3I = \mathbb{O} \Rightarrow B(B + 3I) = (B + 3I)B = -3I$$

οπότε

$$B\left(-\frac{1}{3}(B + 3I)\right) = \left(-\frac{1}{3}(B + 3I)\right)B = I$$

συνεπώς ο B επαληθεύει τον ορισμό 1.9, δηλαδή είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφο

$$B^{-1} = -\frac{1}{3}(B + 3I), \text{ άρα ο } A - 2I \text{ είναι αντιστρέψιμος με } (A - 2I)^{-1} = -\frac{1}{3}(A + I).$$

ii) Από τη ζητούμενη παράσταση πινάκων και την (*) σχηματίζουμε τα αντίστοιχα

πολυώνυμα $x^5 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 1$, $x^2 - x + 1$. Από τον αλγόριθμο διαίρεσης

πολυωνύμων βρίσκουμε ότι $x^5 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 + 2x - 4) + 5$

$$\text{και άρα } A^5 + 2A^3 - 5A^2 + 6A + I = \underbrace{(A^2 - A + I)}_{\mathbb{O}}(A^3 + A^2 + 2A - 4I) + 5I = 5I.$$

Για την απλοποίηση της δεύτερης παράστασης από την (**) χρειαζόμαστε την

$$A(-A + I) = I \text{ και αξιοποιώντας ιδιότητες πινάκων έχουμε}$$

$$\begin{aligned} A^4(A - I)^5 - I &= A^4(A - I)^4(A - I) - I \\ &= A^4\{(-1)(-A + I)\}^4(A - I) - I \\ &= A^4(-A + I)^4(A - I) - I \\ &\stackrel{(**)}{=} \underbrace{(A(-A + I))}_I^4(A - I) - I = A - I - I \\ &= A - 2I. \end{aligned}$$

Επισημάνση: Σημειώσαμε $A^4(-A + I)^4 = (A(-A + I))^4$ γιατί από την (**) οι πίνακες

A και $-A + I$ είναι αντιμεταθετικοί (βλέπε εφαρμογή 1.6 i)).

◆◆◆

Εφαρμογή 1.16 (ιδιότητες ίχνους) Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχουμε

$$\text{i) } tr(A + B) = trA + trB$$

$$\text{ii) } tr(\lambda A) = \lambda trA \text{ με } \lambda \in \mathbb{F},$$

$$\text{iii) } tr(AB) = tr(BA)$$

$$\text{iv) } tr(A^t) = trA.$$

Απόδειξη Αν $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ τότε από τους ορισμούς του ίχνους

πίνακα και των πράξεων έχουμε

$$\begin{aligned} \text{i) } tr(A + B) &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \cdots + (a_{nn} + b_{nn}) \\ &= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn}) \\ &= trA + trB. \end{aligned}$$

ii) Επίσης, $tr(\lambda A) = (\lambda a_{11}) + (\lambda a_{22}) + \cdots + (\lambda a_{nn}) = \lambda(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) = \lambda tr A$.

iii) Έστω $AB = (\gamma_{st}) \in M_n(\mathbb{F})$, συνεπώς τα διαγώνια στοιχεία θα είναι της μορφής

$\gamma_{jj} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{kj}$, οπότε για το ίχνος έχουμε

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{j=1}^n \gamma_{jj} = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \cdots + \gamma_{nn} = \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} + \sum_{k=1}^n a_{2k} b_{k2} + \cdots + \sum_{k=1}^n a_{nk} b_{kn} \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{1k} b_{k1} + a_{2k} b_{k2} + \cdots + a_{nk} b_{kn}) = \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n a_{tk} b_{kt}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ομοια, αν $BA = (\beta_{st}) \in M_n(\mathbb{F})$, τότε

$$\begin{aligned} tr(BA) &= \beta_{11} + \beta_{22} + \cdots + \beta_{nn} = \sum_{t=1}^n b_{1t} a_{t1} + \sum_{t=1}^n b_{2t} a_{t2} + \cdots + \sum_{t=1}^n b_{nt} a_{tn} \\ &= \sum_{t=1}^n (b_{1t} a_{t1} + b_{2t} a_{t2} + \cdots + b_{nt} a_{tn}) = \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^n b_{kt} a_{tk}. \end{aligned} \quad (2)$$

Η αντιμεταθετική ιδιότητα των αριθμών οδηγεί στην ισότητα των ποσοτήτων στα δεξιά μέλη των σχέσεων (1) και (2), συνεπώς $tr(AB) = tr(BA)$.

iv) Επειδή στους τετραγωνικούς πίνακες A και ο A^t έχουν τα ίδια διαγώνια στοιχεία η ισότητα είναι προφανής. ◆◆◆

Εφαρμογή 1.17 Έστω ο σύνθετος πίνακας $K = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbb{O} & \Gamma \end{pmatrix}$ με $A \in M_m(\mathbb{F})$,

$B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ και $\Gamma \in M_n(\mathbb{F})$. Να δείξετε ότι ο σύνθετος πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν οι πίνακες A , Γ είναι αντιστρέψιμοι και τότε ισχύει

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbb{O} & \Gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B\Gamma^{-1} \\ \mathbb{O} & \Gamma^{-1} \end{pmatrix}.$$

Απόδειξη Έστω ότι ο K είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφό του τον πίνακα Λ , (στον οποίο έχουμε σημειώσει ως δείκτες τις διαστάσεις των στοιχείων-πινάκων) με

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \hat{A}_{m \times m} & \hat{B}_{m \times n} \\ \hat{\Delta}_{n \times m} & \hat{\Gamma}_{n \times n} \end{pmatrix}. \text{ Από τον ορισμό 1.9 ισχύει}$$

$$K\Lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbb{O} & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_{m \times m} & \hat{B}_{m \times n} \\ \hat{\Delta}_{n \times m} & \hat{\Gamma}_{n \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\hat{A}_{m \times m} + B\hat{\Delta}_{n \times m} & A\hat{B}_{m \times n} + B\hat{\Gamma}_{n \times n} \\ \Gamma\hat{\Delta}_{n \times m} & \Gamma\hat{\Gamma}_{n \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O}_{m \times n} \\ \mathbb{O}_{n \times m} & I_n \end{pmatrix}.$$

Η ισότητα των πινάκων δίνει το σύστημα

$$A\hat{A}_{m \times m} + B\hat{A}_{n \times m} = I_m, \quad A\hat{B}_{m \times n} + B\hat{\Gamma}_{n \times n} = \mathbb{O}_{m \times n}, \quad \Gamma\hat{A}_{n \times m} = \mathbb{O}_{n \times m} \quad \text{και} \quad \Gamma\hat{\Gamma}_{n \times n} = I_n.$$

Επειδή ο Γ είναι αντιστρέψιμος, η τελευταία εξίσωση του συστήματος δίνει $\hat{\Gamma}_{n \times n} = \Gamma^{-1}$. Στηριζόμενοι στην αντιστρεψιμότητα του Γ και στην Πρόταση 1.8 i) αποκτούμε από την προτελευταία εξίσωση του παραπάνω συστήματος $\hat{A}_{n \times m} = \mathbb{O}$. Η πρώτη εξίσωση δίνει $\hat{A}_{m \times m} = A^{-1}$, αφού ο A είναι αντιστρέψιμος και η δεύτερη δίνει $A\hat{B}_{m \times n} = -B\hat{\Gamma}_{n \times n} \Rightarrow \hat{B}_{m \times n} = -A^{-1}B\hat{\Gamma}_{n \times n} = -A^{-1}B\Gamma^{-1}$. Έτσι καταλήγουμε στον

$$A = \begin{pmatrix} \hat{A}_{m \times m} & \hat{B}_{m \times n} \\ \hat{A}_{n \times m} & \hat{\Gamma}_{n \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B\Gamma^{-1} \\ \mathbb{O} & \Gamma^{-1} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε πως οι πίνακες A, Γ είναι αντιστρέψιμοι τότε ορίζεται ο πίνακας A , όπως υπολογίσθηκε στην (*) και εύκολα διαπιστώνεται η ισότητα $KA = AK = I$.

Σημείωση : Ανάλογα αποδεικνύεται ότι όταν οι πίνακες $A \in M_m(\mathbb{F})$, $\Gamma \in M_n(\mathbb{F})$

είναι αντιστρέψιμοι τότε ο πίνακας $K = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ B & \Gamma \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει

$$\begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ B & \Gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbb{O} \\ -\Gamma^{-1}BA^{-1} & \Gamma^{-1} \end{pmatrix}. \quad \dots$$

Εφαρμογή 1.18 (συμπλήρωμα Schur) Έστω ο σύνθετος πίνακας $K = \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}$,

όπου ο πίνακας $A \in M_m(\mathbb{F})$ να είναι αντιστρέψιμος, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $\Gamma \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ και $\Delta \in M_n(\mathbb{F})$. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο του σύνθετου πίνακα K , όταν αυτός υπάρχει.

Απόδειξη Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος υπάρχει ο A^{-1} και κάνοντας πράξεις μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι ισχύει

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O} \\ \Gamma A^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Delta - \Gamma A^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A^{-1}B \\ \mathbb{O} & I_n \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Θεωρώντας ότι και ο πίνακας $\Delta - \Gamma A^{-1}B$ είναι αντιστρέψιμος, από την Πρόταση 1.8(v), έχουμε

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & A^{-1}B \\ \mathbb{O} & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Delta - \Gamma A^{-1}B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O} \\ \Gamma A^{-1} & I_n \end{pmatrix}^{-1}.$$

Από την Εφαρμογή 1.17 μπορούμε να υπολογίσουμε τους αντίστροφους πίνακες, οι οποίοι είναι

$$\begin{pmatrix} I_m & A^{-1}B \\ \mathbb{O} & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_m^{-1} & -I_m^{-1}A^{-1}BI_n^{-1} \\ \mathbb{O} & I_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ \mathbb{O} & I_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Delta - \Gamma A^{-1}B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (\Delta - \Gamma A^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix},$$

ως αντίστροφος διαγώνιου πίνακα, και

$$\begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O} \\ \Gamma A^{-1} & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_m^{-1} & \mathbb{O} \\ -I_n^{-1}\Gamma A^{-1}I_m^{-1} & I_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O} \\ -\Gamma A^{-1} & I_n \end{pmatrix}.$$

Έτσι προκύπτει ότι αν οι πίνακες A και $\Delta - \Gamma A^{-1}B$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ \mathbb{O} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (\Delta - \Gamma A^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O} \\ -\Gamma A^{-1} & I_n \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Στη βιβλιογραφία ο πίνακας $\Delta - \Gamma A^{-1}B$ είναι γνωστός ως *συμπλήρωμα Schur*.

Σημείωση : Ανάλογα αποδεικνύεται ότι στο σύνθετο πίνακα $\begin{pmatrix} A_{m \times m} & B_{m \times n} \\ \Gamma_{n \times m} & \Delta_{n \times n} \end{pmatrix}$, όταν ο

πίνακας $\Delta \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος, ισχύει

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & B\Delta^{-1} \\ \mathbb{O} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - B\Delta^{-1}\Gamma & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Delta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O} \\ \Delta^{-1}\Gamma & I_n \end{pmatrix}$$

και επιπλέον όταν ο πίνακας $A - B\Delta^{-1}\Gamma$ είναι αντιστρέψιμος, έχουμε

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbb{O} \\ -\Delta^{-1}\Gamma & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A - B\Delta^{-1}\Gamma)^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Delta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -B\Delta^{-1} \\ \mathbb{O} & I_n \end{pmatrix}.$$

◆◆◆