ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - Πίνακες, Γραμμικά Συστήματα

Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ

Λαμία, 16/10/2014

1. i) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να αποδείξετε ότι

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2^n+2 & -2^n+1 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

για κάθε θετικό ακέραιο n.

ii) Αν $A = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, να αποδείξετε ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1-3n & -9n \\ n & 1+3n \end{pmatrix}$, για κάθε φυσικό αριθμό n, και στη συνέχεια να υπολογίσετε τον πίνακα A^{2012}.

iii) Έστω ένας $k \times k$ πίνακας A με $A^2 = A$. Να αποδείξετε ότι

$$(A-I)^n = \begin{cases} I-A, & n = 2r, \ r \in \mathbb{N} \\ A-I, & n = 2r+1, \ r \in \mathbb{N} \end{cases},$$

και στη συνέχεια να υπολογίσετε τους πίνακες $(A-I)^{2011}$ και $(A-I)^{2012}$.

2. Δίνονται οι πίνακες $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T$ και $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$.
Αν P ο πίνακας

$$P = \frac{\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1^T}{\|\boldsymbol{x}_1\|^2} + \frac{\boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{x}_2^T}{\|\boldsymbol{x}_2\|^2}.$$

Να αποδείξετε ότι ισχύουν : $P^4 = P^2 = P$, $(I-P)^4 = (I-P)^2 = I-P$.

3. i) Αν το διάνυσμα $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ είναι μοναδιαίο, αποδείξατε ότι ο πίνακας $H = I - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^t$ είναι συμμετρικός και ορθογώνιος.

ii) Αν $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, να αποδείξετε ότι ισχύουν οι ισότητες

$$J_n^2 = nJ_n \quad \text{και} \quad (I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1} J_n.$$

4. i) Έστω οι $n\times n$ πίνακες A,B με $A^2=A$ και $B^2=B$. Να αποδείξετε ότι

$$(A+B)^2=A+B \quad \text{αν και μόνο αν} \quad AB=BA=\mathbf{0}.$$

ii) Αν A,B είναι $n\times n$ πίνακες με $\det A=-2$ και $\det B=5$, να υπολογίσετε την ορίζουσα των πινάκων: AB^2, $(A^{-1})^T B$, $(3A)^2 B^T$, $(2B^{-1})^3 A^T$.

iii) Αν για τους $n\times n$ πίνακες A,B ισχύει $AB^3+4I=-A$, να αποδείξετε ότι ο A αντιστρέφεται και να εκφράσετε τον A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό των δυνάμεων του B.

iv) Να αποδείξετε τις ισότητες, όταν οι αντίστροφοι πίνακες που εμφανίζονται υπάρχουν:

a) $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$

b) $(I_n+AB)^{-1}A=A(I_n+BA)^{-1}$

c) $(A+BB^T)^{-1}B=A^{-1}B(I_n+B^TA^{-1}B)^{-1}$

5. Έστω $A=\begin{pmatrix}6&2&8\\9&5&11\\3&1&6\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}2&0&0\\a&b&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ και $U=\begin{pmatrix}c&1&4\\0&2&-1\\0&0&k\end{pmatrix}$. Να βρεθούν τα στοιχεία $a,b,c,k\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $A=LU$ και χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση να λύσετε το σύστημα $A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&3&-2\end{pmatrix}^t$.

6. Αν $A=\begin{pmatrix}5&-2&1\\2&-1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$, βρείτε έναν πίνακα X έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$A^tX+A=I_3.$$

7. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&0\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-2\\-2&-3\\2&4\end{pmatrix}$ και $\Gamma=\begin{pmatrix}4&-3&1\\-1&2&0\\5&7&3\end{pmatrix}$.

i) Να υπολογισθεί ο πίνακας Γ^{-1}, αν υπάρχει.

ii) Να υπολογισθεί ο πίνακας X, ώστε

$$\Gamma X+B=2A.$$

iii) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να υπολογίσετε τις ορίζουσες των πινάκων -5Γ, $2\Gamma^t$, Γ^{-t} και Γ^3.

8. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

i) Να υπολογισθούν οι πίνακες A^{-1} και A^{-t}, αν υπάρχουν.

ii) Να βρεθεί ο πίνακας Y, τέτοιος ώστε $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

iii) Να βρεθεί ο πίνακας $Y^t Y$. Τι παρατηρείτε;

9. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρείτε

i) αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και σε περίπτωση θετικής απάντησης να υπολογίσετε A^{-1} .

ii) έναν πίνακα X έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$AXA^T + A^T A = 2I_3 .$$

10. Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ή στηλών, υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ a & b & c & d \\ 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix}$$

όπου $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια για τις διάφορες τιμές των $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, όπου $\boldsymbol{b} = (1\ \ 2\ \ -2\ \ 4)^t$.

11. Δίνεται το σύστημα γραμμικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} x + y + z &= -1 \\ x - ay + z &= a \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

i) Να λύσετε το σύστημα για όλες τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$.

ii) Για την τιμή $a = 0$, να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A των συντελεστών του συστήματος και να υπολογίσετε τη n-οστή δύναμη του A.

12. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $k, a \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{aligned}(k-1)x \quad +y \qquad\qquad &= a\\ 4x \quad +(k-3)y \quad +2z &= 2\\ -2y \quad +(k-1)z &= -a\end{aligned}$$

Να δοθεί η μορφή των λύσεων, όπου υπάρχουν .

13. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} kx+4y+6z=0\\ x+ky+3z=0\\ -x-2y+(k-5)z=a-1\end{cases}.$$

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές των k, a να λυθεί το παραπάνω σύστημα ώστε να έχει: i) μοναδική λύση, ii) άπειρες λύσεις, iii) καμία λύση
και στη συνέχεια να βρεθούν οι μορφές των λύσεων όπου αυτές υπάρχουν.

14. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{aligned}&(k-1)x_1+(k-1)x_2=1-k\\ &x_1+kx_2+kx_3=k-1\\ &(k^2-k)x_1+(k^2-k)x_3=0\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματά σας, δώστε τις λύσεις όταν $k=3$.

15. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τα $a,b,c,k\in\mathbb{R}$ ώστε το σύστημα

$$\begin{aligned}x-y-3z+2w&=a\\ 3y-12z+bw&=2\\ 2x-3y-2z+w&=c\\ 3x-y-12z+kw&=4\end{aligned}$$

να έχει άπειρες λύσεις. Στη συνέχεια για τις τιμές των a,b,c,k που υπολογίστηκαν, να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος.