Διάδοση σφαλμάτων

Α) Πρόσθεση και αφαίρεση μεγεθών

Εάν ένα μέγεθος z προκύπτει από πρόσθεση ή και αφαίρεση άλλων μεγεθών x_i που βαρύνονται με σφάλματα Δx_i ($z = a_1 x_1$ +(-) $a_2 x_2$ +(-) …), τότε το σφάλμα του μεγέθους z (Δz) θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta z = \sqrt{(a_1 \Delta x_1)^2 + (a_2 \Delta x_2)^2 + (a_3 \Delta x_3)^2 + \dots} \qquad \textbf{(1)}$$

ή κατά προσέγγιση

$$\Delta z = a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + a_3 \Delta x_3 + \dots \qquad \textbf{(2)}$$

Ο δεύτερος τύπος υπερεκτιμά κάπως το σφάλμα.

Παράδειγμα 1:

Έστω ότι μετρήθηκαν οι πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και βρέθηκαν να είναι:

x = (6,2 ± 0,5) cm, y = (4,0 ± 0,4) cm

Να υπολογισθεί η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

z = 2x + 2y = 2·6,2 + 2·4,0 = 20,4 cm

Με την βοήθεια της (2) Δz = 2Δx + 2Δy = 2·0,5 + 2·0,4 = 1,8 cm

⇒ z = (20,4 ± 1,8) cm

Εφαρμόζοντας την (1) $\Delta z = \sqrt{(2 \cdot 0{,}5)^2 + (2 \cdot 0{,}4)^2} = 1{,}28$ cm

Παράδειγμα 2:

Έστω η ακτίνα ενός κύκλου μετρήθηκε ότι είναι r = (4,2 ± 0,5) cm. Να υπολογισθεί η περιφέρεια του κύκλου c.

c = 2π·r = 2·3,14159·4,2 = 26,39 cm

Δc = 2·3,14159·0,5 = 3,14 cm

c = (26,4 ± 3,1) cm

Παράδειγμα 3:

Έστω ότι το μέγεθος z προκύπτει από την σχέση z = x – 2y, με x = (2,0 ± 0,2) cm και y = (3,0 ± 0,6) cm. Να υπολογισθεί το σφάλμα Δz του μεγέθους z.

z = x - 2y = 2,0 - 2·3,0 = -4,0 cm

Δz = Δx + 2 Δy = 0,2 + 1,2 = 1.4 cm

z = (-4,0 ± 1,4) cm.

Εφαρμόζοντας την (1) το σφάλμα του δευτέρου όρου θα είναι 2·0,6 cm = 1,2 cm και

$$\Delta z = \sqrt{0,2^2 + 1,2^2} = 1,21$$

Γ) Πολλαπλασιασμός ή διαίρεση μεγεθών

Εάν ένα μέγεθος z προκύπτει από πολλαπλασιασμό ή διαίρεση των μεγεθών x_i που βαρύνονται με σφάλματα Δx_i, τότε το σχετικό σφάλμα δz = Δz/z του μεγέθους z θα δίνεται από την σχέση:

$$\delta z = \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{(\delta z_1)^2 + (\delta z_2)^2 + (\delta z_3)^2 + \ldots} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3}{x_3}\right)^2 + \ldots} \quad \textbf{(3)}$$

ή κατά προσέγγιση

$$\delta z = \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + \ldots = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3} + \ldots \quad \textbf{(4)}$$

Ο ίδιος κανόνας ισχύει και συνδυασμούς πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Παράδειγμα 4:

Να υπολογισθεί το εμβαδόν Ε για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του παραδείγματος 1. x = (6,2 ± 0,5) cm, y = (4,0 ± 0,4) cm

E = x·y = 6,2·4,0 = 24,8 cm^2

$\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0,5}{6,2} = 0,08$, $\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{0,4}{4,0} = 0,1 \Rightarrow \delta E = \frac{\Delta E}{E} = 0,08 + 0,1 = 0,18 \Rightarrow$ ΔE =

24,8·0,18 = 4,64 cm^2

E = (24,8 ± 4,6) cm^2