Έστω, ότι ένα δείγμα ελέγχου χρησιμοποιήθηκε σε ένα πείραμα ελέγχου ποιότητας μιας μεθόδου για 30 συνεχόμενες ημέρες. Η θεωρητική (ισχυριζόμενη) συγκέντρωση της γλυκόζης στο δείγμα αυτό είναι 1120 mg/L.
Ο πειραματικός μέσος είναι 1110 mg/L και η τυπική απόκλιση 25 mg/L.
Είναι η μέση τιμή των δεδομένων σημαντικά διαφορετική από την θεωρητική τιμή;

H_0 : $\bar{y} = \mu$

H_1 : $\bar{y} \neq \mu$

$\mu =$ **1120**

$\bar{y} =$ **1110**

$s =$ **25**

$$t = \frac{\bar{y} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = -2.19$$

Ο πίνακας της κατανομής "t" για β.ε.= 29 και a/2=0.025 δίνει κρίσιμο t=2.045.
Άρα η μέση τιμή των μετρήσεων της γλυκόζης είναι σημαντικά διαφορετική από την θεωρητική.

x_A = 74 από 250 ασθενείς που πήραν το φάρμακο Α βελτίωσαν την κατάστασή τους.
x_B = 92 από 250 ασθενείς που πήραν το φάρμακο Β βελτίωσαν την κατάστασή τους.
i) Μπορούμε να δεχθούμε ότι και τα δύο φάρμακα έχουν την ίδια αποτελεσματικότητα; (a=0.05)
ii) Δώστε ένα 98% δ.ε. για τη διαφορά του αποτελέσματος των φαρμάκων.

H_0: $p_A=p_B$

H_1: $p_A<>p_B$

$p_A = x_A/n = 74/250 = 0,296$ $\quad$ $p_B = x_B/n = 92/250 = 0,368$

$p_{AB} = (x_A+x_B)/(n+m) = (74+92)/500 = 0,332$

z = -1.709 Για a=0.05 **$Z_{a/2}$ = 1,96**

Επειδή $|z| < Z_{a/2}$ μπορούμε να δεχθούμε ότι τα δύο φάρμακα έχουν την ίδια αποτελεσματικότητα

Το διάστημα εμπιστοσύνης 98% (a/2=0,01) για τη διαφορά θα είναι ($Z_{a/2}$=2.33) :

$p_A - p_B$ +/- $Z_{a/2}$*sqrt[$p_A(1-p_A)/250+p_B(1-p_B)/250$)] **(-0,17, 0,026)**

Το ερώτημα μπορεί να απαντηθεί και με την δοκιμασία χ^2

Παρατηρούμενες

Φάρμακο	Βελτίωση	Μη Βελτ.	Σύνολο
Α	74	176	250
Β	92	158	250
Σύνολο	166	334	500

Θεωρητικές

Φάρμακο	Βελτίωση	Μη Βελτ.	Σύνολο
Α	83	167	250
Β	83	167	250
Σύνολο	166	334	500

χ^2= 2.922 με β.ε =1 και a=0.05 το κρίσιμο χ^2=3.841

Αρα αποδεχόμαστε ότι τα δύο φάρμακα είναι το ίδιο αποτελεσματικά

Από 150 ασθενείς, στους n=80 δώσαμε χάπι με ζάχαρη και στους m=70 δώσαμε ασπιρίνες. Μετά από μια εβδομάδα βρέθηκε ότι βελτιώθηκε η υγεία x=48 ασθενών που πήραν χάπι ζάχαρης και y=56 που πήραν ασπιρίνη.

(i) Μπορούμε να δεχθούμε ότι η θεραπεία με ασπιρίνες είναι προτιμότερη σε σ.σ. 0.05;

(ii) Να δοθεί δ.ε. 95% για τη διαφορά των ποσοστών p_1, p_2 (p_1=ποσοστό ασθενών που βελτιώθηκε η υγεία τους με χάπι ζάχαρης, p_2=ποσοστό ασθενών που βελτιώθηκε η υγεία τους με ασπιρίνη).

Ζάχαρη		Ασπιρίνη	
$p_1 = x/n =$	0.60	$p_2 = y/m =$	0.80

Η κοινή αναλογία των επιτυχιών είναι p=(x+y)/(n+m)= 0.693

(i) H_0: $p_1 = p_2$

H_1: $p_1 < p_2$

Αφού τα δείγματα είναι μεγάλα το στατιστικό που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το Ζ. Έτσι:

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} = -2.65$$

Για a=0.05 Φ=0.45 άρα z_c=1.645. Επειδή $z<-z_c$, συμπεραίνουμε ότι δεχόμαστε την H_1.

(ii) Το δ.ε. για την διαφορά p_1-p_2 θα δίνεται από τον τύπο:

$$p_1 - p_2 \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}+\frac{p_2(1-p_2)}{m}}$$

Για a/2=0.025 έχουμε Φ=0.475 άρα $z_{a/2}$=1.96.

με $\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}+\frac{p_2(1-p_2)}{m}} =$ 0.072703 έχουμε:

$$\mathbf{-0.343 < p_1-p_2 < -0.058}$$

Δύο δίαιτες Α,Β εφαρμόσθηκαν σε δύο σειρές ποντικών επί μια εβδομάδα.
Υποθέτοντας ότι η αύξηση του βάρους τους ακολουθεί την κανονική κατανομή
(i) να εξετασθεί αν $\sigma^2_A=\sigma^2_B$ για α=0.10,
(ii) να δοθεί 95% δ.ε. για τη διαφορά $\mu_A-\mu_B$

A Αύξ. Βάρ. [gr]
78.1
72.4
76.2
74.3
77.4
78.4
76.0

B Αύξ. Βάρ. [gr]
79.1
81.0
77.3
79.1
80.0
79.1
79.1
77.3
80.2

meanA= 76.1
s^2_A= 4.65
n_A= 7
meanB= 79.1
s^2_B= 1.51
n_B= 9

H_0: $\sigma_A^2/\sigma_B^2=1$

H_1: $\sigma_A^2/\sigma_B^2<>1$

s_A^2/s_B^2= 3.08 $\nu_A=6,\ \nu_B=8$ **$F_{\nu A,\nu B;a/2}$=** 4.15

Άρα μπορούμε να δεχθούμε ότι οι διασπορές δεν διαφέρουν

H_0: $\mu_A-\mu_B=0$

H_1: $\mu_A-\mu_B<>0$ **$t_{16-2;0,025}$= 2.145**

s=Σταθμ. Διακ.= $$s=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$ = 1.83

$$t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$ = **-3.253**

$|t| > t_{16-2;0,025}$ $\Rightarrow$ **οι μέσοι διαφέρουν σημαντικά**

Σε 12 αυτοκίνητα τεσσάρων διαφορετικών τύπων (Α,Β,Γ,Δ) βάλαμε 10 lt βενζίνης.
Η απόσταση σε km που διανύθηκε από κάθε αυτοκίνητο ήταν:

Απόσταση σε km			
Α	**Β**	**Γ**	**Δ**
72	**84**	**92**	**80**
80	**88**	**104**	**76**
88	**104**	**104**	**84**

Με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι βασικές υποθέσεις της α.δ., μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η κατανάλωση είναι ίδια σε όλα τα αυτοκίνητα;

80.00	92.00	100.00	80.00	Total mean=	88.00
128.00	224.00	96.00	32.00		

H_0 : Η κατανάλωση είναι ίδια σε όλα τα αυτοκίνητα

H_0 : Η κατανάλωση δεν είναι ίδια σε όλα τα αυτοκίνητα

$$s_\alpha^2 = \sum_1^\kappa n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2 \qquad s_\upsilon^2 = \sum_1^\kappa (n_i - 1)s_i^2$$

$s_\alpha^2 =$ 864.00 MS μεταξύ= 288.00

$s_\upsilon^2 =$ 480.00 MS εντός= 60.00

$$F = \frac{\overline{\text{τετράγωνα μεταξύ ομάδων}}}{\overline{\text{τετράγωνα εντός ομάδων}}} = \frac{s_\alpha^2/(\kappa - 1)}{s_\upsilon^2/(n-\kappa)}$$ **= 4.81**

***$F_{3,8;0.05}$* = 4.07**

$F > F_{3,8;0.05}$ **άρα η H_0 απορρίπτεται**

Το ποσοστό των αιφνιδίων βρεφικών θανάτων (SIDS) ανέρχεται παγκοσμίως σε 4.4 σε 1.000 γεννήσεις. Στην πρωτεύσουσα της Τασμανίας Hobart μεταξύ 1975 και 1980 εμφανίσθηκαν 24 SIDS σε 3.939 γεννήσεις. Είναι αυτή η συχνότητα υψηλότερη από τη μέση παγκοσμίως εμφανιζόμενη για a=0.05;

H_0 : Η συχνότητα εμφάνισης SIDS στην Τασμανία δεν διαφέρει από αυτήν παγκοσμίως
H_0 : Η συχνότητα εμφάνισης SIDS στην Τασμανία διαφέρει από αυτήν παγκοσμίως

p= 24/3.939= **0.0061**

np(1-p)= 3.939*0,0061*(1-0,0061)= **23.9**

p_0= **0.0044**

Δηλ. ακολουθείται η κανονική κατανομή

$$z = \frac{p - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \mathbf{1.61203} < z_{0.95} = \mathbf{1.645}$$

Άρα αποδεχόμαστε, ότι η συχνότητα εμφάνισης SIDS στην πόλη αυτή δεν ξεπερνά τον παγκόσμιο μέσο όρο.

Σε 346 αυτοκινητιστικά δυστυχήματα με αυτοκίνητα διαφόρων μεγεθών (μικρό, μεσαίο, μεγάλο) έγιναν θανατηφόρα και μη ατυχήματα σύμφωνα με τον πίνακα που ακολουθεί. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το είδος του ατυχήματος έχει σχέση με το μέγεθος του αυτοκινήτου; (a=0.05)

Πίνακας συνάφειας

	Μικρό αυτ.	**Μεσαίο αυτ.**	**Μεγάλο αυτ.**	**Σύνολο**
Θανατηφόρα	67	26	16	109
Μη Θανατηφόρα	128	63	46	237
Σύνολο	195	89	62	346

$\mathbf{H_0}$ **:** Το είδος του ατυχήματος ανεξάρτητο από το μέγεθος του αυτοκινήτου

$\mathbf{H_1}$ **:** Το είδος του ατυχήματος εξαρτάται από το μέγεθος του αυτοκινήτου

Δοκιμασία "χ^2" ως test ανεξαρτησίας

Οι αναμενόμενες τιμές υπολογίζονται από τα αντίστοιχα επιμέρους σύνολα.

e11= 61.43	e12= 28.04	e13= 19.53
e21= 133.57	e22= 60.96	e23= 42.47

$X^2 = (o11-e11)^2/e11+(o21-e21)^2/e21+(o12-e12)^2/e12+(o22-e22)^2/e22+(o13-e13)^2/e13+(o23-e23)^2/e23$

$\mathbf{X^2}$**= 1.885**

β.ε. = 2

a= 0.05

$\mathbf{X_{2;0,05}^2}$**= 5.991** Άρα απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση

Συγκρίνουμε την επιτυχία μιας νέας χειρουργικής τεχνικής (1) με αυτήν της συνηθισμένης (2). Σε διάστημα 2 ετών μετά τις εγχειρίσεις με την νέα τεχνική πέθαναν 41 και επέζησαν 216 ασθενείς, ενώ με την συνηθισμένη τεχνική πέθαναν 64 και επέζησαν 180. Αν οι τεχνικές 1 και 2 έχουν τον ίδιο βαθμό επιτυχίας, τότε οι αναλογίες των ασθενών που επέζησαν θα είναι ίδιες. Να γίνει έλεγχος αυτής της υπόθεσης.

H_0 : Οι τεχνικές έχουν τον ίδιο βαθμό επιτυχίας
H_1 : Οι τεχνικές δεν έχουν τον ίδιο βαθμό επιτυχίας

Τεχν. Εγχείρ.	Πέθαναν	Επέζησαν	Σύνολο
1	41	216	257
2	64	180	244
Σύνολο	105	396	501

o_{11}= 41 o_{12}= 216 o_{21}= 64 o_{22}= 180

e_{11}= 53.86 e_{12}= 203.14 e_{21}= 51.14 e_{22}= 192.86

$X^2 = (41-53.86)^2/53.86+(216-203.14)^2/203.14+(64-51.14)^2/51.14+(180-192.86)^2/192.86 = 7.978$

Για a=0.05 και β.ε.=1, $x_{1,a}^2$=3.841 Άρα απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση

Σε 4 ομάδες ασθενών με συγκεκριμένους πόνους δόθηκε δόση αναλγητικού και τα αποτελέσματα κατηγοριοποιήθηκαν στον πίνακα που ακολουθεί.
Έχουν τα φάρμακα το ίδιο ποσοστό επιτυχίας;

H_0 : Τα αναλγητικά δεν διαφέρουν ως προς την αποτελεσματικότητά τους
H_1 : Τα αναλγητικά διαφέρουν ως προς την αποτελεσματικότητά τους

	Κατηγορία "j"				
Ομάδα "i"	**Λίγη**	**Μέτρια**	**Καλή**	**Πολύ καλή**	**Σύνολο**
Ισχ. Δ. Ibu	4	5	25	52	86
Ασθ. Δ. Ibu	6	10	17	61	94
Aspirin	5	11	25	47	88
Placebo	18	10	37	32	97
Σύνολο	33	36	104	192	365

$e_{11}=$ 7.775 $e_{12}=$ 8.482 $e_{13}=$ 24.504 $e_{14}=$ 45.238

$e_{21}=$ 8.499 $e_{22}=$ 9.271 $e_{23}=$ 26.784 $e_{24}=$ 49.447

$e_{31}=$ 7.956 $e_{32}=$ 8.679 $e_{33}=$ 25.074 $e_{34}=$ 46.290

$e_{41}=$ 8.770 $e_{42}=$ 9.567 $e_{43}=$ 27.638 $e_{44}=$ 51.025

β.ε. = (4-1)x(4-1) = 9

$\boldsymbol{X^2 = 33.08 > \chi_{0.95}^2 = 16.92}$

Άρα απορρίπτουμε την H_0