

Ιστορία των Θετικών Επιστημών

Ενότητα 16: Η Μαθηματική Λογική

Ευθύμιος Ντάλλας

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τμήμα: Ιστορίας, Αρχαιολογίας, Κοινωνικής
Ανθρωπολογίας

Σκοποί Ενότητας

Η κατανόηση της προσπάθειας αξιωματικής θεμελίωσης των μαθηματικών και της καθοριστικής σημασίας του θεωρήματος του Γκέντελ.

Περιεχόμενα Ενότητας

1. Το υπόδειγμα του Ευκλείδη – 1
2. Το υπόδειγμα του Ευκλείδη – 2
3. Το υπόδειγμα του Ευκλείδη – 3
4. Το απειροστό
5. Το άπειρο
6. Δυαδική άλγεβρα
7. Αριθμητική
8. Η αυτοαναφορικότητα
9. Θεμελίωση των μαθηματικών – 1
10. Θεμελίωση των μαθηματικών – 2
11. Λογικο-φιλοσοφικοί πόλεμοι
12. Μη πληρότητα

Η Μαθηματική Λογική

Το υπόδειγμα του Ευκλείδη - 1

- ▶ Στόχος των μαθηματικών είναι η θεμελίωση όλων των κλάδων της επιστήμης τους με τη σαφήνεια και την αυστηρότητα του Ευκλείδη



Ο Αβελάρδος του Μπαθ (Adelard of Bath 1080-1152) μετέφρασε τον Ευκλείδη στα λατινικά από τα αραβικά. Εδώ η προμετωπίδα του χειρογράφου (~1313), με θέμα "Γυναίκες διδάσκουν γεωμετρία"

(1)

Το υπόδειγμα του Ευκλείδη - 2

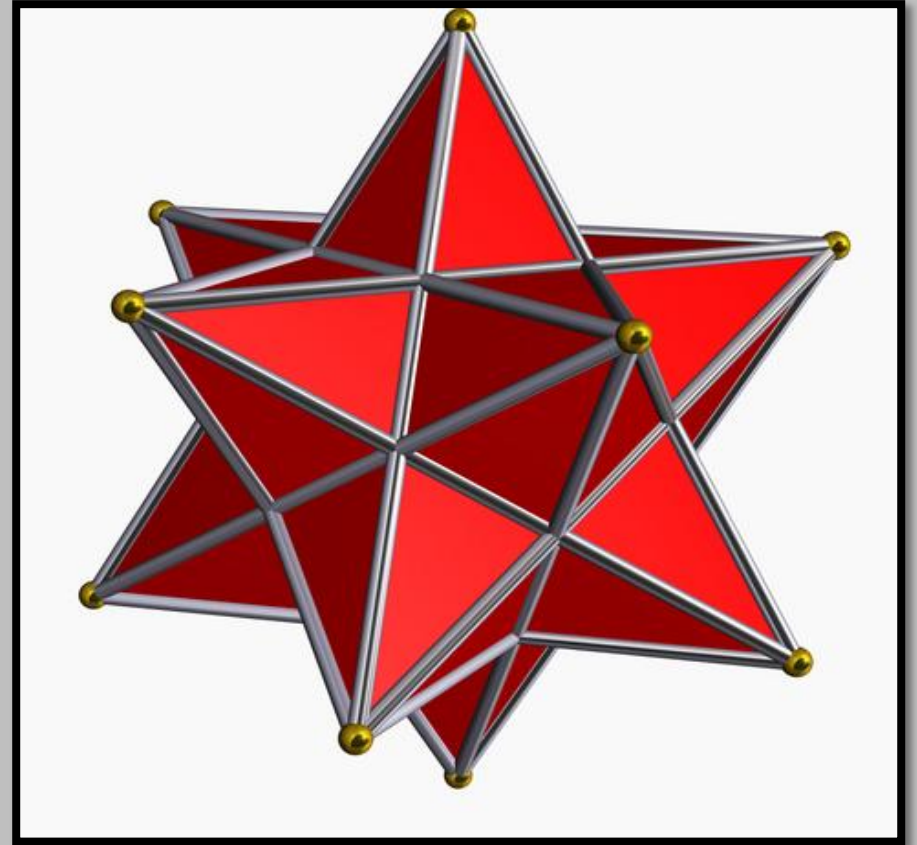
- ▶ Η μεθοδολογία του Ευκλείδη χρησιμοποιεί ένα υποχρεωτικό σύστημα παρουσίασης:
 - ορισμός
 - αξίωμα
 - θεώρημα
 - λήμμα
- ▶ Πώς γίνεται τα αξιώματα να έχουν οριστεί πριν την απόδειξη;



Ο Όιλερ (Leonhard Paul Euler, 1707-1783) (2)

Το υπόδειγμα του Ευκλείδη - 3

- ▶ Η προσπάθεια απόδειξης ελέγχει:
 - εικασία
 - μέθοδο
 - ορισμό
- ▶ Οι ορισμοί αλλάζουν
- ▶ Οι αποδείξεις μπορεί να μεταφέρουν το πρόβλημα από έναν κλάδο των μαθηματικών σε άλλο



Το αστεροειδές του Κέπλερ

Το απειροστό

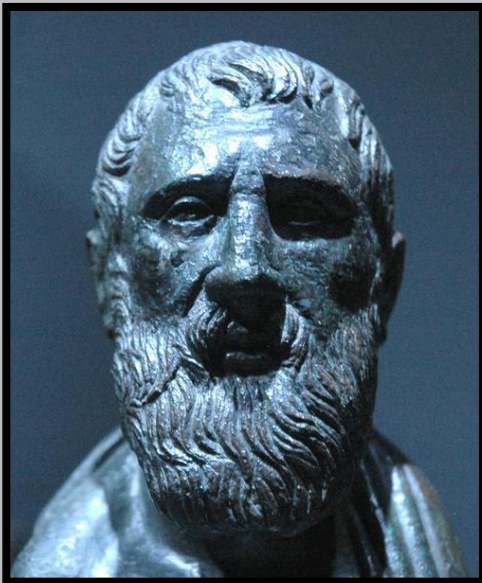
► Το παράδοξο του Ζήνωνα

- Αν κάτι είναι σε ηρεμία ή κίνηση σε χώρο ίσο με τον εαυτό του και αν ό,τι κινείται θεωρείται πάντοτε στιγμιαίως, τότε το βέλος στο πέταγμά του είναι ακίνητο

► Το πρόβλημα λύθηκε με την ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού

Ο Ζήνων

(4)



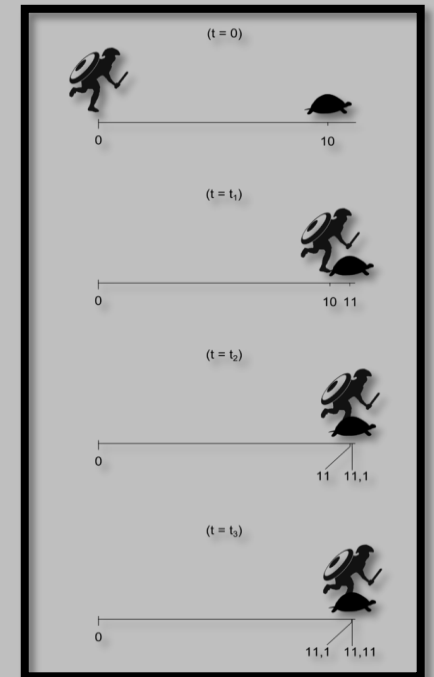
Ο Λάιμπνιτς

(5)



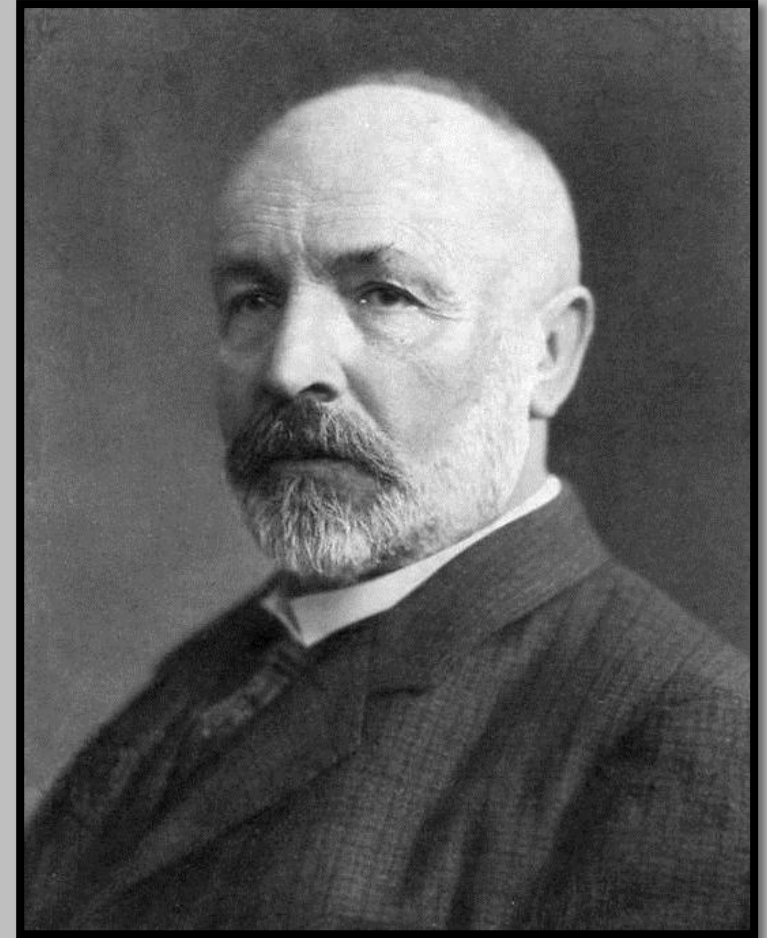
Ο Αχιλλέας
και η χελώνα

(6)



Το άπειρο

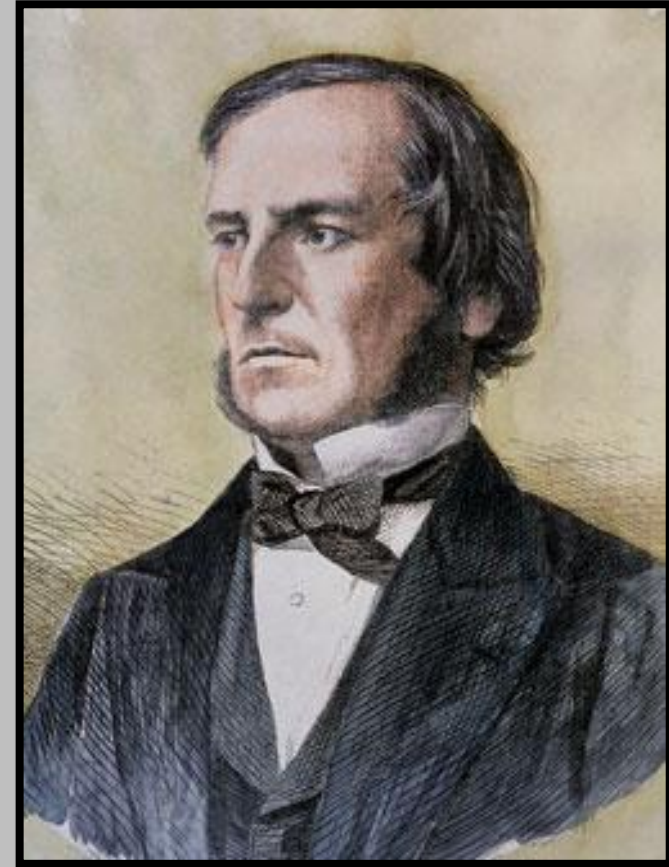
- ▶ Υπάρχουν δύο είδη απείρου:
 - αριθμήσιμο
 - μη αριθμήσιμο
- ▶ Η αναπάντεχη και αντίθετη στη διαίσθηση ανακάλυψη δημιούργησε φανατικούς εχθρούς (Πουανκαρέ) και φίλους (Χίλμπερτ)
- ▶ Δεν υπάρχει τρίτο είδος απείρου



Ο Κάντορ (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845-1918) είναι ο θεμελιωτής της θεωρίας των συνόλων (7)

Δυαδική άλγεβρα

- ▶ Η λογική να γίνει τόσο απλή όσο η άλγεβρα
- ▶ Δημιουργία συμβολικής γλώσσας για τη λογική με τρεις τελεστές
- ▶ \vee (και) \wedge (ή) \neg (όχι)
- ▶ Είναι η λογική το θεμέλιο των μαθηματικών, ή τα μαθηματικά το θεμέλιο της λογικής;

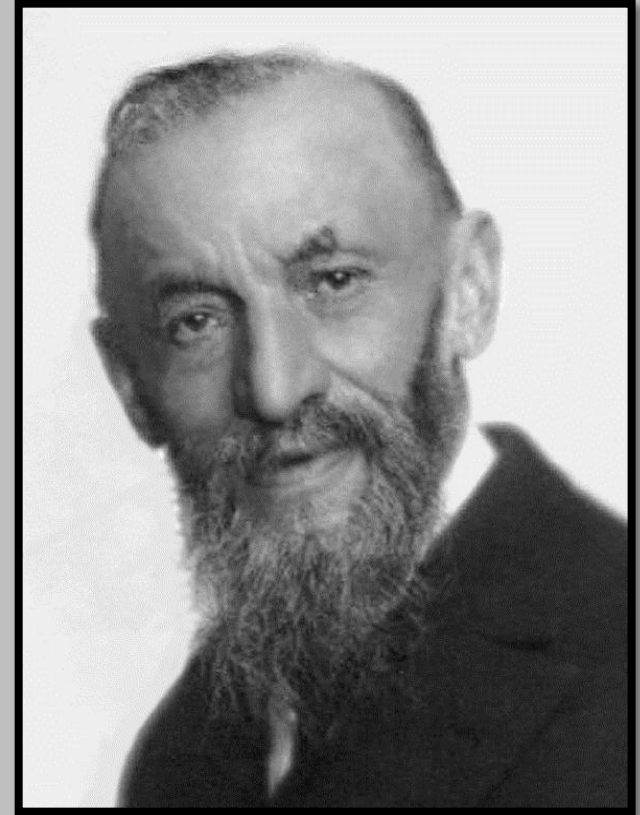


Ο Μπουλ (George Boole, 1815-1864), θεμελιωτής της δυαδικής άλγεβρας, ή άλγεβρας Μπουλ, η οποία αποτελεί τη θεωρητική βάση για τον προγραμματισμό των σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Αριθμητική

▶ Η αριθμητική απαιτεί 9 αξιώματα:

- $x=x$
- $x=y \Rightarrow y=x$
- $x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z$
- $a \in \mathbb{N} \wedge a=b \Rightarrow b \in \mathbb{N}$
- $0 \in \mathbb{N}$
- $S(n) \in \mathbb{N}$
- $S(n) \neq 0$
- $S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$
- $0 \in K \wedge n \in \mathbb{Z} \Rightarrow S(n) \in \mathbb{Z}$



Ο Πεανό (Giuseppe Peano, 1858-1932),
θεμελιωτής της αριθμητικής
(9)

Η αυτοαναφορικότητα

▶ Το παράδοξο του κουρέα

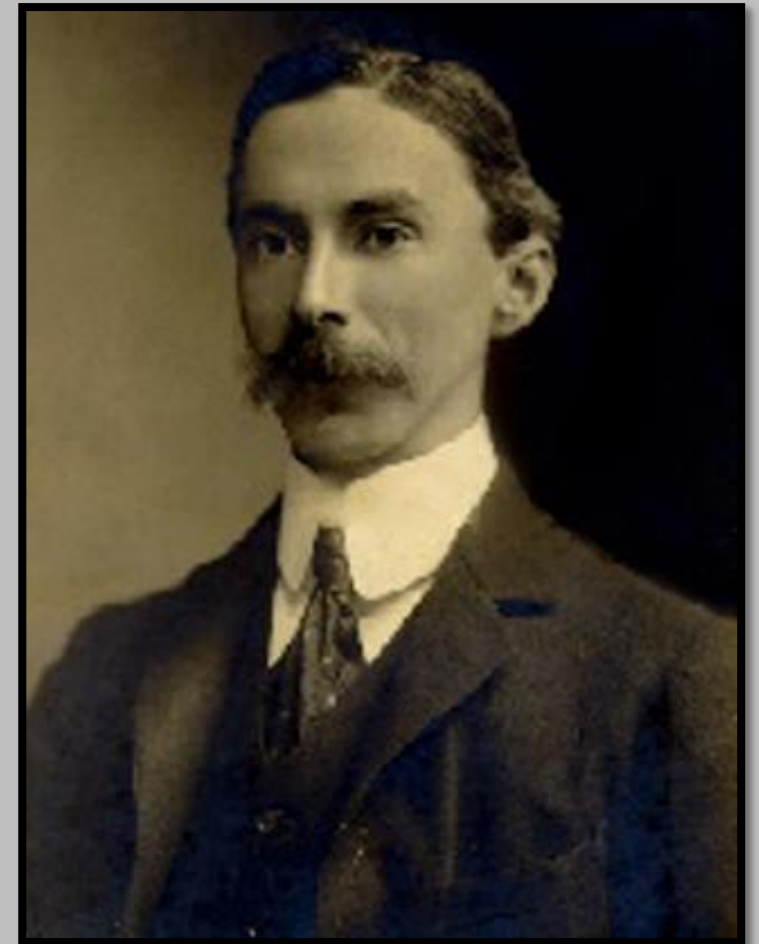
- ▶ Αν σε ένα χωριό ο κουρέας ξυρίζει όλους όσους δεν ξυρίζονται μόνοι τους, τότε ποιός ξυρίζει τον κουρέα;

▶ Το παράδοξο του Ράσελ

- ▶ Το σύνολο που περιέχει όλα τα σύνολα, περιέχει τον εαυτό του;
- ▶ Ένα αντικείμενο ή έχει ή δεν έχει μια ιδιότητα
 - ▶ Ισχύει αυτή η αρχή για απειροσύνολα;

Θεμελίωση των μαθηματικών - 1

- ▶ Πρόσπαθεια για θεμελίωση της αριθμητικής στη λογική
- ▶ Αν επιτευχθεί αυτό, τότε όλα τα μαθηματικά είναι θεμελιωμένα στη λογική
- ▶ Το τρίτομο έργο *Principia Mathematica* των Ουάιτχεντ και Ράσελ εκδόθηκε την περίοδο 1910-1913



Ο Ράσελ (Bertrand Arthur Russell, 1872-1970)

Θεμελίωση των μαθηματικών - 2

*54·43. $\vdash :: \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \wedge \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \vee \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54·26 . \supset \vdash :: \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \vee \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

[*51·231] $\equiv . \iota'x \wedge \iota'y = \Lambda .$

[*13·12] $\equiv . \alpha \wedge \beta = \Lambda \quad (1)$

$\vdash . (1) . *11·11·35 . \supset$

$\vdash :: (\exists x, y) . \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \vee \beta \in 2 . \equiv . \alpha \wedge \beta = \Lambda \quad (2)$

$\vdash . (2) . *11·54 . *52·1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

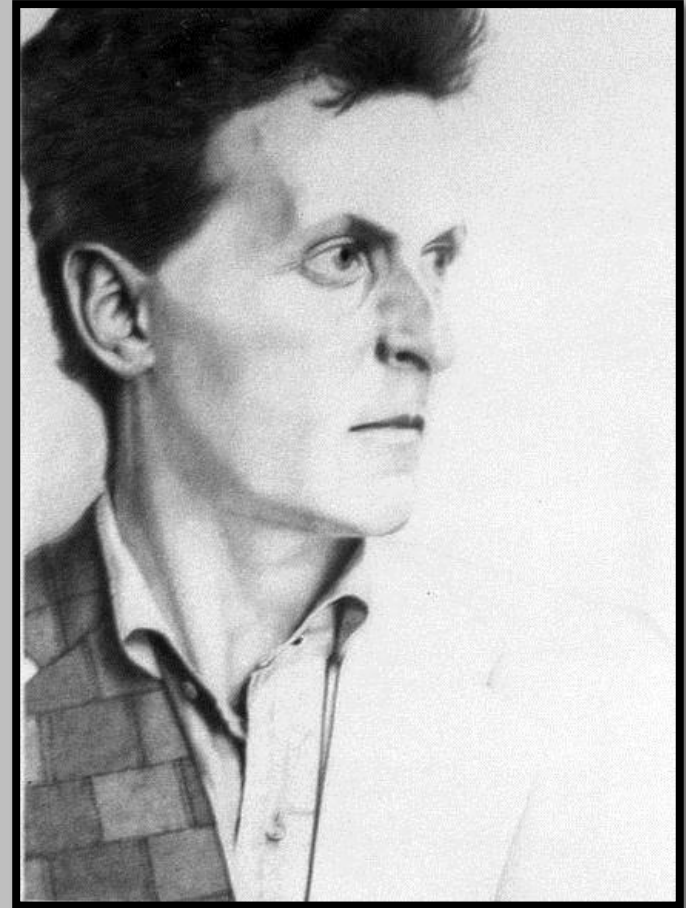
From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

(11)

- Η απόδειξη του $1+1=2$ ξεκινά στην πρόταση 54.43 (στον α' τόμο) και τελειώνει στην 110.643 (στον β' τόμο)

Λογικο-φιλοσοφικοί πόλεμοι

- ▶ Δεν μπορούμε να μιλάμε για το άπειρο και το σύμπαν, γιατί για αυτά δεν έχουμε εικόνα
- ▶ Η γλώσσα θέτει όρια στη σκέψη, άρα και στην κατανόηση
- ▶ Η λογική είναι κενή μορφή και δεν μπορεί να μιλήσει για την ουσία



Ο Βίντγκενσταϊν
(Ludwig Wittgenstein, 1889-1955)
(12)

Μη πληρότητα

- ▶ Σε οποιοδήποτε αξιωματικό σύστημα υπάρχουν προτάσεις που είναι μεν αληθείς, αλλά δεν μπορούν να αποδειχθούν στα πλαίσια του συστήματος
- ▶ Είναι απίθανο να βρεθεί μια απόλυτη απόδειξη συνέπειας για ένα επαγωγικό σύστημα



Ο Γκέντελ (Kurt Gödel, 1906-1978)
(13)

ΣΤΟ ΕΠΌΜΕΝΟ...

- ▶ Η επιστημολογία μετά το 1950



(14)

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων 1

- Εικόνα 1: <"Woman teaching geometry"><Δημιουργός: Άγνωστος><PD> < http://en.wikipedia.org/wiki/File:Woman_teaching_geometry.jpg><Wikimedia Commons>
- Εικόνα 2: <" Leonhard Euler"><Δημιουργός: Jakob Emanuel Handmann.><PD> < http://en.wikipedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler.jpg><Wikimedia Commons>
- Εικόνα 3: <" Small stellated dodecahedron"><Δημιουργός: Tomruen.><Attribution to Robert Webb's Stella software as the creator of this image along with a link to the website: <http://www.software3d.com/Stella.php>> < http://en.wikipedia.org/wiki/File:Small_stellated_dodecahedron.png><Wikimedia Commons>
- Εικόνα 4: <" Zeno"><Δημιουργός: Άγνωστος><fair use> < <http://web.pdx.edu/~dhoney/zeno2.html>> <web.pdx.edu>
- Εικόνα 5: <" Gottfried Wilhelm von Leibniz"><Δημιουργός: Christoph Bernhard Francke.><PD> < http://en.wikipedia.org/wiki/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg><Wikimedia Commons>
- Εικόνα 6: <" Achilles and turtle"><Δημιουργός: Daniele Pugliesi.><CCBYSA> < http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Achilles_and_turtle.png><Wikimedia Commons>
- Εικόνα 7: <" Georg Cantor"><Δημιουργός: Άγνωστος><PD> < http://en.wikipedia.org/wiki/File:Georg_Cantor2.jpg><Wikimedia Commons>
- Εικόνα 8: <" George Boole color"><Δημιουργός: Άγνωστος><PD> < http://en.wikipedia.org/wiki/File:George_Boole_color.jpg><Wikimedia Commons>
- Εικόνα 9: <" Giuseppe Peano"><Δημιουργός: Άγνωστος><PD> < http://en.wikipedia.org/wiki/File:Giuseppe_Peano.jpg><Wikimedia Commons>
- Εικόνα 10: <" Russell"><Δημιουργός: Άγνωστος><PD> < <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Russell1907-2.jpg>><Wikimedia Commons>
- Εικόνα 11: <" A small part of the long proof that $1+1=2$ in the "Principia Mathematica""><Δημιουργός: Russell and Whitehead><Fair Use> < http://www.storyofmathematics.com/20th_russell.html><The Story of Mathematics>
- Εικόνα 12: <" Ludwig Wittgenstein, Pencil on board"><Δημιουργός: Christiaan Tonnis.><CCBYSA> < https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Ludwig_Wittgenstein,_Pencil_on_board.jpg><Wikimedia Commons>
- Εικόνα 13: <" Kurt Gödel"><Δημιουργός: Άγνωστος><PD> < http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kurt_g%C3%B6del.jpg><Wikimedia Commons>
- Εικόνα 14: <" French workers with placard during occupation of their factory 1968"><Δημιουργός: GeorgeLouis.><CC BY SA> < http://en.wikipedia.org/wiki/File:French_workers_with_placard_during_occupation_of_their_factory_1968.jpg><Wikimedia Commons>