

Κεφάλαιο 23ο

Προβλήματα με πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Η σωστή ενέργεια!



Προσθέτω και αφαιρώ κλάσματα.

Λύνω απλά προβλήματα με δεκαδικούς, μεικτούς και κλάσματα ακολουθώντας μια σειρά από βήματα.



Μερικές φορές η παρουσία των κλασμάτων σε ένα πρόβλημα προκαλεί ανησυχία για το πώς θα το λύσουμε. Αν συμβεί αυτό, θυμηθείτε ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός και στη θέση του θα μπορούσε να είναι ένας φυσικός ή δεκαδικός αριθμός.

Δραστηριότητα 1η

Διαβάζοντας στην ιστοσελίδα της Δ.Ε.Η. (www.dei.gr) στοιχεία σχετικά με την παραγωγή ενέργειας για το 2003 διαπιστώσαμε ότι η ενέργεια που παράχθηκε στη χώρα μας από ανανεώσιμες πηγές ήταν πολύ μικρή. Παρακάτω παρουσιάζονται τα στοιχεία για την ενέργεια που παράχθηκε το 2003 σε θερμοηλεκτρικούς σταθμούς:

- Το 0,15 της ενέργειας παράχθηκε με τη χρήση πετρελαίου.
- Τα $\frac{9}{20}$ παράχθηκαν με τη χρήση λιγνίτη.
- Το $\frac{1}{4}$ παράχθηκε με τη χρήση φυσικού αερίου.
- Η υπόλοιπη ενέργεια παράχθηκε σε υδροηλεκτρικούς σταθμούς.
- Είναι εύκολο να υπολογίσουμε αμέσως αυτό το μέρος της ενέργειας;
- Τι πρέπει να κάνουμε πριν προχωρήσουμε στις πράξεις για την επίλυση του προβλήματος;



Δραστηριότητα 2η

Τα παιδιά θέλησαν να φυτέψουν στον κήπο του σχολείου φράουλες (ωριμάζουν στις αρχές Ιουνίου) και ρώτησαν αν υπάρχει καθόλου ελεύθερος χώρος. Ο δάσκαλος τους είπε: «Σωστή ενέργεια! Λοιπόν, το 0,1 του παρτεριού έχει γαρίφαλα, το $\frac{1}{4}$ έχει μαργαρίτες και τα $\frac{2}{5}$ έχουν γκαζόν. Αν υπάρχει ελεύθερος χώρος, είναι δικός σας!».

- Πώς θα βρούμε αν υπάρχει χώρος;
- Γράψτε με τη σειρά τις ενέργειες που πρέπει να κάνουν τα παιδιά για να βρουν τη λύση στο πρόβλημά τους;
- Κάντε τις πράξεις. Μετά χωρίστε το σχεδιάγραμμα του παρτεριού σε όσα μέρη πρέπει και βάψτε με κίτρινο το μέρος με τις μαργαρίτες, με μοβ το μέρος με τα γαρίφαλα, με πράσινο το μέρος με το γκαζόν και με κόκκινο το μέρος με τις φράουλες.



Οι δραστηριότητες αυτές μας βοηθούν να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ετερόνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα.

Παραδείγματα

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20}$$

Προσθέτουμε ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.

$$\frac{11}{18} + \frac{2}{18} = \frac{11+2}{18} = \frac{13}{18}$$

Αφαιρούμε ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους.

$$\frac{11}{18} - \frac{2}{18} = \frac{11-2}{18} = \frac{9}{18}$$

Όταν πρέπει να λύσω ένα πρόβλημα που έχει κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς:

- ✓ **Ελέγχω** αν οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
- ✓ Αν δεν είναι στην ίδια μορφή, τους **μετατρέπω** σε αριθμούς μιας μορφής.
- ✓ **Αποφασίζω** ποιες πράξεις πρέπει να κάνω.
- ✓ **Εκτελώ** τις πράξεις και ελέγχω το αποτέλεσμα.



Εφαρμογή 1η

Η Μυρτώ κούρεψε τα $\frac{3}{5}$ του γκαζόν και ο αδερφός της ο Λευτέρης το $\frac{1}{4}$.

Κούρεψαν όλο το γκαζόν; Αν όχι, πόσο έμεινε;



Λύση

- ✓ Οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
- ✓ Αρκεί λοιπόν να τους προσθέσουμε για να δούμε αν το κλάσμα που θα προκύψει θα έχει αριθμητή και παρονομαστή ίσους. Αν ναι, τότε θα είναι ίσο με τη μονάδα, δηλαδή θα έχουν κούρεψει όλο το γκαζόν. Αν όχι, θα αφαιρέσουμε αυτό που θα βρούμε από το κλάσμα «μονάδα» για να βρούμε τη διαφορά τους:
- ✓ $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$ Ε.Κ.Π. (5, 4) = 20. Άρα: $\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{12}{20} + \frac{5}{20} = \frac{17}{20}$. Άρα: $\text{---} - \text{---} = \text{---}$.

Απάντηση: Κούρεψαν τα $\frac{17}{20}$ του γκαζόν και μένουν ακόμη --- για κούρεμα.

Εφαρμογή 2η

Ένα δοχείο χωράει 3 λίτρα. Κάποια στιγμή έχει $1\frac{3}{4}$ λίτρα νερό. Πόσο νερό χρειάζεται ακόμα για να γεμίσει;



Λύση

- ✓ Οι αριθμοί του προβλήματος δεν είναι στην ίδια μορφή. Θα τους μετατρέψουμε σε κλάσματα ομώνυμα, με παρονομαστή το 4. Έτσι: $3 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$ και $1\frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$
- ✓ Τώρα θα αφαιρέσουμε το νερό που υπάρχει από τη συνολική χωρητικότητα του δοχείου για να βρούμε τη διαφορά τους: $\frac{12}{4} - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$. Δηλαδή $\frac{4}{4} + \frac{1}{4}$ ή $1\frac{1}{4}$.

Απάντηση: Χρειάζεται ακόμη $1\frac{1}{4}$ λίτρα νερού για να γεμίσει.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την **πρόσθεση** και την **αφαίρεση κλασμάτων** καθώς και τη **λύση απλών προβλημάτων με κλάσματα**. Σχεδίασε ένα σύντομο πρόβλημα που να λύνεται έτσι.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

❖ Η ισότητα: $\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{9}{10}$ είναι σωστή.



❖ Για να λύσω ένα πρόβλημα που οι αριθμοί του είναι φυσικοί, δεκαδικοί ή κλάσματα πρέπει πρώτα να τους μετατρέψω όλους στην ίδια μορφή.



Κεφάλαιο 24ο

Προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων

Ό,τι κι αν κάνεις, εγώ θα πολλαπλασιάζομαι!



Πολλαπλασιάζω και διαιρώ κλάσματα.

Λύνω προβλήματα υπολογισμού του κλασματικού μέρους ενός ποσού.

Υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις που περιέχουν κλάσματα.

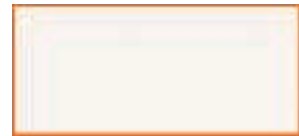


Η φράση «το κλάσμα ενός αριθμού» μπορεί να εννοηθεί ως ο πολλαπλασιασμός του κλάσματος με τον αριθμό αυτό. Για παράδειγμα, τα $\frac{3}{4}$ του 12 είναι $\frac{3}{4} \cdot 12$.

Δραστηριότητα 1η

Η μαμά σου έχει φτιάξει ένα μικρό ορθογώνιο κέικ, από το οποίο κόβεις το $\frac{1}{2}$. Από αυτό το κομμάτι τρως τα $\frac{3}{4}$. Αν προσπαθήσεις να υπολογίσεις με κλάσμα το μέρος που έφαγες, το κλάσμα αυτό θα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από τα κλάσματα $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$;

- Να σχεδιάσεις στο διπλανό σκίτσο το μέρος του ολόκληρου κέικ που έφαγες.
- Πόσο μέρος του κέικ έφαγες;
- Ποια πράξη θα κάνουμε για να βρούμε πόσο είναι τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{1}{2}$;
- Είναι το κλάσμα αυτό μεγαλύτερο ή μικρότερο από τα $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$;



Δραστηριότητα 2η

Πήγα σε ένα γαλακτοκομικό αγρόκτημα και αγόρασα γάλα σε ένα δοχείο 10 λίτρων. Το δοχείο δεν χωράει στο ψυγείο μου. Έτσι θέλω να το μεταγγίσω σε δοχεία των 2 λίτρων.

- Πόσα δοχεία χρειάζομαι;
- Γράψε την πράξη που έκανες;

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αγόρασα το $\frac{1}{2}$ λίτρο γάλα και θέλω να το μεταγγίσω σε μικρές ατομικές κανάτες του $\frac{1}{8}$ λίτρου για να τις σερβίρω με τον καφέ.

- Πόσες ατομικές κανάτες χρειάζομαι;
- Γράψε την πράξη που πρέπει να κάνεις;
- Γνωρίζεις ότι η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός είναι αντίστροφες πράξεις. Άρα, αντί να διαιρέσεις, μπορείς να πολλαπλασιάσεις με τον αντίστροφο αριθμό.
- Δοκίμασε τώρα να κάνεις την προηγούμενη πράξη αντιστρέφοντας το δεύτερο κλάσμα

-
- Είναι λογικό το αποτέλεσμα;



Οι δραστηριότητες αυτές μας οδηγούν στα παρακάτω συμπεράσματα:

Παραδείγματα

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων

Για να **πολλαπλασιάσουμε** κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} \text{ ή } \frac{3}{10}$$

Για να **διαιρέσουμε** δύο κλάσματα, αντιστρέφουμε τους όρους του δευτέρου κλάσματος και κάνουμε πολλαπλασιασμό.

$$\frac{5}{12} : \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{1} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 1} = \frac{15}{12} \text{ ή } 1 \frac{1}{4}$$

Υπολογίζω μια αριθμητική παράσταση που έχει κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς

- ✓ **Εκτελώ** τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά, με τη γνωστή σειρά (πρώτα δυνάμεις, πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις και μετά προσθέσεις, αφαιρέσεις).
Αν υπάρχουν παρενθέσεις, κάνω τις πράξεις πρώτα μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά.
- ✓ **Μετατρέπω** τους αριθμούς, σε όποια μορφή χρειάζεται για να κάνω πράξεις.



Εφαρμογή 1η Κλασματικό μέρος ενός ποσού

Το κόστος ενός αυτοκινήτου για τον αντιπρόσωπο είναι τα $\frac{4}{5}$ της τιμής πώλησης.

Το αυτοκίνητο πουλιέται 12.500 €. Να βρείτε πόσο κοστίζει στον αντιπρόσωπο.



Λύση

Μπορώ να υπολογίσω το κλασματικό μέρος ενός ποσού (τα $\frac{4}{5}$ του 12.500) με δύο τρόπους:

A. Αναγωγή στην κλασματική μονάδα: Βρίσκω πρώτα το $\frac{1}{5}$ του 12.500 ($12.500 : 5 = 2.500$) και μετά βρίσκω τα $\frac{4}{5}$ ($4 \cdot 2.500 = \dots$).

B. Αρκεί να πολλαπλασιάσω το κλάσμα με το ποσό ($\frac{4}{5} \cdot 12.500 \dots$). Πολλαπλασιάζω κλάσμα με φυσικό αριθμό, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή του με τον αριθμό αυτό (σαν να ήταν ο αριθμός κλάσμα με παρονομαστή το 1): $\frac{4}{5} \cdot 12.500 = \frac{4 \cdot 12.500}{5} = \frac{50.000}{5} = \dots$

Απάντηση: Το αυτοκίνητο κοστίζει στον αντιπρόσωπο €.

Εφαρμογή 2η Μεικτές αριθμητικές παραστάσεις

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 0,2 + \frac{4}{5}\right) : \left(3 - 1\frac{1}{3}\right)$

Λύση - Απάντηση

- ✓ Κάνω πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, με τη σειρά που πρέπει:

$$\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 0,2 + \frac{4}{5}\right) : \left(3 - 1\frac{1}{3}\right) = \left(\text{---} + 0,2 + \frac{4}{5}\right) : \dots \text{---}$$

- ✓ Μετατρέπω το δεκαδικό και το μεικτό αριθμό σε κλάσματα, για να συνεχίσω τις πράξεις:

$$\left(\text{---} + \text{---} + \text{---}\right) : \text{---} = \dots$$



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τον **πολλαπλασιασμό** και τη **διαίρεση κλασμάτων** και τον **υπολογισμό μεικτών αριθμητικών παραστάσεων**. Σχεδίασε ένα σύντομο πρόβλημα που να λύνεται έτσι.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

❖ Η ισότητα: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{18}{8}$ είναι σωστή.

❖ Για να βρούμε το μισό του $\frac{4}{5}$ αρκεί να το πολλαπλασιάσουμε με το $\frac{1}{2}$.