Εισαγωγή στη Λογική και την Κριτική Σκέψη (ΠΤΔΕ 2014-15)

Σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των πιθανοτήτων

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος, μιας δοκιμής είναι ο **δειγματικός χώρος** Ω του πειράματος.

Παράδειγμα. Αν το πείραμα είναι το ρίξιμο ενός ζαριού, τότε $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Αν το πείραμα είναι το ρίξιμο δύο ζαριών τότε $\Omega_2 = \Omega_1 \times \Omega_1$.

Οποιοδήποτε υποσύνολο Α του Ω ($A \subseteq \Omega$) λέγεται **γεγονός** και προφανώς έχει ως στοιχεία δυνατά αποτελέσματα του πειράματος.

Παράδειγμα. Το γεγονός «φέρνω δύο ίδιους αριθμούς στη ζαριά με τα δύο ζάρια» είναι το σύνολο $\Delta = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.

Η κλασική **πιθανότητα ενός γεγονότος** ορίζεται ως ο λόγος του πληθικού αριθμού του Α προς τον πληθικό αριθμό του Ω.

Δηλαδή, $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

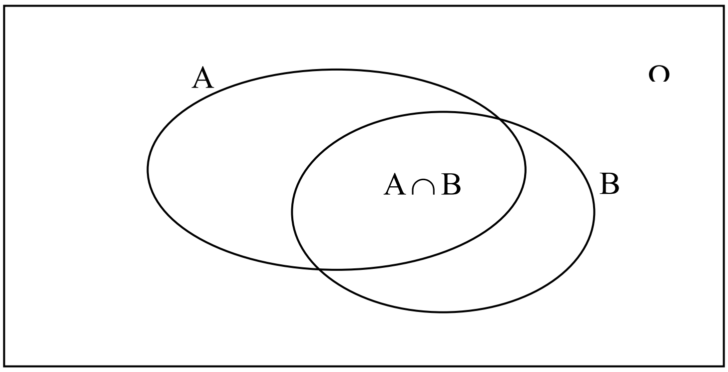
Παράδειγμα. Η πιθανότητα να φέρω δύο ίδιους αριθμούς στη ζαριά με δύο ζάρια είναι $P(\Delta) = \dfrac{|\Delta|}{|\Omega_2|} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Προφανώς $0 \leq P(A) \leq 1$. Ειδικότερα $P(A) = 0$ ανν $A = \varnothing$ και $P(A) = 1$ ανν $A = \Omega$.

Επίσης, αφού $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, άρα $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Ειδικότερα αν τα γεγονότα Α, Β είναι **ξένα** μεταξύ τους, δηλαδή $A \cap B = \varnothing$, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Επομένως $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Παράδειγμα. Η πιθανότητα $P(\Delta^C)$ = να φέρω διαφορετικούς αριθμούς στη ζαριά με δύο ζάρια είναι ίση με $1 - P(\Delta) = \dfrac{5}{6}$.

Πιθανότητα υπό συνθήκη. Έστω $A, B \subseteq \Omega$. Θέλουμε να γνωρίζουμε ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί το Α αν γνωρίζουμε ότι έχει συμβεί το Β, οπότε και $P(B) \neq 0$.



Την πιθανότητα αυτή τη γράφουμε συμβολικά $P(A|B)$.

Αφού γνωρίζουμε ότι έχει συμβεί το B, το συμπλήρωμά του δεν μας ενδιαφέρει και άρα μας ενδιαφέρει τι μέρος του B είναι το $A \cap B$. Με άλλα λόγια P(A|B) =

$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

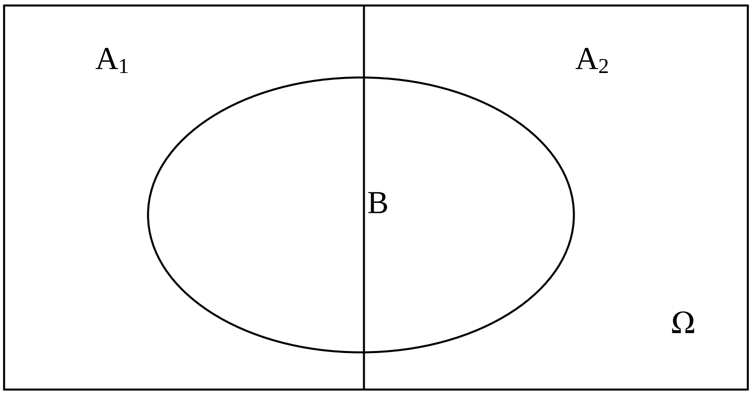
Αντίστοιχα $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Επομένως $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$.

Ορισμένες φορές συμβαίνει P(A|B) = P(A). Λέμε τότε ότι το γεγονός A είναι **ανεξάρτητο** από το B. Αλλά τότε P(B) = P(B|A), οπότε και το B είναι ανεξάρτητο από το A. Άρα μπορούμε να πούμε ότι αρκεί μία από τις παραπάνω σχέσεις για να είναι τα γεγονότα **ανεξάρτητα** μεταξύ τους και τότε προφανώς $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Τέλος, $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$.

Η παραπάνω σχέση μας βοηθά να καταλήξουμε στο λεγόμενο θεώρημα του Bayes.



Το θεώρημα αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την $P(A_i|B)$ για i = 1,2 .

Πράγματι, $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)} =$

$$\frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B|A_i) \cdot P(A_1) + P(B|A_i) \cdot P(A_2)}$$

Παράδειγμα. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε εφτά ρίχνοντας δύο ζάρια; Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε εφτά, αν γνωρίζουμε ότι με ένα από τα δύο ζάρια φέραμε 5;

Αφού 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 +1, άρα P(άθροισμα εφτά) = $\frac{6}{36}$ = $\frac{1}{6}$. P(άθροισμα εφτά| ένα ζάρι 5) = $\frac{2}{11}$.

Εφαρμογή. (Από το Κεφάλαιο 4 του βιβλίου *Reckoning with Risk* του Gerd Gigerenzer, Penguin 2003).

Οι παρακάτω πληροφορίες είναι διαθέσιμες για έναν πληθυσμό ασυμπτωματικών γυναικών μεταξύ 40 και 50 που κάνουν μαστογραφία.

Η πιθανότητα πως κάποια από αυτές τις γυναίκες έχει καρκίνο του μαστού είναι 0,8%. Αν μια γυναίκα έχει καρκίνο του μαστού, η πιθανότητα ότι η μαστογραφία θα το δείξει είναι 90%. Εάν μια γυναίκα δεν έχει καρκίνο στον μαστό, η πιθανότητα ότι πάλι η μαστογραφία θα βγει θετική είναι 7%. Έστω μια γυναίκα από αυτές με θετική μαστογραφία. Ποια είναι η πιθανότητα ότι όντως έχει καρκίνο του μαστού;

Με βάση το θεώρημα του Bayes έχουμε:

P(K) = 0,008. P(+|K) = 0,9. P(+|K^C) = 0,07.

Άρα $P(K|+) = \frac{P(+|K)\cdot P(K)}{P(+|K)\cdot P(K)+P(+|K^c)\cdot P(K^c)} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}008}{0{,}9\cdot 0{,}008+0{,}07\cdot 0{,}992} = \frac{0{,}0072}{0{,}0072+0{,}06944} = \frac{0{,}0072}{0{,}07664}$ = 0,09.

Το πρόβλημα μπορεί να επαναδιατυπωθεί με όρους φυσικών συχνοτήτων ως εξής:

Οκτώ γυναίκες στις χίλιες έχουν καρκίνο του μαστού. Από αυτές, τις οκτώ, επτά θα έχουν θετική μαστογραφία. Από τις υπόλοιπες εννιακόσιες ενενήντα δύο που δεν έχουν καρκίνο του μαστού, περίπου εβδομήντα θα έχουν επίσης θετική μαστογραφία. Έστω ένα τυχαίο δείγμα γυναικών με θετική μαστογραφία από αυτόν τον πληθυσμό. Πόσο τοις εκατό των γυναικών αυτών έχουν όντως καρκίνο του μαστού;

Οπότε	Πληθυσμός	Ασθενείς		Υγιείς	
	1000	8		992	
		+	–	+	–
		7	1	70	922

Άρα στις εβδομήντα εφτά με θετική μαστογραφία οι εφτά έχουν καρκίνο, δηλαδή μία στις ένδεκα, δηλαδή 9%.

Ακόμη κι αν δεν γνωρίζετε το θεώρημα του Bayes μπορείτε να υπολογίσετε αυτό που θέλετε και μάλιστα με πιο εύκολα κατανοητό τρόπο!