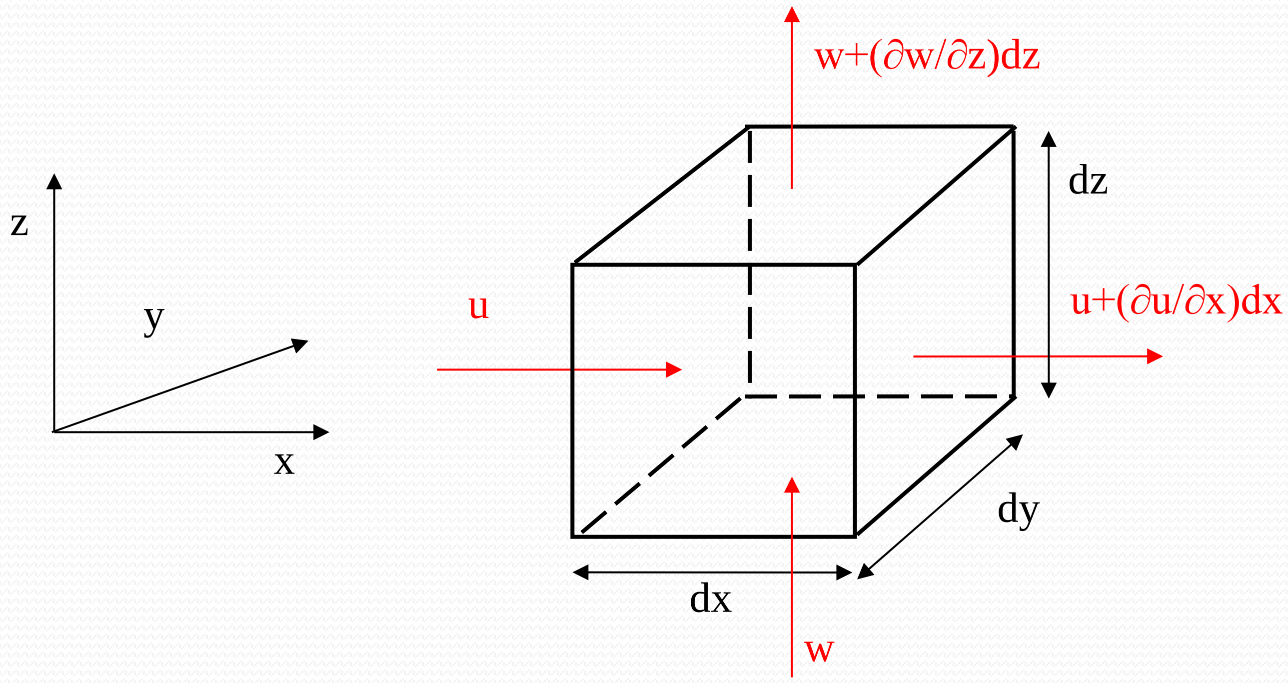
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας - Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Δρ. Βασιλική Κατσαρδή

Περιεχόμενα

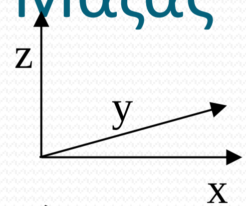
- Εξίσωση Συνέχειας
- Αστρόβιλη Ροή
- Εξισώσεις Κίνησης

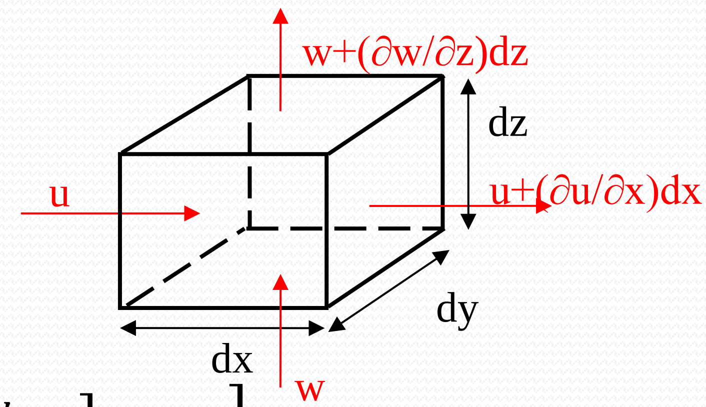
Πεδίο ταχύτητας – Όγκος Ελέγχου Καρτεσιανές Συντεταγμένες



1. Εισαγωγή

1.1 Εξίσωση Συνέχειας της Μάζας





Έστω ένα 2D πεδίο ροής

Εισροή μάζας $= (u dydz + w dxdy)\rho$

Εκροή μάζας $= \left[\left[u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right] dydz + \left[w + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right] dxdy\right] \rho$

ρ πυκνότητα (Kg/m^3).

Για ασυμπίεστη ροή: Εκροή – Εισροή = 0 →

$\left[u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u\right] dydz + \left[w + \frac{\partial w}{\partial z} dz - w\right] dxdy = 0$ → $\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] dxdydz = 0$

→ $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$ (1α) **Εξίσωση συνέχειας της μάζας** για 2D πεδίο ροής.

Αντίστοιχα για 3D πεδίο ροής: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$ (1β)

1.2 Αστρόβιλη Ροή

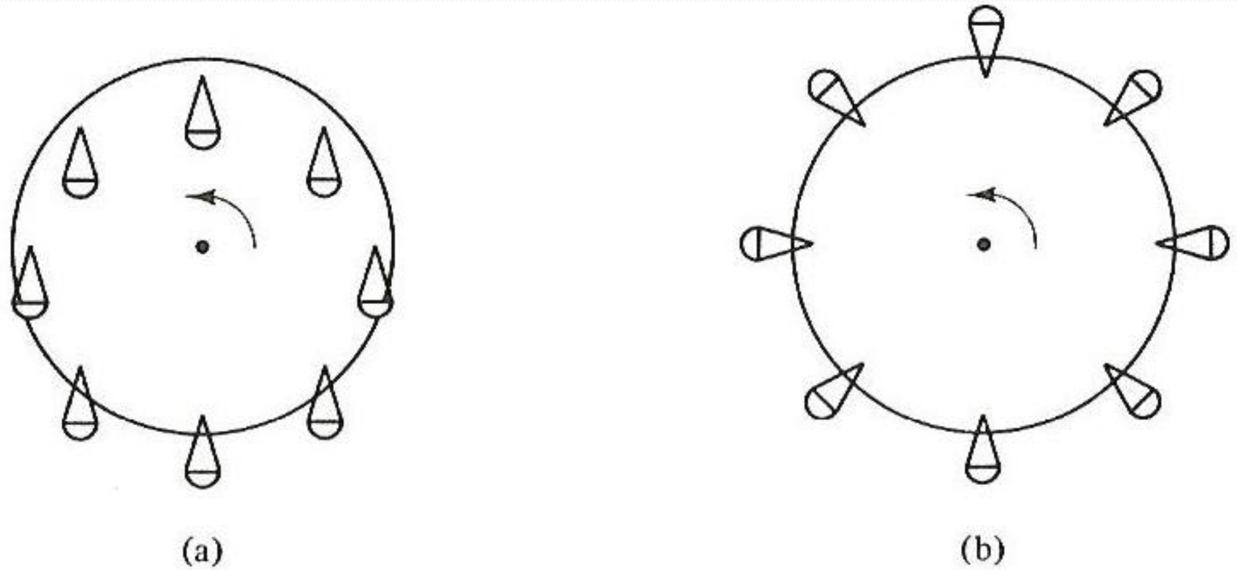
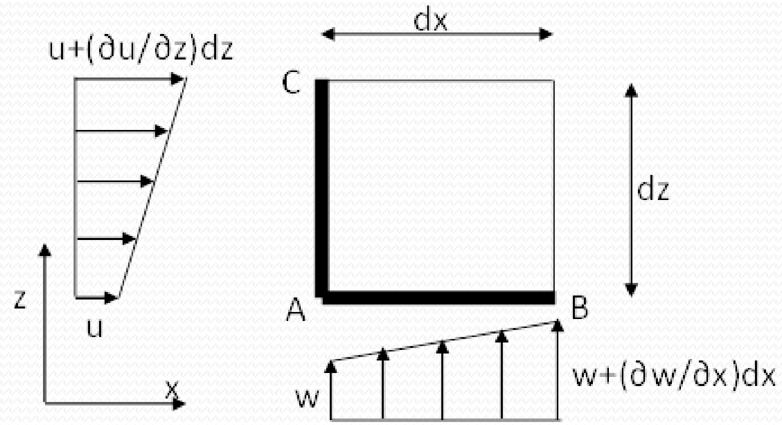


Figure 2.11 (a) Irrotational motion of chairs on a Ferris wheel; (b) rotational motion of the chairs.

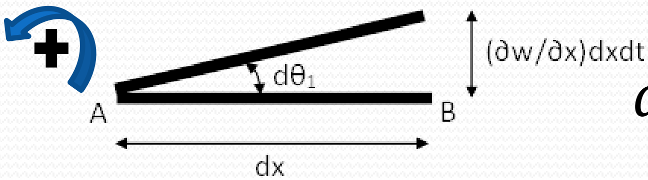
1.2 Αστρόβιλη Ροή



Όταν σε μία ροή έχουμε στροφή των στοιχείων της ροής, τότε λέμε ότι έχουμε στροβιλότητα Ω.

Πάλι σε ένα 2D πεδίο ροής

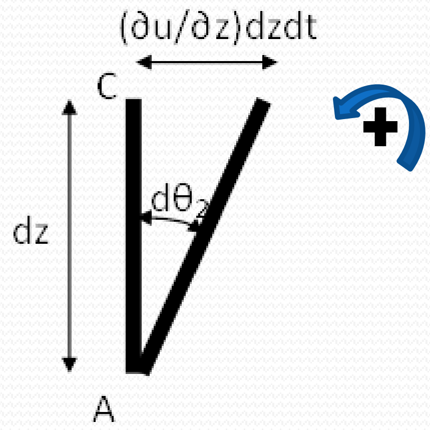
Μετά από χρόνο δt, η στοιχειώδης γραμμή AB θα έχει στραφεί κατά μία γωνία $d\theta_1$,



$$d\theta_1 = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}dxdt}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x}dt$$

Επομένως η γωνιακή ταχύτητα του AB θα είναι $\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}$ [s^{-1}]

1.2 Αστρόβιλη Ροή - συνέχεια



Παρομοίως η στροφή της στοιχειώδους γραμμή AC μετά από χρόνο δt δίνεται από:

$$-d\theta_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}dzdt}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z}dt \rightarrow \frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial z}\ [s^{-1}]$$

Η μέση στροβιλότητα (Ω) ορίζεται ως:

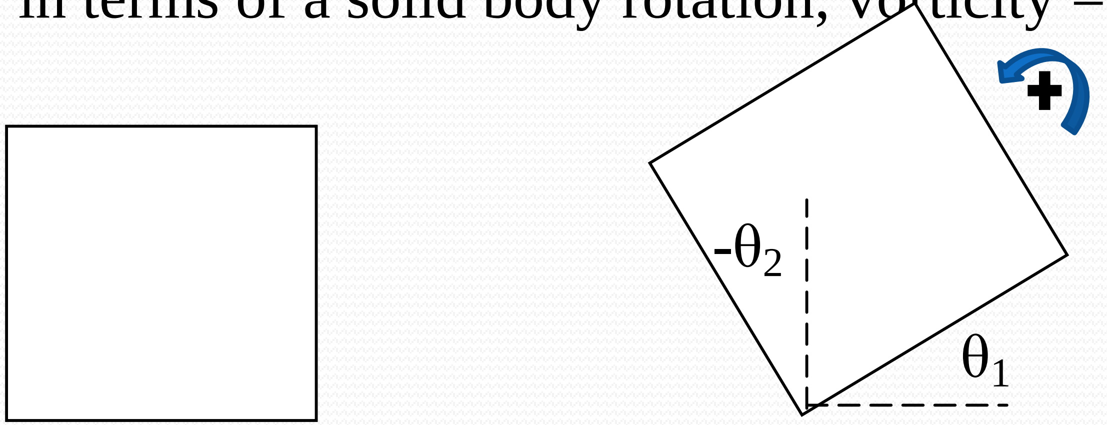
Άρα: $\Omega = \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt}\right) \rightarrow \boxed{\Omega = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\quad [s^{-1}]}$ (1c)

Έτσι για **αστρόβιλη ροή** έχουμε μηδενική στροβιλότητα σε κάθε σημείο της ροής

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0} \quad (1d)$$

1.2 Αστρόβιλη Ροή - συνέχεια

Note, in terms of a solid body rotation, vorticity = 2 x angular velocity



$\theta_1 = \theta_2 = \theta$

time = t

time = t+δt

Angular velocity = $\dfrac{d\theta}{dt}$, vorticity $\boxed{\Omega = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{d\theta_1}{dt} + \dfrac{d\theta_2}{dt} = 2\dfrac{d\theta}{dt}}$

1.3 Δυναμικό Ροής

Με δεδομένο την αστρόβιλη ροή, $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$,

ολοκληρώνοντας **ως προς x** έχουμε

$\int \frac{\partial w}{\partial x} dx = \int \frac{\partial u}{\partial z} dx$ και άρα $w = \int \frac{\partial u}{\partial z} dx$

ολοκληρώνοντας **ως προς z** έχουμε

$\int w\, dz = \iint \frac{\partial u}{\partial z} dx dz$ και άρα $\int w\, dz = \int u\, dx$

Θέτοντας το παραπάνω ως μία συνάρτηση φ έχουμε

$\int w\, dz = \int u\, dx = \varphi(x, z, t)$ ← **Δυναμικό ροής**

Έτσι, $\boxed{u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}}$ και $\boxed{w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}}$ (και $\boxed{v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}}$ για 3D ροή) (1e)

Μία συνάρτηση περιγράφει **όλη** τη ροή.

(Άσκηση: Από (1e) να καταλήξουμε στην (1d))

1.3 Δυναμικό Ροής – Εξίσωση Laplace

Από την εξίσωση συνέχειας της μάζας για 3D ροή:

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ και με δεδομένα τα $u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $w=\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ και $v=\frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=0$ άρα $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0$ ή

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$$

*Συνάρτηση **Laplace** με όρους φ*

Εύκολη στη λύση του!!!

1.4 Ροϊκή Συνάρτηση

Με δεδομένο την αρχή διατήρησης της μάζας, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial z}$,

ολοκληρώνοντας **ως προς $\boldsymbol{x}$** έχουμε

$\int \frac{\partial u}{\partial x} dx = -\int \frac{\partial w}{\partial z} dx$ και άρα $u = -\int \frac{\partial w}{\partial z} dx$

ολοκληρώνοντας **ως προς $\boldsymbol{z}$** έχουμε

$\int u\, dz = -\iint \frac{\partial w}{\partial z} dxdz$ και άρα $\int u\, dz = -\int w\, dx$

Θέτοντας το παραπάνω ως μία συνάρτηση ψ έχουμε

$\int u\, dz = -\int w\, dx = \psi(x, z, t)$ ← **Ροϊκή Συνάρτηση**

Έτσι, $\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial z}}$ και $\boxed{w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$ (1f)

Μία συνάρτηση περιγράφει **όλη** τη ροή.

(Άσκηση: Από (1f) να καταλήξουμε στην (1d))

1.4 Ροϊκή Συνάρτηση – Εξίσωση Laplace

Από την εξίσωση αστρόβιλης ροής για 3D ροή:

$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ και με δεδομένα τα $u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, w - \frac{\partial \psi}{\partial x}$

$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$ άρα $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$ ή

$$\boxed{\nabla^2 \psi = 0}$$

Συνάρτηση ***Laplace*** *με όρους ψ*

Πάλι εύκολη στη λύση του!!!

1.3 Φυσική σημασία του φ και ψ

Γραμμές φ = σταθερό

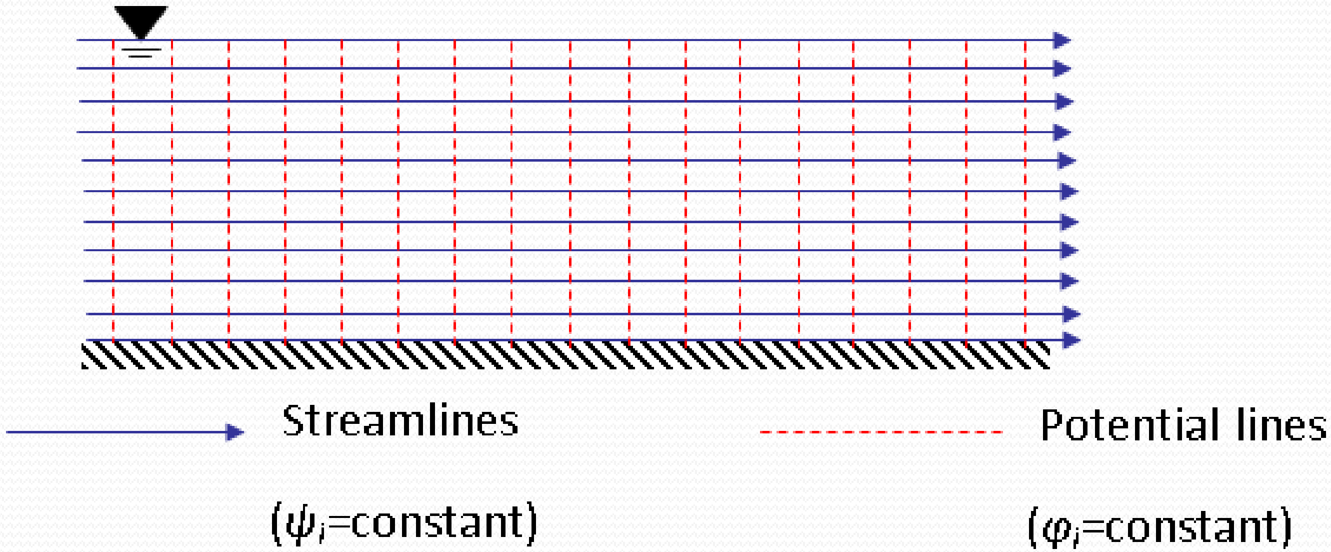
- Αντιπροσωπεύουν τις **γραμμές δυναμικού**
- Ενώνουν σημεία με ίσο δυναμικό ροής
- Ισοδύναμο με το βαρυτικό δυναμικό πεδίο και έτσι ενώνει σημεία ίσου βαρυτικού δυναμικού
- το δυναμικό για την κίνηση προκύπτει λόγω κλίσης πίεσης
- Οι γραμμές δυναμικού έτσι, ενώνουν σημεία ίσης κλίσης πίεσης

Γραμμές ψ = σταθερό

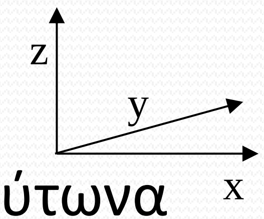
- Αντιπροσωπεύουν τις **γραμμές ροής**
- Αυτές δείχνουν την κίνηση ή μετακίνηση των σωματιδίων ρευστού
- Εύκολα ορατό σε πειράματα
- Το ρευστό κινείται στην κατεύθυνση της κλίσης πίεσης (από υψηλή σε χαμηλή). Έτσι οι γραμμές ροής πρέπει να είναι **κάθετες** στις γραμμές δυναμικού.
- Οι γραμμές δυναμικού και οι γραμμές ροής αποτελούν το πλέγμα ροής.

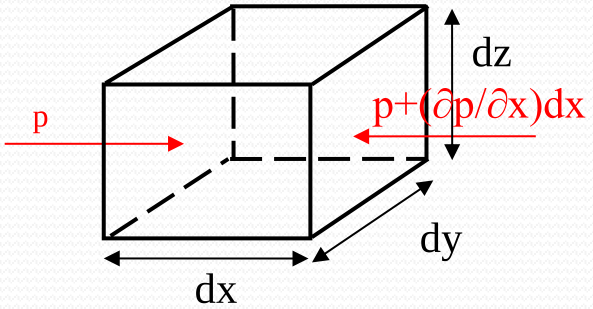
1.3 Φυσική σημασία του φ και ψ

Παράδειγμα: Ροή σε ανοιχτό αγωγό



1.5 Εξισώσεις Κίνησης





Σε ένα 3D πεδίο ροής

Εφαρμόζουμε 2ο νόμο του Νεύτωνα

Δύναμη = μάζα x επιτάχυνση κατά x.

$$\left\{-\left[p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right]+p\right\}dydz+Xdxdydz=\rho\alpha_x dxdydz$$

όπου X η εξωτερική δύναμη ανά μονάδα όγκου ρευστού, και α_x η επιτάχυνση κατά x.

Άρα οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από

$$\left.\begin{aligned}\frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+X=\alpha_x\\ \frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y=\alpha_y\end{aligned}\right\}\quad \text{Όμως } X=Y=0$$

$$\frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+Z=\alpha_z \quad \text{και } Z=-g$$

$$\alpha_x=\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\overset{u}{\frac{\partial x}{\partial t}}+\frac{\partial u}{\partial y}\overset{v}{\frac{\partial y}{\partial t}}+\frac{\partial u}{\partial z}\overset{w}{\frac{\partial z}{\partial t}}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

1.5 Εξισώσεις Κίνησης – Συνέχεια

Εισάγοντας τα παραπάνω έχουμε τις **Εξισώσεις Euler**

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u\partial u}{\partial x}+\frac{v\partial u}{\partial y}+\frac{w\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{u\partial v}{\partial x}+\frac{v\partial v}{\partial y}+\frac{w\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{u\partial w}{\partial x}+\frac{v\partial w}{\partial y}+\frac{w\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g$$

Μη ιδανικά ρευστά μ≠0

- Navier – Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho g_z\,.$$

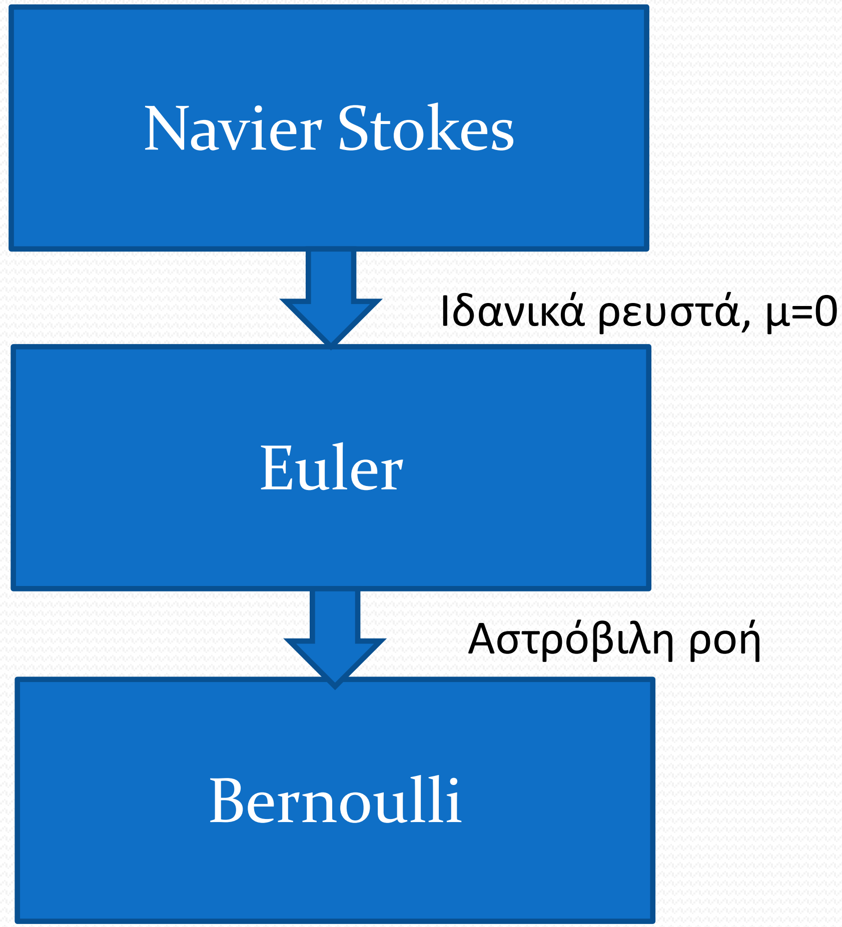
1.5 Εξισώσεις Κίνησης – Συνέχεια

Εισάγοντας την αστρόβιλη ροή για τις 2 διαστάσεις (Να γίνει σαν άσκηση) λαμβάνουμε την **Εξίσωση Bernoulli**

$$\frac{\rho\partial\varphi}{\partial t} + p + \rho g z + \rho\left[\frac{u^2 + w^2}{2}\right] = C$$

όπου C σταθερά Bernoulli.

Εξισώσεις


Navier Stokes
Ιδανικά ρευστά, μ=0
Euler
Αστρόβιλη ροή
Bernoulli