

# Κυματομηχανική

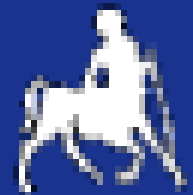
Σειρά V:

Γένεση Πραγματικών Κυματισμών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας - Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

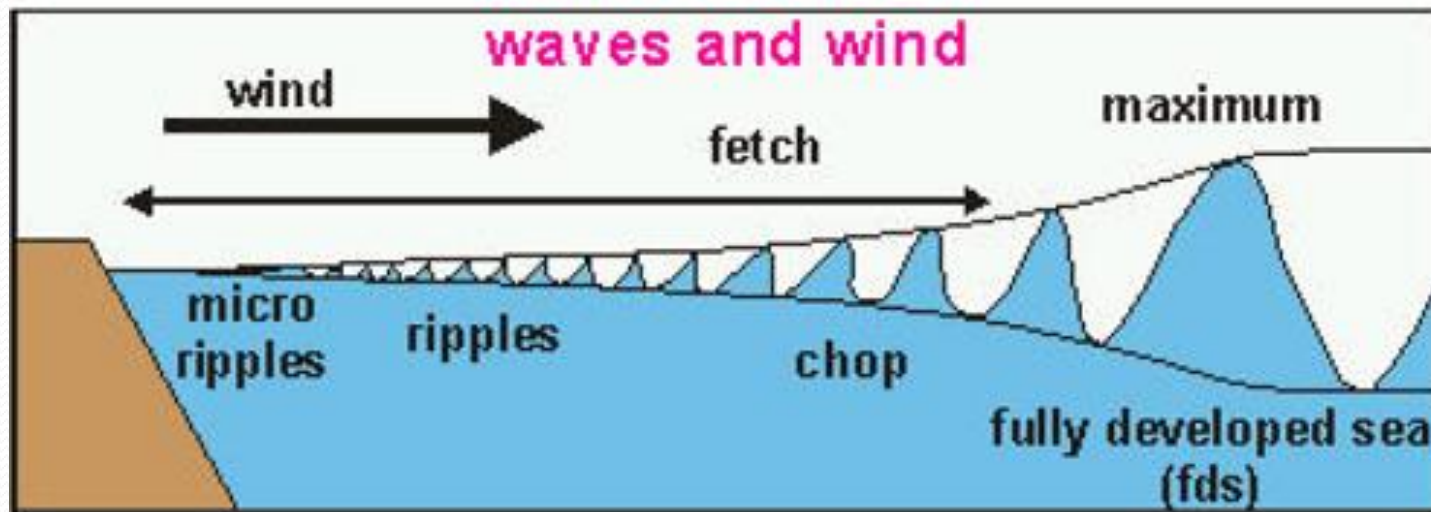
Δρ. Βασιλική Κατσαρδή



# Ανεμογενείς Κυματισμοί

- Γένεση Ανεμογενών Κυματισμών:
  - *Μεταφορά ενέργειας* από τα κινούμενα κατώτερα ατμοσφαιρικά στρώματα στις επιφανειακές θαλάσσιες μάζες.
  - Η ενέργεια αρχικά περνά από την ατμόσφαιρα στην θάλασσα με την *διάτμηση* και στη συνέχεια με την *αναδιαμόρφωση του πεδίου των πιέσεων* πάνω από τις κορυφές και τις κοιλιές του κύματος.

Θεωρία Phillips (1957) και Miles (1960): Η κυματογένεση ξεκινά με γραμμική αύξηση του κύματος, λόγω συντονισμού με τις τυρβώδεις διαταραχές πίεσης και τριβής στην επιφάνεια και συνεχίζει με εκθετικό ρυθμό.



# Γένεση των κυματισμών

Συσχέτιση ταχύτητας ανέμου στα 10m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας με τον άνεμο σε ύψος  $z$  πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας:

$$U_{10} = U(z) \left( \frac{10}{z} \right)^{\frac{1}{7}} \quad 0 < z < 20$$

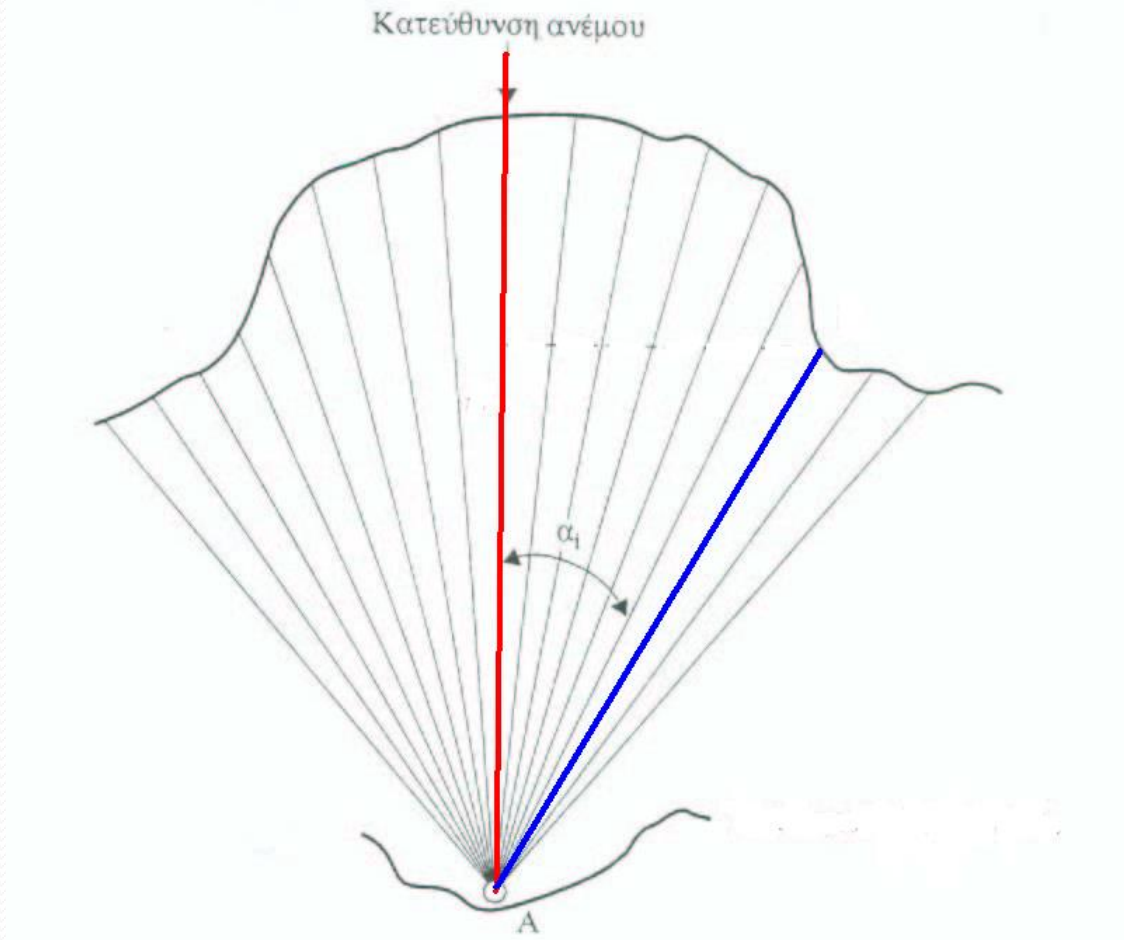
m/s

Ρυθμιστική ταχύτητα λόγω μη γραμμικής σχέσης ταχύτητας ανέμου και διατμητικής τάσης:

$$U_A = 0.71U^{1.23}$$

Τομέας κυματογένεσης: Κυκλικός τομέας  $\pm 45^\circ$  εκατέρωθεν της κατεύθυνσης πνοής του ανέμου

# Αποτελεσματικό ή ισοδύναμο ( $F_{\text{effective}}$ ) μήκος αναπτύγματος των κυματισμών



$$F_{\text{eff}} = \frac{\sum_i F_i \cos^2 a_i}{\sum_i \cos a_i}$$

# Αποτελεσματικό ή ισοδύναμο ( $F_{\text{effective}}$ ) μήκος αναπτύγματος των κυματισμών



Σχεδιάστε τα απαιτούμενα για τον υπολογισμό του μήκους αναπτύγματος των κυματισμών που προκαλούνται από  $\mathbf{B}\Delta$  άνεμο στην παραλία 'ΠΑΡΑΔΕΙΣΙ' της Ρόδου.

$$F_{\text{eff}} = \frac{\sum_i F_i \cos^2 a_i}{\sum_i \cos a_i}$$

Τα στοιχεία του κυματισμού  $H$  και  $T$  είναι συναρτήσεις των:

$t_D$  = διάρκεια πνοής του ανέμου

$U$  = ταχύτητα του ανέμου

$F$  = μήκος αναπτύγματος των κυματισμών

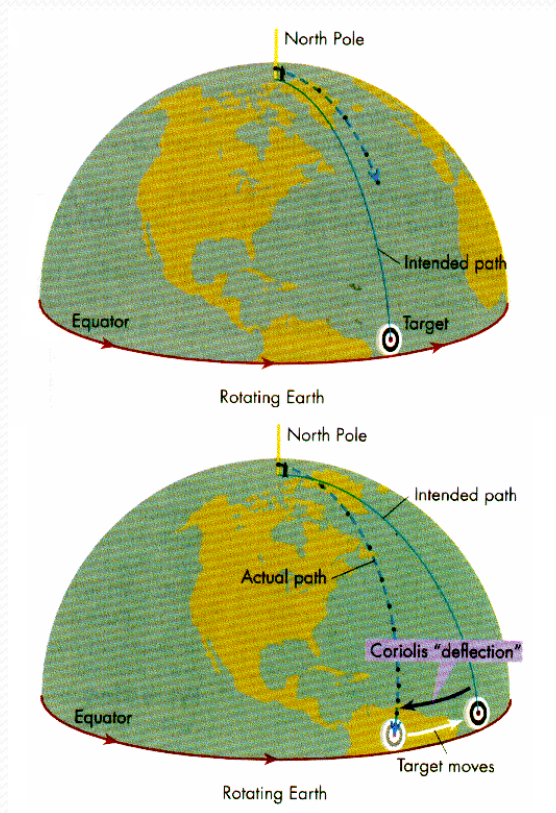
1. Ανάπτυξη με περιορισμένο  $F$ :  $t_D$  μεγάλο  $\rightarrow$  Κύμα  $\sim F$  &  $U$
  2. Ανάπτυξη με περιορισμένο  $t_D$ :  $F$  μεγάλο  $\rightarrow$  Κύμα  $\sim t_D$  &  $U$
  3. Πλήρως ανεπτυγμένη κατάσταση (FDS).  $F$  &  $t_D$  μεγάλα  $\rightarrow$  Κύμα  $\sim U_{10}$
- Οπτικές παρατηρήσεις από εμπορικά και πολεμικά πλοία από Βρεττανικό Ναυαρχείο
  - Κοντά στην ακτή:
    - κατακόρυφοι μεταλλικές ράβδοι  $\leftrightarrow$  ηλεκτρικό κύκλωμα
    - Κυματογράφος πίεσεως στον πυθμένα
  - Πλωτοί ιππείς κυματων  $\rightarrow 3D!$

# Γεωστροφικός Άνεμος

Ο άνεμος που δημιουργείται από τη δύναμη της πίεσης και την δύναμη Coriolis (ή γεωστροφική δύναμη) που οφείλεται στην περιστροφή της γης.

Είναι οριζόντιος και η έντασή του εξαρτάται από την απόσταση των ισοβαρών. Πάνω από από ωκεανούς ή μεγάλες θάλασσες ο γεωστροφικός άνεμος πλησιάζει τον πραγματικό.

## Δύναμη Coriolis





# Γεωστροφικός άνεμος (Geostrophic wind)

$$U_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{dp}{dn} = -\frac{1}{\rho(2\Omega \sin \varphi)} \frac{dp}{dn}$$

$\rho$  η πυκνότητα του αέρα (1.3 kg/m<sup>3</sup>)

$f = 2\Omega \sin \varphi$  ο συντελεστής Coriolis

$\varphi$  το γεωγραφικό πλάτος

$\Omega$  η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης

$dp/dn$  η βαροβαθμίδα (1mb = 100 Pa/m<sup>2</sup>)

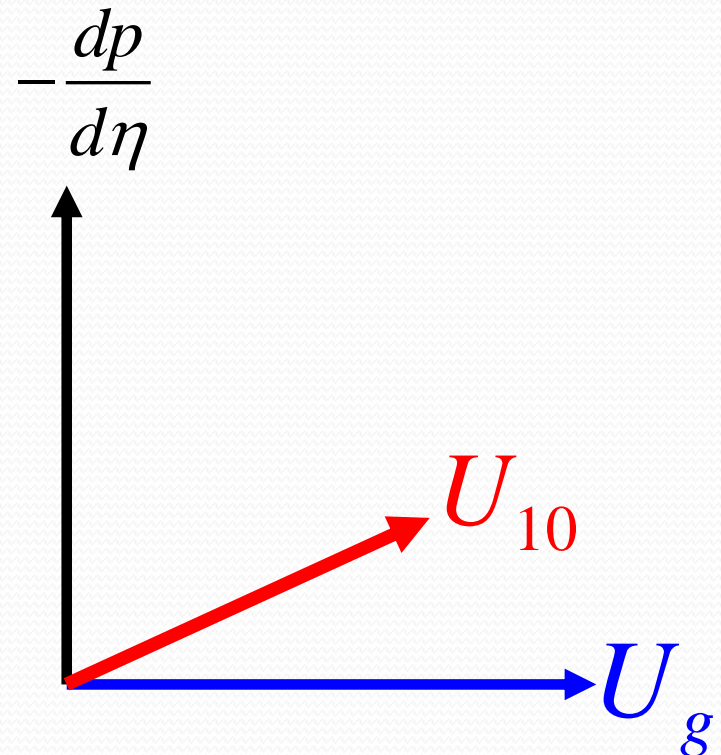
## Γεωστροφικός άνεμος

## (Geostrophic wind)

$$U_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{dp}{d\eta} = -\frac{1}{\rho(2\Omega \sin \varphi)} \frac{dp}{d\eta}$$

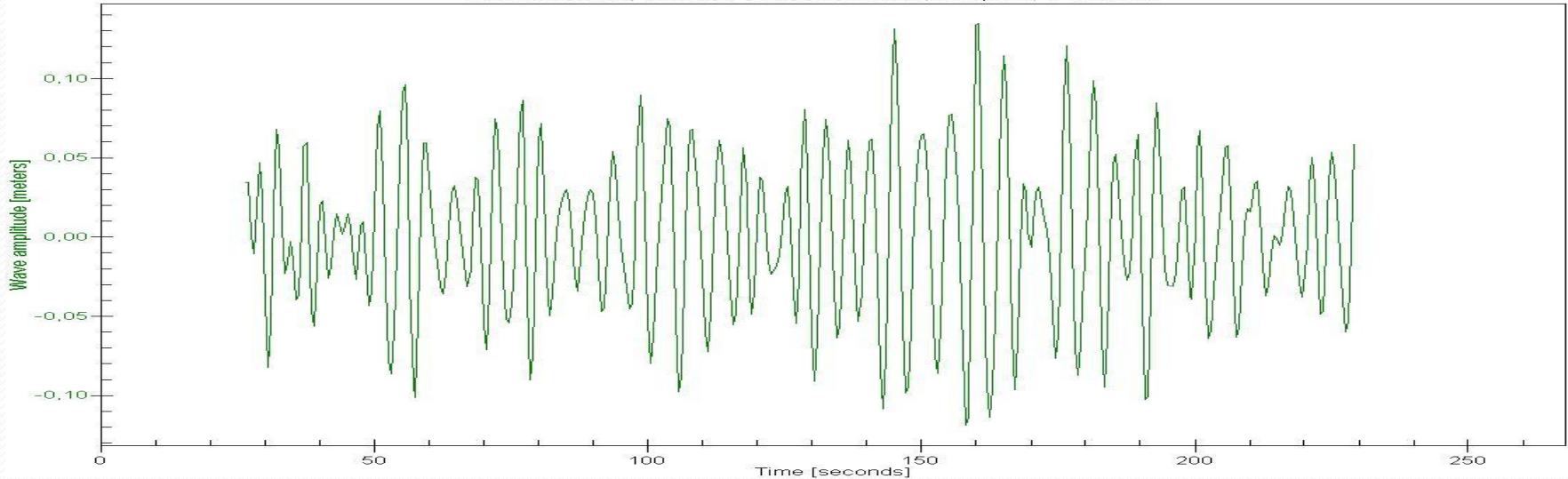
$$U_{10} = 0,60U_g$$

Ο επιφανειακός άνεμος  $U_{10}$  έχει κατεύθυνση στραμμένη προς το βαρομετρικό χαμηλό κατά  $20^\circ - 40^\circ$



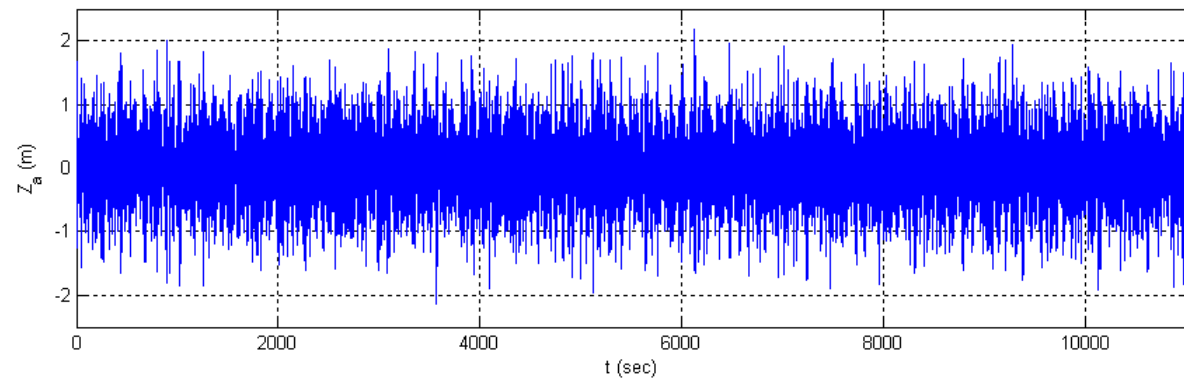
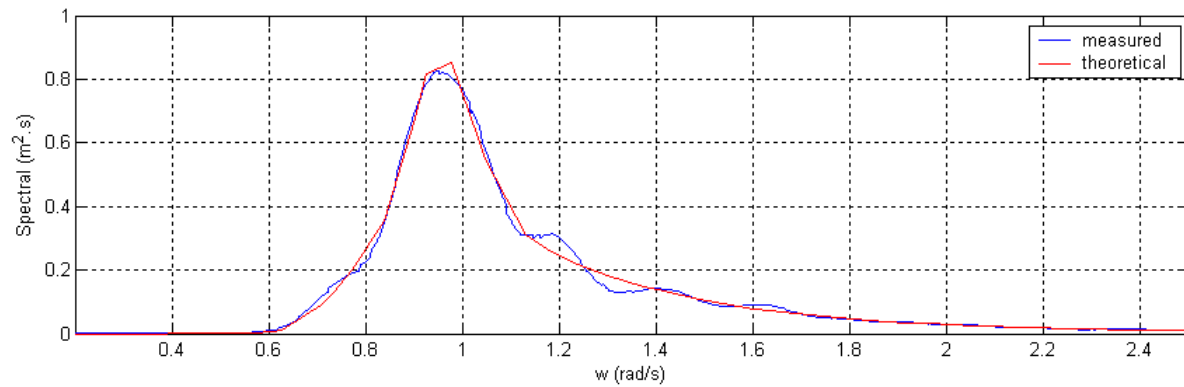
# Πραγματικοί κυματισμοί

Wave Time Series Plot, series1.wt  
Burst 10 of 210, Start 20 Feb 2008 03:01:20, 512 point, T=256 sec



- Οι κυματισμοί που δημιουργεί η επίδραση του ανέμου στην επιφάνεια της θάλασσας, δεν είναι «μονοχρωματικοί».
- Η επιφάνεια της θάλασσας μπορεί να προσεγγιστεί με σύνθεση περισσότερων απλών κυματισμών και να αναλυθεί ως στοχαστικό μέγεθος
- Ανεμογενείς κυματισμοί=στοχαστικά μεγέθη που ακολουθούν συγκεκριμένους πιθανολογικούς νόμους κατανομής

# Spectrum



# ΑΝΕΜΟΓΕΝΕΙΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ

Μονοχρωματικός κυματισμός  
(1 συχνότητα)

$$\eta = a \cos(kx - \omega t)$$

η πραγματική μορφή της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας μπορεί να προσεγγιστεί με επαλληλία ημιτονοειδών κυμάτων

$$\eta = \sum a_i \cos(\kappa_i x - \omega_i t + \varphi_i)$$

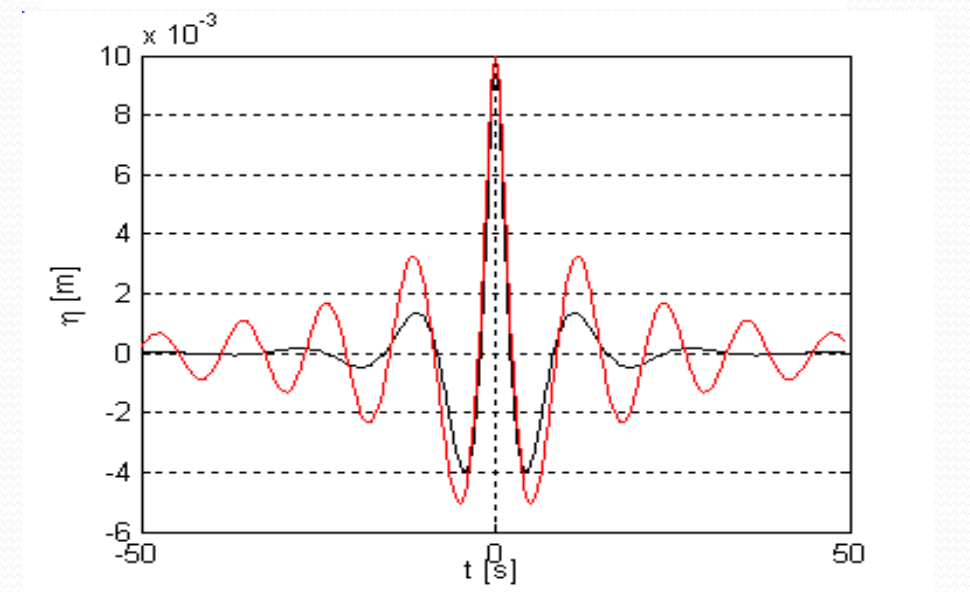
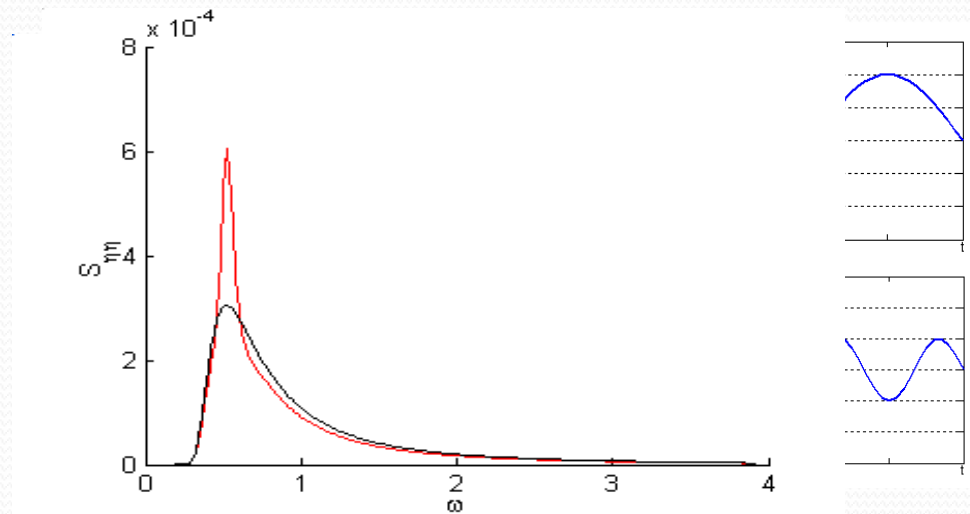
Για κάθε αρμονική συνιστώσα η πυκνότητα ενέργειας υπολογίζεται από τη σχέση

$$\overline{E}_i = \frac{1}{2} g \rho a_i^2$$

# Εύρος Συχνοτήτων

Διασπορά Ενέργειας:  
περιγράφεται από το  
φάσμα  $S_{\eta\eta}(\omega)$

Μεγάλο κύμα:  
άθροισμα  
κυματοκορυφών



# Χαρ/κά Μεγέθη Πραγματικών Κυματισμών

Μέσο ύψος κύματος  $\rightarrow \bar{H} = H_{100} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H_{rms}$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΥΨΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ = η μέση τιμή του ανώτερου 33% των υψών κύματος  $\rightarrow H_s = H_{33} = \sqrt{2} H_{rms}$

$$P(H > H_{33}) = 0,135$$

Η μέγιστη πιθανή τιμή  $H_{max}$  σε δείγμα  $N$  τιμών  $H$ :

$$\rightarrow H_{max} = H_{rms} \sqrt{\ln(N)}$$

όπου  $N = T_L / T_z$  (αν δεν είναι γνωστό)  
 $T_L$  η διάρκεια καταγραφής και  
 $T_z$  η μέση περίοδος κύματος.

Variance of surface elevation  $\sigma_\eta^2 = \int \eta^2 dt$

Significant wave height,  $H_s = 4\sqrt{\sigma_\eta^2}$

Root-mean-square wave height,  $H_{rms} = H_s / \sqrt{2}$

# ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

(wave forecasting)



- εμπειρικά μοντέλα
- δυναμικά-υπολογιστικά μοντέλα

## ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΡΟΓΝΩΣΗΣ

- SMB (Svedrup-Munk-Bretschneider)
- JONSWAP-PM (ενεργειακά φάσματα)



# ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΑ ΦΑΣΜΑΤΑ-1.Φάσμα JONSWAP

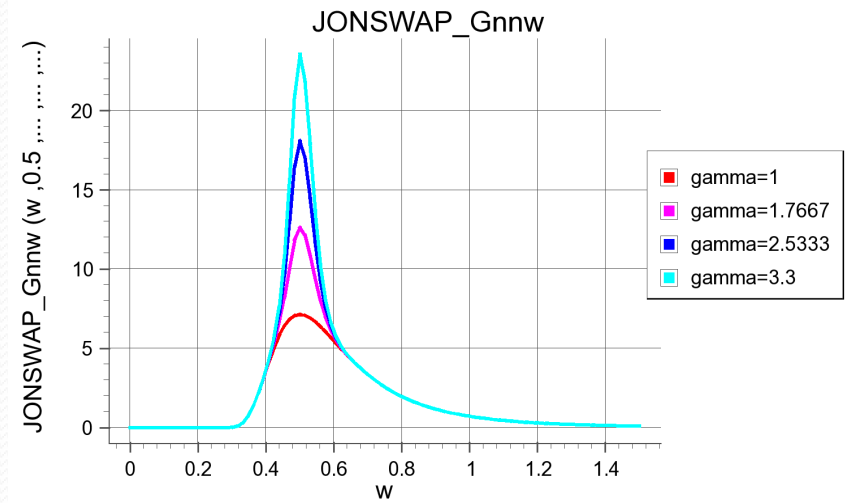
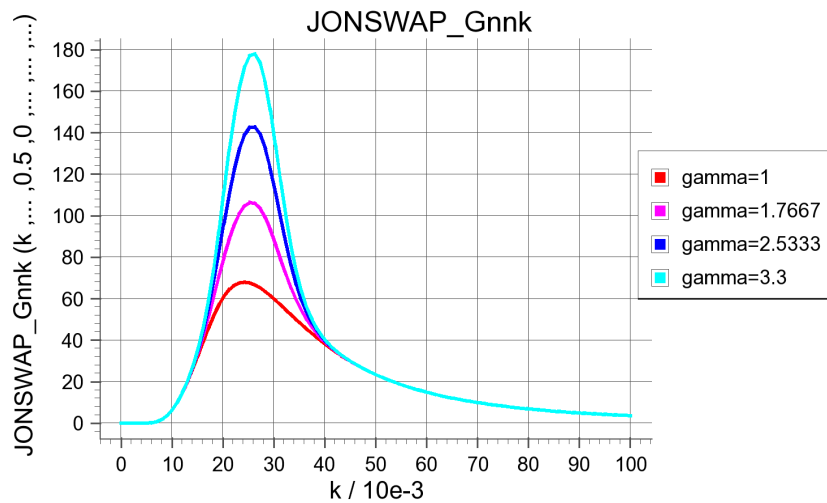
Μετρήσεις στη Β. Θάλασσα  
ανάπτυξη κυματισμών με περιορισμό μήκους

$$E(f) = ag^2(2\pi)^{-4} f^{-5} \exp\left[-1,25\left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right] \gamma \exp\left(-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right)$$

$$a = \frac{0.076}{\left(g \frac{F}{U_{10}^2}\right)^{0.22}}$$

$$f_p = \frac{3.5g}{U_{10} \left(g \frac{F}{U_{10}^2}\right)^{0.33}}$$

# Jonswap



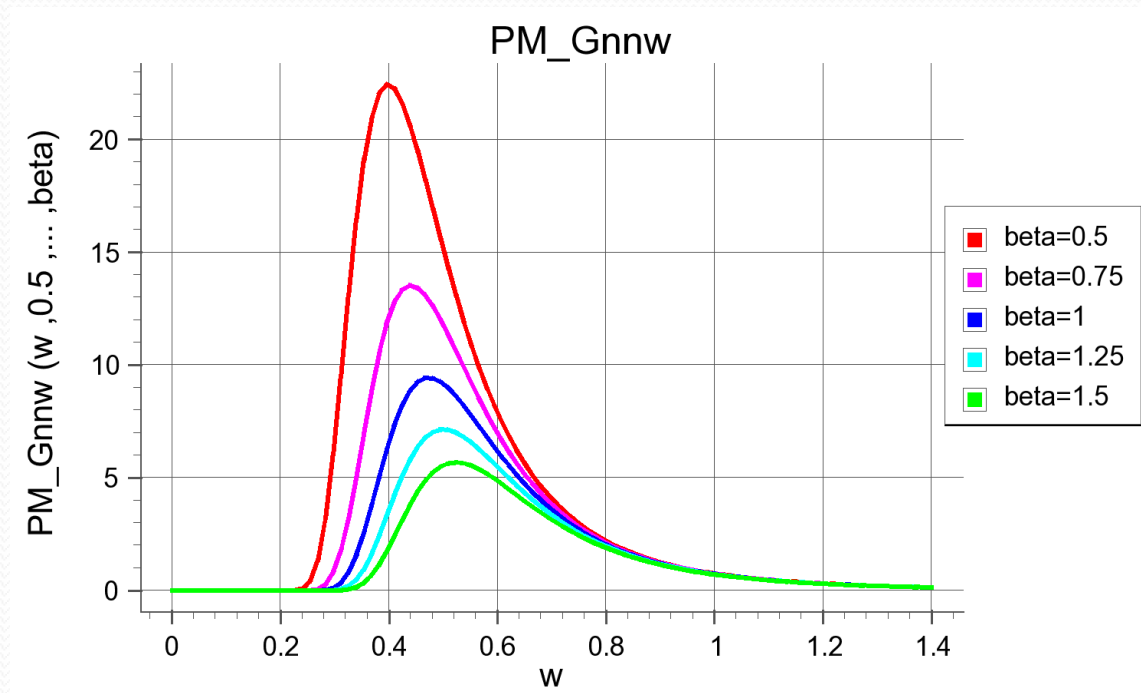
## 2. Φάσμα Pierson Moskowitz (PM)

Η διάρκεια πνοής του ανέμου και το μήκος αναπτύγματος είναι απεριόριστα

$$E(f) = \frac{a g^2}{(2\pi)^4 f^5} e^{-\frac{5\left(\frac{f_p}{f}\right)^4}{4}}$$

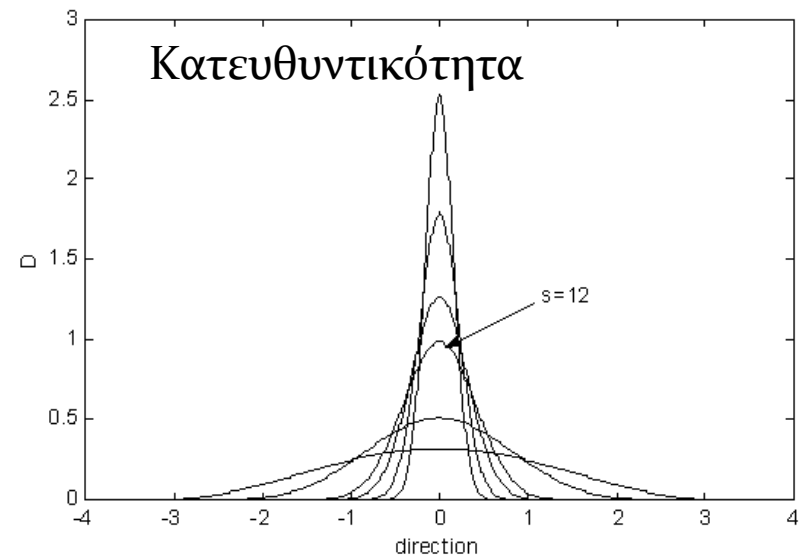
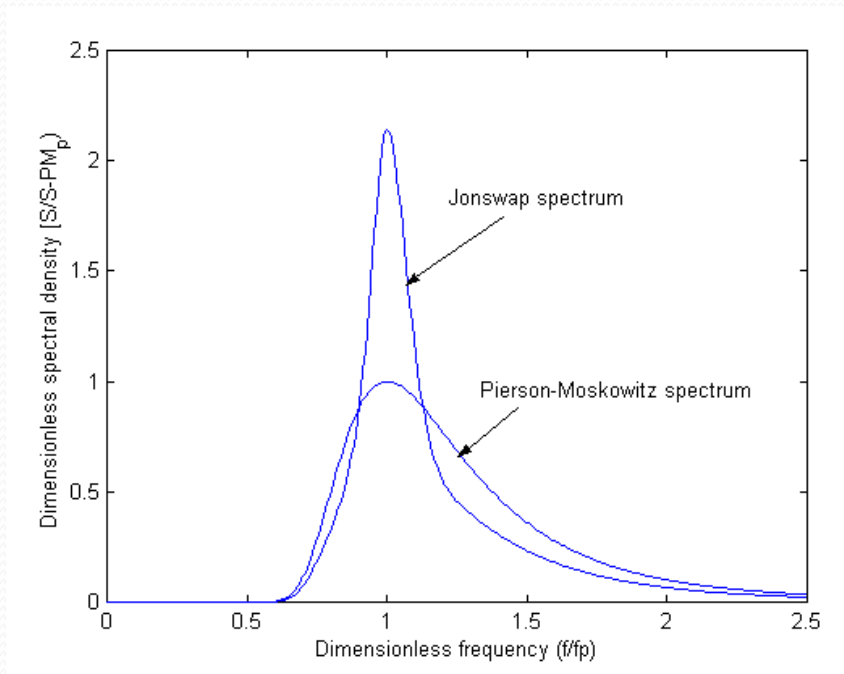
$$f_p = \frac{0.7916g}{2\pi U_{10}}$$

# Pierson Moskowitz

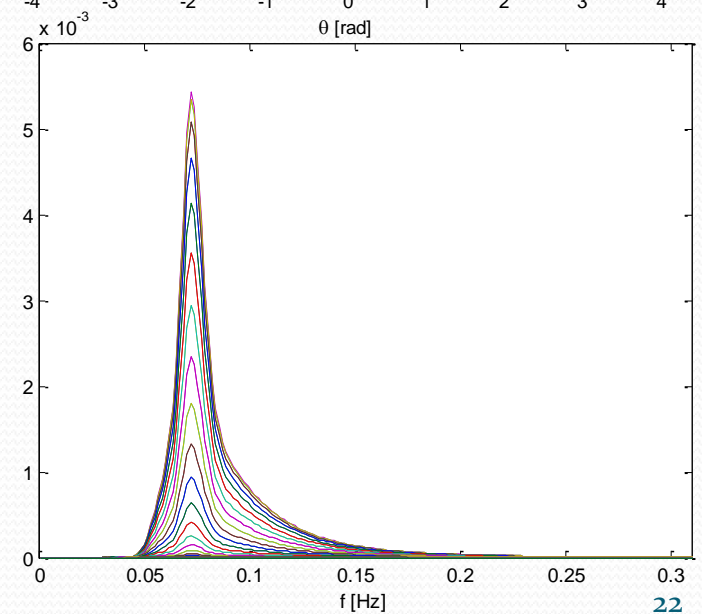
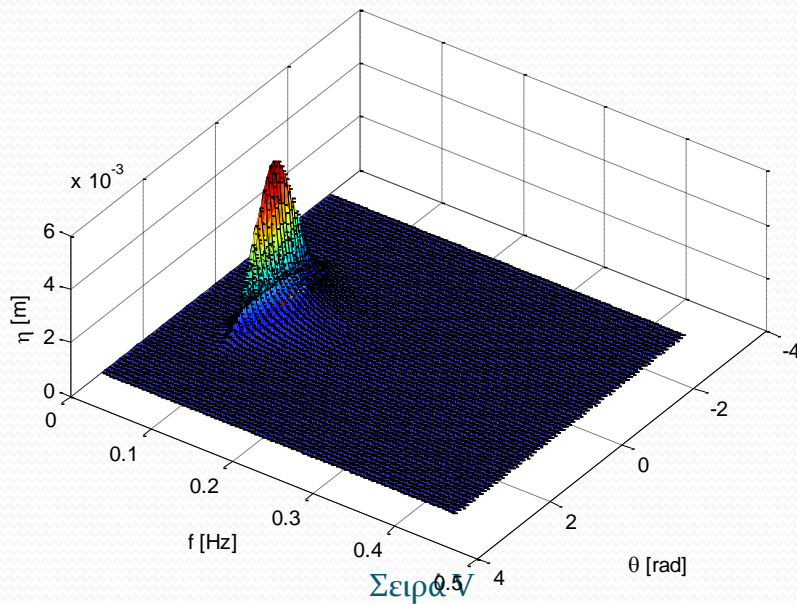
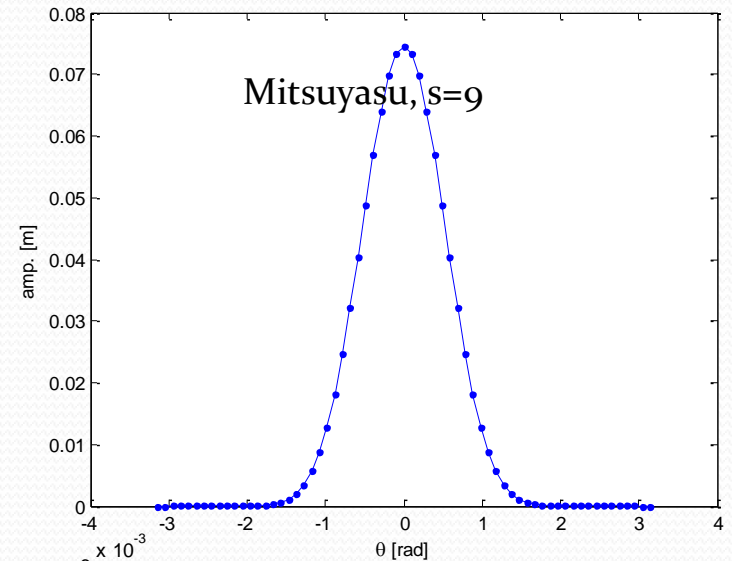
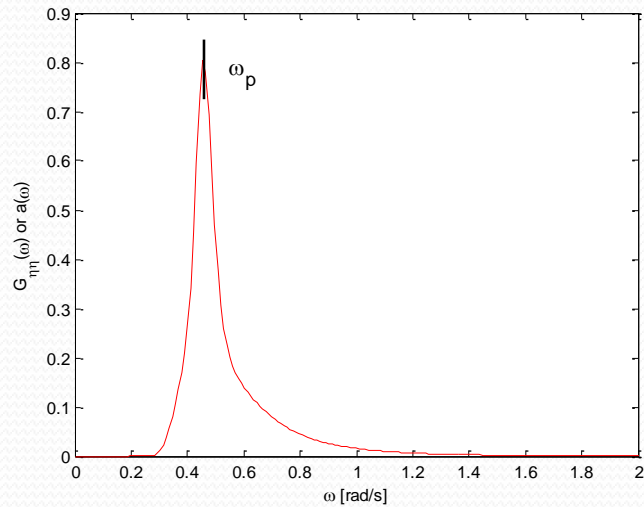


# Jonswap vs. P.M.

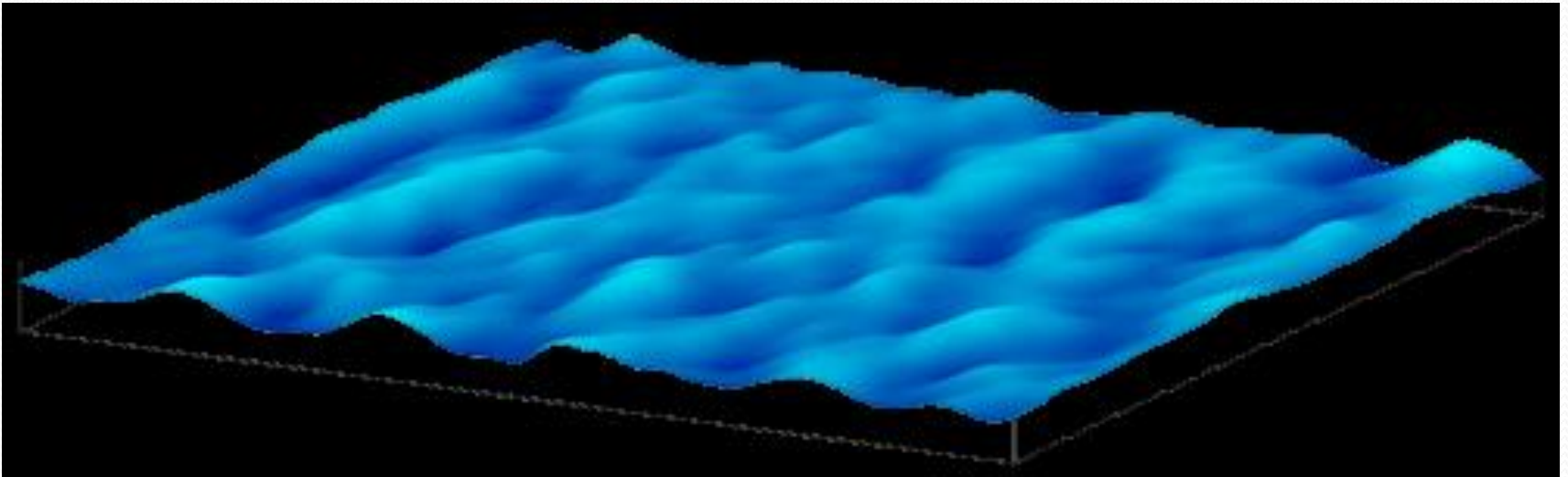
- Κατανομή Mitsuyasu (1975) παράμετρος κατευθυντικότητας  $s$ .
- $\cos^{2s}(\vartheta)$
- $s \rightarrow 0$  μεγάλη κατευθυντικότητα
- $s \rightarrow \infty$  χωρίς κατευθυντικότητα
- Αντιστοιχεί σε  $\sigma_\vartheta = 28^\circ$  κανονικής κατανομής.



# Κατευθυντικοί Κυματισμοί (3D)

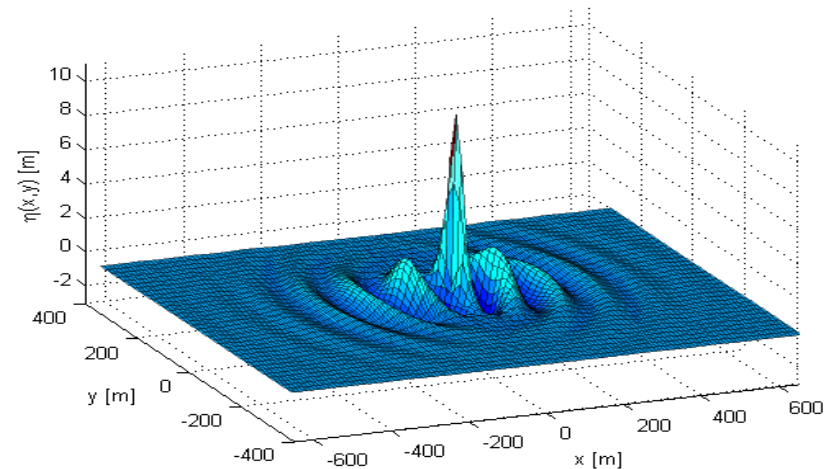
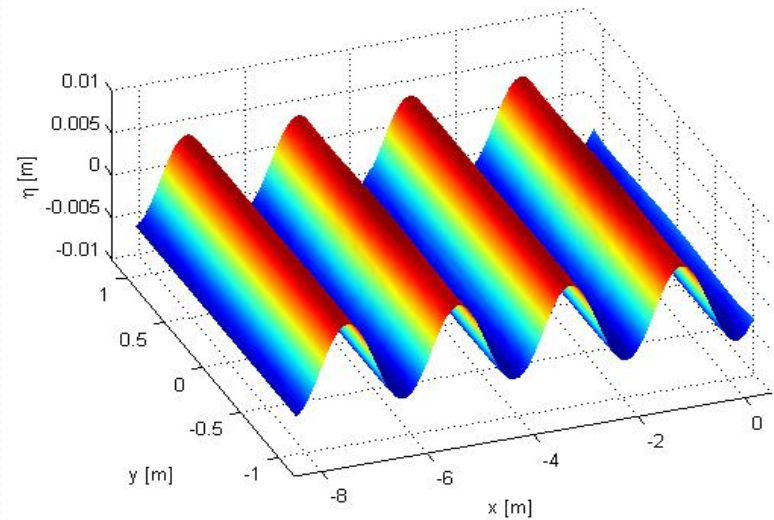


# Κατευθυντικοί Κυματισμοί (3D)



# Κατευθυντικοί κυματισμοί

- Μονοκατευθυντικοί κυματισμοί:  
Μακροκόρυφοι κυματισμοί
- Πολυκατευθυντικοί κυματισμοί:  
Βραχυκόρυφοι κυματισμοί





# 10 top ships in storm

- <https://www.youtube.com/watch?v=aBM7NgMhg9o>

# ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

## Με τη χρήση ενεργειακών φασμάτων (1/3)

$$\text{ΕΛΕΓΧΟΣ: } \frac{gF}{U_A^2} \geq 22.8 \cdot 10^3$$

**A.** Ισχύει η ανισότητα  $\rightarrow$  οι κυματισμοί έχουν πλήρη ανάπτυξη  
Άρα ισχύει το ενεργειακό φάσμα **PM (Pierson - Moskowitz)**

$$(5.32) : g \frac{Hs}{U_A^2} = 0.243 \quad \text{και} \quad (5.33) : g \frac{T_p}{U_A} = 8.13$$

$$U_A = 0.71 U_{10}^{1.23} \quad (m / \text{sec}) \quad \text{και} \quad T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{1}{f_p} \cong 0,8 T_{\text{μέση}}$$

# ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

## Με τη χρήση ενεργειακών φασμάτων (2/3)

B. *Δεν ισχύει η ανισότητα*  $\frac{gF}{U_A^2} \geq 22.8 \cdot 10^3$

ΤΟΤΕ γίνεται εφαρμογή του ενεργειακού φάσματος JONSWAP

**ΕΛΕΓΧΟΣ:**  $\frac{gt_D}{U_A} > 68.8 \left( \frac{gF}{U_A^2} \right)^{0.66}$  (5.31)

NAI → ανάπτυξη κυματισμών σε συνθήκες περιορισμένου μήκους

Επίλυση των εξισώσεων (5.29) και (5.30) για τον υπολογισμό των  $H_s$  και  $T_p$  με  $x=F$

(5.29):  $g \frac{H_s}{U_A^2} = 0.0016 \left( \frac{gx}{U_A^2} \right)^{0.5}$  και (5.30):  $g \frac{T_p}{U_A} = 0.286 \left( \frac{gx}{U_A^2} \right)^{0.33}$

# ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

## Με τη χρήση ενεργειακών φασμάτων (3/3)

Αν δεν ισχύει επιλύουμε την (5.31) έως ισότητα για νέο υπολογισμό νέου F

$$F = \frac{U_A^2}{g} \left( \frac{gt_D}{68.8U_A} \right)^{1.5}$$

ΤΟΤΕ: θέτουμε  $x=F$  το οποίο αντικαθίσταται πάλι στις (5.29) και (5.30) για τον υπολογισμό των  $H_s$  και  $T_p$

$$g \frac{H_s}{U_A^2} = 0.0016 \left( \frac{gx}{U_A^2} \right)^{0.5} \quad \text{και} \quad g \frac{T_p}{U_A} = 0.286 \left( \frac{gx}{U_A^2} \right)^{0.33}$$

# Κλίμακα Beaufort

Μετρήσεις ταχύτητας ανέμου σε ύψος 10m από το έδαφος

| Κλίμακα | Ταχύτητα (km/h) | Ταχύτητα (m/s) |
|---------|-----------------|----------------|
| 0       | 0-1             | <0.28          |
| 1       | 1-5.5           | 0.28-1.53      |
| 2       | 5.5-12          | 1.53-3.33      |
| 3       | 12-19.5         | 3.33-5.42      |
| 4       | 19.5-28.5       | 5.42-7.92      |
| 5       | 28.5-38.5       | 7.92-10.69     |
| 6       | 38.5-49.5       | 10.69-13.75    |
| 7       | 50.0-61.5       | 13.75-17.08    |
| 8       | 61.5-74.5       | 17.08-20.69    |
| 9       | 74.5-88.0       | 20.69-24.44    |
| 10      | 88.0-102.5      | 24.44-28.47    |
| 11      | 102.5-117.5     | 28.47-32.64    |
| 12      | >117.5          | >32.64         |

# Μέθοδος SMB

## Παράδειγμα

Ανεμος ΒΑ:

A. Σημαντικά Μεγέθη:

| Διεύθυνση | Ένταση (BF) (mph) | Συχνότητα (%) | Διάρκεια (h) | Μήκος F (Km) |
|-----------|-------------------|---------------|--------------|--------------|
| ΒΑ        | 8                 | 3             | 3            | 120          |

$$U = 1.87B^{3/2} = 42.31\text{mph} = 42.31 * \frac{1600}{3600} = 18.8 \text{ m/s}$$

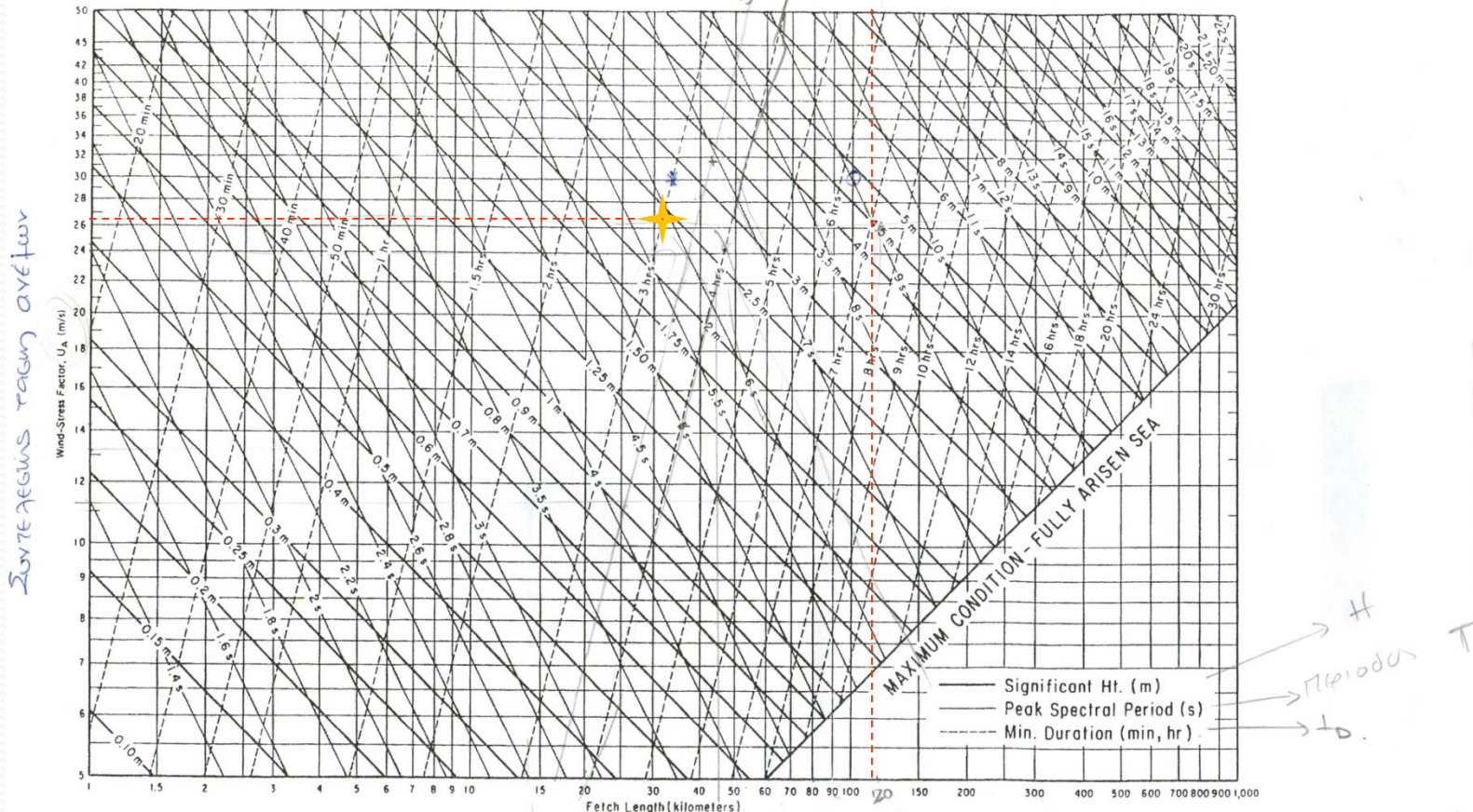
$$U_A = 0.71U^{1.23} = 26.2 \text{ m/s}$$

Από το νομογράφημα SBM (βλέπε επόμενη διαφάνεια):

- $H_s = H_{s,0} = 2.3\text{m}$
- $T = 5.8\text{s} \rightarrow T_s = 0.95 * 5.8 = 5.5\text{s}$  (άνεμος περιορισμένης διάρκειας)  
 $\rightarrow T_p = T_s / 0.781 = 7.04\text{s}$  (θεωρείται φάσμα Jonswar λόγω περιορισμένης διάρκειας, αλλιώς θα ήταν  $T_p = T / 0.71$  που αντιστοιχεί σε φάσμα πλήρους ανάπτυξης PM)

# Μέθοδος SBM

- Από το παρακάτω νομογράφημα (SBM) προσδιορίζω τα σημαντικά μεγέθη  $H_s$  και  $T_s$ .



Νοτοπλάγιο 4  
Σειρά V

Μικρός αναρρόφητος σε έλμ

# Μέθοδος SBM

- Έλεγχος 1:  $\frac{gF}{(U_A)^2} = 1.7123 * 10^3 < 22.8 * 10^3$
- Έλεγχος 2:

$$\frac{gt_D}{U_A} = 4.0407 * 10^3 < 68.8 * \left(\frac{gF}{(U_A)^2}\right)^{0.66} = 9.3701 * 10^3$$

• Έλεγχος 1:  $\frac{gF}{(U_A)^2} = 1.7123 * 10^3 < 22.8 * 10^3$

• Έλεγχος 2:

Άρα νέο  $\frac{gt_D}{U_A} = 4.0407 * 10^3 < 68.8 * \left(\frac{gF}{(U_A)^2}\right)^{0.66} = 9.3701 * 10^3$   
 = 31.543 \* 10<sup>3</sup>(m)

Άρα νέο  $\frac{gt_D}{U_A} = 4.0407 * 10^3 < 68.8 * \left(\frac{gF}{(U_A)^2}\right)^{0.66} = 9.3701 * 10^3$   
 = 31.543 \* 10<sup>3</sup>(m)  
 και από

και από

$H_s = 2.38\text{m}, T = 5.74\text{s} \Rightarrow T_p = 0.95 * \frac{T}{0.781} = 6.98\text{s}$

$$g \frac{H_s}{U_A^2} = 0.0016 \left(\frac{gx}{U_A^2}\right)^{0.5} \quad \text{και} \quad g \frac{T_p}{U_A} = 0.286 \left(\frac{gx}{U_A^2}\right)^{0.33}$$

$$H_s = 2.38\text{m}, T = 5.74\text{s} \Rightarrow T_p = 0.95 * \frac{T}{0.781} = 6.98\text{s}$$



# Δυναμικά (υπολογιστικά) μοντέλα πρόγνωσης κυματισμών

Διατήρηση της κατευθυντικής φασματικής πυκνότητας ενέργειας

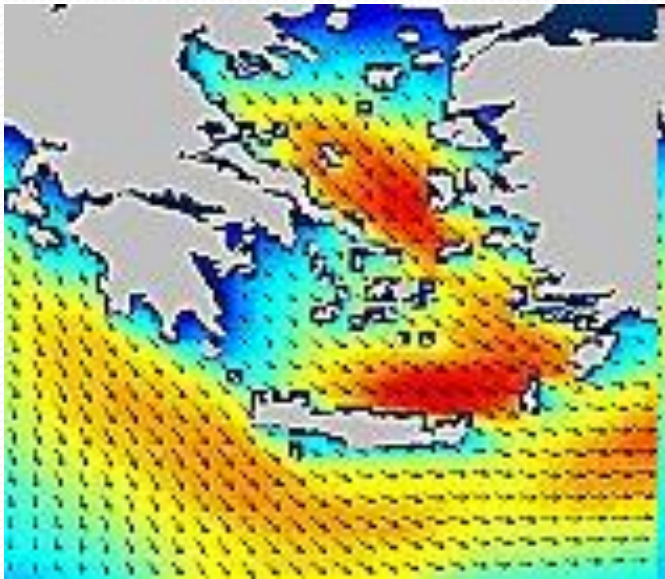
$$\frac{\partial F}{\partial t} + C_g \cos \vartheta \frac{\partial F}{\partial x} + C_g \cos \vartheta \frac{\partial F}{\partial y} = S_{in} + S_{nl} + S_{ds}$$

$F(x, y, f, \vartheta, t)$  η φασματική πυκνότητα ενέργειας

$S_{in}$  όρος ανάπτυξης κυματισμών

$S_{nl}$  όρος ανακατανομής ενέργειας

$S_{ds}$  όρος απωλειών ενέργειας (θραύση)



Το κυματικό μοντέλο ΠΟΣΕΙΔΩΝ