ΚΥΜΑΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ & ΕΡΓΑ ΑΝΟΙΚΤΗΣ ΘΑΛΑΣΣΑΣ

Σειρά I:

Εισαγωγή στη Γραμμική Θεωρία Κυμάτων

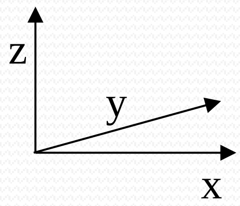
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας - Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Δρ. Βασιλική Κατσαρδή

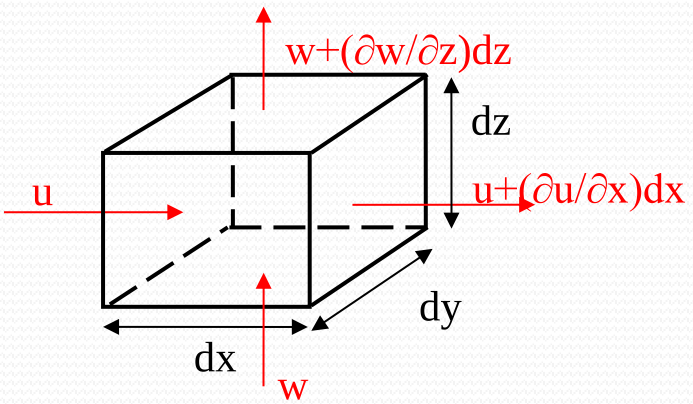
Περιεχόμενα

- Εξίσωση Συνέχειας
- Αστρόβιλη Ροή
- Εξισώσεις Κίνησης
- Γραμμική Θεωρία Κυμάτων
- Οριακές Συνθήκες
- Τροχιές Σωματιδίων
- Εξίσωση Διασποράς
- Κατανομή Πίεσης
- Παραδείγματα

1. Εισαγωγή

1.1 Εξίσωση Συνέχειας της Μάζας





$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$ (1α) **Εξίσωση συνέχειας της μάζας** για 2D πεδίο ροής.

Αντίστοιχα για 3D πεδίο ροής: $$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$ (1β)

1.2 Αστρόβιλη Ροή

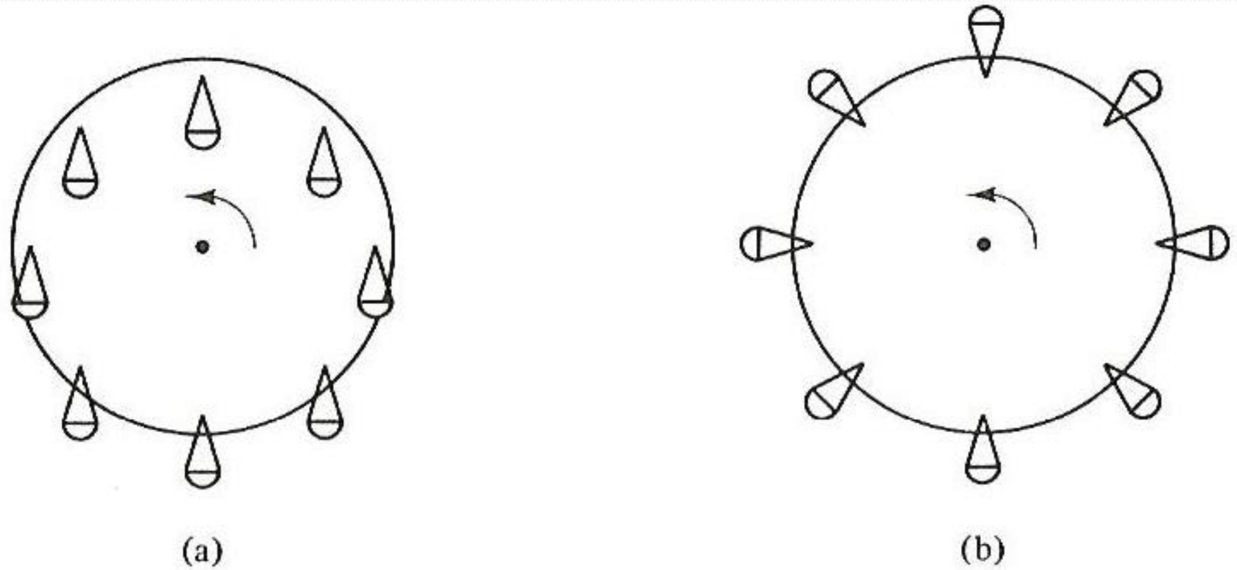


Figure 2.11 (a) Irrotational motion of chairs on a Ferris wheel; (b) rotational motion of the chairs.

1.2 Αστρόβιλη Ροή

Έτσι για **αστρόβιλη ροή** έχουμε μηδενική στροβιλότητα σε κάθε σημείο της ροής

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0} \quad (1d)$$

1.3 Δυναμικό Ροής

Με δεδομένο την αστρόβιλη ροή, $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$,

$$\int w\, dz = \int u\, dx$$

Θέτοντας το παραπάνω ως μία συνάρτηση φ έχουμε

$\int w\, dz = \int u\, dx = \varphi(x, z, t)$ ← **Δυναμικό ροής**

Έτσι, $\boxed{u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}}$ και $\boxed{w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}}$ (και $\boxed{v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}}$ για 3D ροή) (1e)

Μία συνάρτηση περιγράφει **όλη** τη ροή.

1.3 Δυναμικό Ροής – Εξίσωση Laplace

Από την εξίσωση συνέχειας της μάζας για 3D ροή:

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ και με δεδομένα τα $u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $w=\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ και $v=\frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=0$ άρα $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0$ ή

$$\boxed{\nabla^2\varphi=0}$$

*Συνάρτηση **Laplace** με όρους φ*

Εύκολη στη λύση του!!!

1.3 Ροϊκή Συνάρτηση

Αντίστοιχα, με δεδομένο την εξίσωση συνέχειας, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial z}$,

ολοκληρώνοντας **ως προς x** έχουμε

$\int \frac{\partial u}{\partial x} dx = -\int \frac{\partial w}{\partial z} dx$ και άρα $u = -\int \frac{\partial w}{\partial z} dx$

ολοκληρώνοντας **ως προς z** έχουμε

$\int u\, dz = -\iint \frac{\partial w}{\partial z} dx dz$ και άρα $\int u\, dz = -\int w\, dx$

Θέτοντας το παραπάνω ως μία συνάρτηση ψ έχουμε

$\int u\, dz = -\int w\, dx = \psi(x, z, t)$ ← **Ροϊκή Συνάρτηση**

Έτσι, $\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial z}}$ και $\boxed{w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$ (1e')

Πάλι μία συνάρτηση περιγράφει **όλη** τη ροή.

1.3 Ροϊκή Συνάρτηση – Εξίσωση Laplace

Η εξίσωση συνέχειας της μάζας ικανοποιείται αυτόματα:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}=0$$

Με δεδομένο την αστρόβιλη ροή,

$$\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)=0$$

άρα $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}=0$

$$\boxed{\nabla^2 \psi=0}$$

*Συνάρτηση **Laplace** με όρους ψ*

Όμοια εύκολη στη λύση του!!!

1.3 Φυσική σημασία του φ και ψ

Γραμμές φ = σταθερό

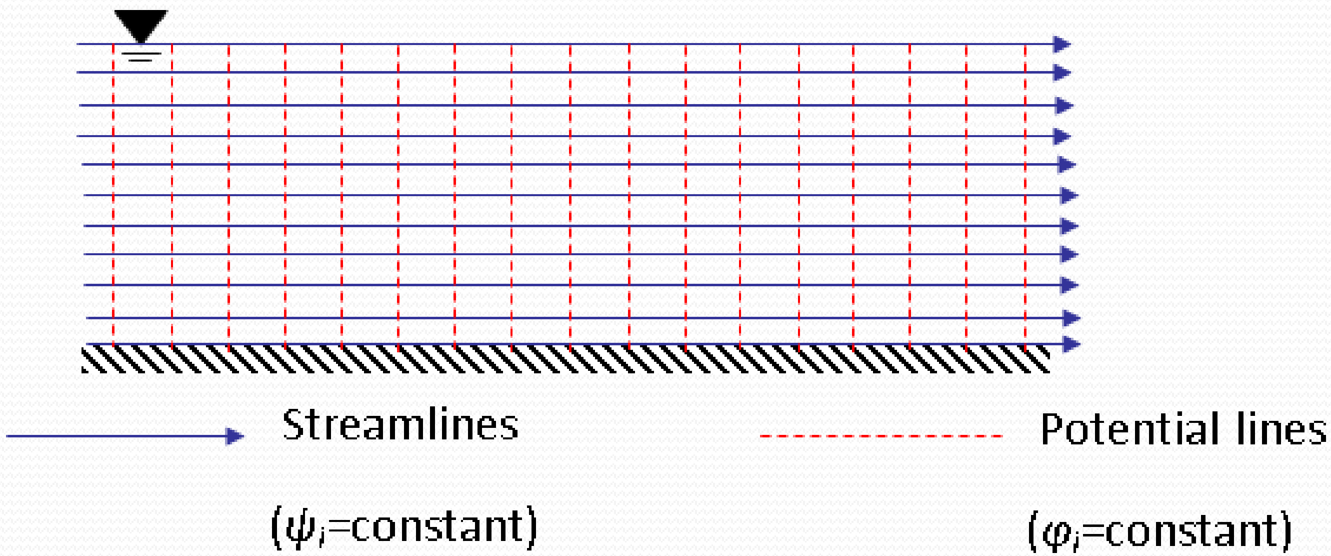
- Αντιπροσωπεύουν τις **γραμμές δυναμικού**
- Ενώνουν σημεία με ίσο δυναμικό ροής
- Ισοδύναμο με το βαρυτικό δυναμικό πεδίο και έτσι ενώνει σημεία ίσου βαρυτικού δυναμικού
- το δυναμικό για την κίνηση προκύπτει λόγω κλίσης πίεσης
- Οι γραμμές δυναμικού έτσι, ενώνουν σημεία ίσης κλίσης πίεσης

Γραμμές ψ = σταθερό

- Αντιπροσωπεύουν τις **γραμμές ροής**
- Αυτές δείχνουν την κίνηση ή μετακίνηση των σωματιδίων ρευστού
- Εύκολα ορατό σε πειράματα
- Το ρευστό κινείται στην κατεύθυνση της κλίσης πίεσης (από υψηλή σε χαμηλή). Έτσι οι γραμμές ροής πρέπει να είναι **κάθετες** στις γραμμές δυναμικού.
- Οι γραμμές δυναμικού και οι γραμμές ροής αποτελούν το πλέγμα ροής.

1.3 Φυσική σημασία του φ και ψ

Παράδειγμα: Ροή σε ανοιχτό αγωγό



1.4 Εξισώσεις Κίνησης

Εισάγοντας τα παραπάνω έχουμε τις **Εξισώσεις Euler**

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u\partial u}{\partial x}+\frac{v\partial u}{\partial y}+\frac{w\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{u\partial v}{\partial x}+\frac{v\partial v}{\partial y}+\frac{w\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{u\partial w}{\partial x}+\frac{v\partial w}{\partial y}+\frac{w\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g$$

Μη ιδανικά ρευστά μ≠0

- Navier – Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho g_z\,.$$

Εξισώσεις RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes)

- $u = \bar{u} + u'$
- $v = \bar{v} + v'$
- $w = \bar{u} + u'$
- $p = \bar{p} + p'$

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt$$

Για ροές με σταθερές (ανεξάρτητες του χρόνου) μακροσκοπικές συνοριακές συνθήκες

$$\overline{u'} = 0$$

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T}\int_0^T u'^2\,dt$$

- $\bar{u}$: μέση τιμή της ταχύτητας
- u': ταχύτητα διακύμανσης

Με την επαλληλία μελετούμε τις τυρβώδεις ροές του μέσου πεδίου ταχύτητας και του πεδίου διακυμάνσεων. Αντίστοιχα και για τα πεδία της πίεσης. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes: $\overline{u'v'} \neq 0$, $\overline{u'w'} \neq 0$, $\overline{v'w'} \neq 0$ ενώ $\overline{\bar{u}v'} = 0$ κλπ.

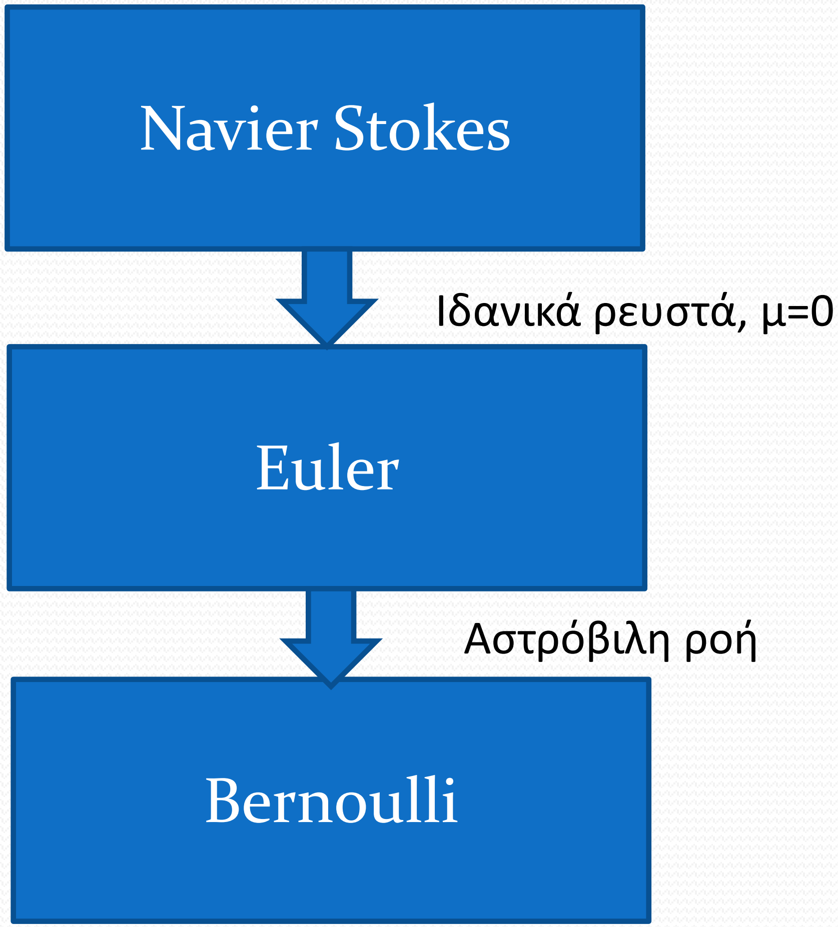
1.4 Εξισώσεις Κίνησης

Εισάγοντας την αστρόβιλη ροή για τις 2 διαστάσεις λαμβάνουμε την **Εξίσωση Bernoulli**

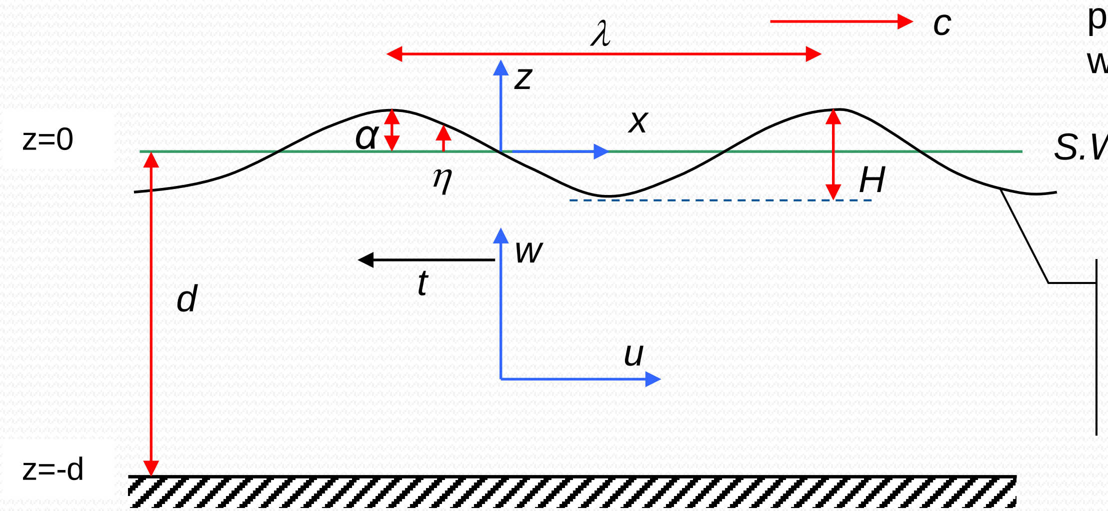
$$\frac{\rho\partial\varphi}{\partial t} + p + \rho g z + \rho\left[\frac{u^2 + w^2}{2}\right] = C$$

όπου C σταθερά Bernoulli.

Εξισώσεις


Navier Stokes
Ιδανικά ρευστά, μ=0
Euler
Αστρόβιλη ροή
Bernoulli

2. Γραμμική Θεωρία (Θεωρία Airy)



Ταχύτητα μετάδοσης
phase velocity
wave celerity

Ελεύθερη επιφάνεια η(x,t) $\boxed{\eta = a\sin(\omega t - kx)}$

Wave Frequency, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; Wave Number $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$k =$ αριθμός κύματος $\lambda =$ μήκος κύματος,

2.1 Βασικές Παραδοχές

(A) Αρχή διατήρησης της μάζας (υποθέτει και το ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο)

2D: $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$ Εξ. (2.1)

(B) Αστρόβιλη ροή 2D: $$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$ Εξ. (2.2)

(C) Εξίσωση Bernoulli: 2D: $$\frac{\rho\partial\varphi}{\partial t} + p + \rho g z + \rho\left[\frac{u^2+w^2}{2}\right] = C$$ Εξ. (2.3)

(D) Κίνηση περιοδική σε *x* και *t*

(E) Εύρος κυματισμού μικρό σε σχέση με το μήκος κύματος,

$$a \ll \lambda$$

(F) Εύρος κυματισμού μικρό σε σχέση με το βάθος,

$$a \ll d.$$

2.2 Βασικές Εξισώσεις

Παίρνουμε την 1η παράγωγο ως προς x της εξίσωσης της μάζας

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Αντικαθιστούμε για αστρόβιλη ροή με την εξίσωση 2.2: $\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ Εξ. (2α) *Εξίσωση Laplace με όρους ταχύτητας*

Αφού η κίνηση είναι περιοδική σε *x* και *t* μπορεί να εκφραστεί σαν μία σειρά Fourier σε $(\omega t - kx)$. Άρα:

$$u = F_1(z)\sin(\omega t - kx) + F_2(z)\sin 2(\omega t - kx) + F_3(z)\sin 3(\omega t - kx) + \cdots$$

Ενδιαφερόμαστε μόνο για τον 1ο όρο $u = F_1(z)\sin(\omega t - kx)$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2α) $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - k^2 F = 0$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση $F(z) = A\cosh(kz) + B\sinh(kz)$, A & B σταθερές

Άρα $\boxed{u = [A\cosh(kz) + B\sinh(kz)]\sin(\omega t - kx)}$ Εξ. (2β) **Οριζόντια Συνιστώσα Ταχύτητας**

- Σημείωση $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ και $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

2.2 Βασικές Εξισώσεις -Συνέχεια

Από την εξίσωση της μάζας

$$w = -\int \frac{\partial u}{\partial x} dz$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 2β

$\boxed{w = [A\sinh(kz) + B\cosh(kz)]\cos(\omega t - kx)}$ Εξ. (2γ) **Κατακόρυφη Συνιστώσα Ταχύτητας**

2.3 Οριακές Συνθήκες

1. Στον πυθμένα
   - Οριζόντιος
   - Αδιαπέρατος

Τότε Κατακόρυφη Ταχύτητα είναι μηδέν, $w = 0$ στο $z = -d$

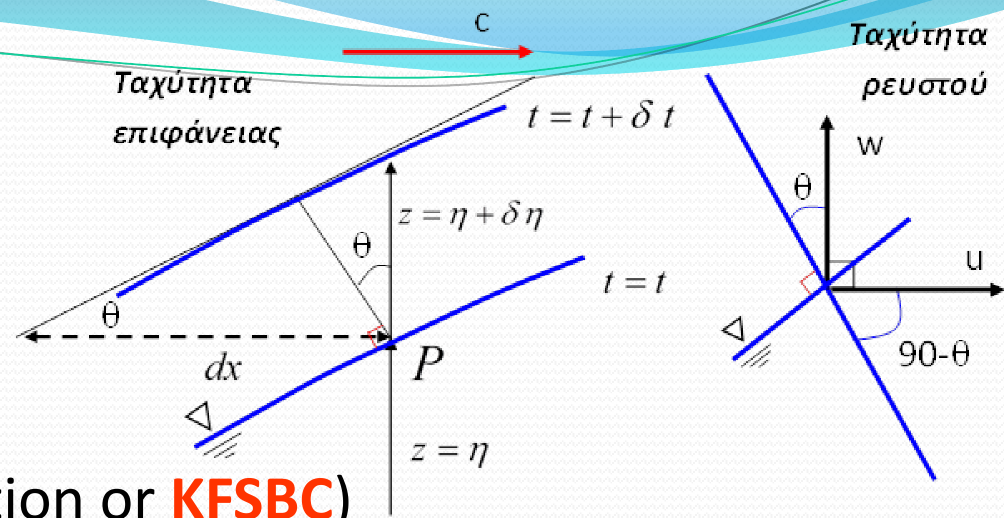
Εξ. (2γ) γίνεται $0 = [A\sinh(kd) + B\cosh(kd)]\cos(\omega t - kx)$ ή

$A\sinh(kd) = B\cosh(kd)$ ή $B = A\tanh(kd)$

Στην Εξ. (2γ) πάλι $w = \frac{A\sinh[k(z+d)]}{\cosh(kd)}\cos(\omega t - kx)$ εξ. (2δ)

2.3 Οριακές Συνθήκες - Συνέχεια

2. Στην επιφάνεια
   i. Τα σωματίδια παραμένουν στην επιφάνεια (Kinematic free-surface boundary condition or **KFSBC**)



Τότε η ταχύτητα του ρευστού κάθετη στην επιφάνεια πρέπει να είναι ίση με την ταχύτητα της επιφάνειας κατά μήκος της καθέτου.

Για μία δεδομένη τιμή του *x* έστω ότι *z=η* αντιπροσωπεύει ένα σημείο P πάνω στην επιφάνεια σε χρόνο *t*. Σε χρόνο *t+δt,* η επιφάνεια θα δίνεται από *z=η+δη.*

Από το αριστερό τμήμα της εικόνας: η ταχύτητα της επιφάνειας πάνω στην κάθετο, μέσω του σημείου P είναι: $\frac{(\eta+\partial\eta)-\eta}{\partial t}\cos\theta = \frac{\partial\eta}{\partial t}\cos\theta$

Από το δεξιό τμήμα της εικόνας: η ταχύτητα του ρευστού κατά μήκος της ίδιας καθέτου είναι: $w\cos\theta - u\sin\theta$

Εξισώνοντας τα παραπάνω έχουμε: $\frac{\partial\eta}{\partial t}\cos\theta = w\cos\theta - u\sin\theta$ ή

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = w - u\tan\theta = w - \frac{u\partial\eta}{\partial x}$$

2.3 Οριακές Συνθήκες- Συνέχεια

$\frac{\partial\eta}{\partial t}$=$w - \frac{u\partial\eta}{\partial x}$

Όμως εφόσον α<<λ τότε $\frac{\partial\eta}{\partial x} \ll 1$, και άρα $\frac{u\partial\eta}{\partial x} \ll w$

Άρα $\frac{\partial\eta}{\partial t} = (w)_{z=\eta}$ και άρα από την εξίσωση (2δ) → $\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{A\sinh[k(\eta+d)]}{\cosh(kd)}\cos(\omega t - kx)$

Επίσης, αφού *α<<d*, τότε *η<<d*, άρα $\sinh[k(\eta + d)] \rightarrow \sinh[kd]$

Ολοκληρώνοντας έχουμε $\eta = \frac{A\sinh(kd)}{\omega\cosh(kd)}\sin(\omega t - kx)$

Όμως εξ ορισμού $\boxed{\eta = \alpha \sin(\omega t - kx)}$ Εξ. (2ε) $\quad a = \frac{A}{\omega}\tanh(kd)$

Αντικαθιστώντας στις (2β) και (2δ) παίρνουμε

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{a\omega\cosh[k(z + d)]}{\sinh(kd)}\sin(\omega t - kx) \\ w &= \frac{a\omega\sinh[k(z + d)]}{\sinh(kd)}\cos(\omega t - kx) \end{aligned}}$$

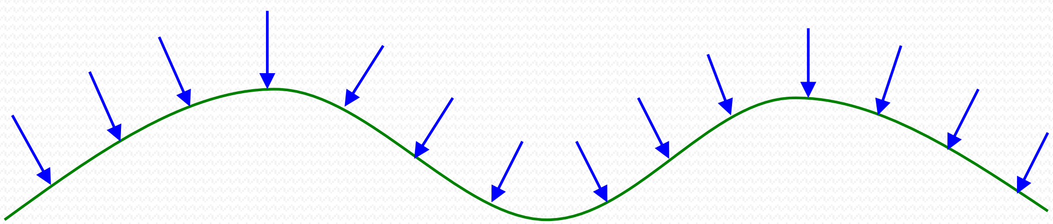
Εξς. (2ζ)

2.3 Οριακές Συνθήκες- Συνέχεια

2. Στην επιφάνεια

ii. ***"Η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι σταθερή" (π.χ. ατμοσφαιρική).***

(Dynamic free-surface boundary condition or **DFSBC**)



$P(y=\eta)=$ Constant.

Σημείωση: Αυτή η συνθήκη αγνοεί τις επιδράσεις ροής αέρα (ανέμου).

- Bernoulli: $\frac{\rho\partial(\int u\partial x)}{\partial t} + p + \rho g z + \rho\left[\frac{u^2+w^2}{2}\right] = C$
- Αφού "α" είναι μικρό *u* >> u^2, και έτσι $\rho\left[\frac{u^2+w^2}{2}\right]$ είναι όρος 2ης τάξης και μπορεί να παραλειφθεί.
- Αντικαθιστώντας την *u*, και θέτοντας $z = \eta = \alpha\sin(\omega t - kx)$ στην επιφάνεια

$$-\frac{\rho\alpha\omega^2}{k}\frac{\cosh[k(\eta+d)]}{\sinh kd}\sin(\omega t - kx) + \rho g a\sin(\omega t - kx) = C$$

- Εξισώνοντας τους συντελεστές της παραπάνω εξίσωσης:

$$-\frac{\rho\alpha\omega^2}{k}\frac{\cosh[k(\eta+d)]}{\sinh kd} + \rho g a = 0$$

2.5 Ταχύτητα μετάδοσης (c)

- Αλλά αφού $\eta << d$

$$\frac{\omega^2}{k}\frac{\cosh(kd)}{\sinh(kd)} = g \qquad \therefore \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k}\tanh(kd)$$

Αλλά, $$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \qquad \therefore c = \frac{\omega}{k} = \left[\frac{g}{k}\tanh(kd)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Επομένως: $\boxed{\omega = \left[gk\tanh(kd)\right]^{\frac{1}{2}}}$ ή $\boxed{\omega^2 = \left[gk\tanh(kd)\right]}$ Εξ. (2η)

$$\left.\begin{array}{ll} T \Rightarrow \omega & \surd \\ d & \surd \end{array}\right\} \textbf{Σχέση διασποράς} \Rightarrow k$$

2.3 Οριακές Συνθήκες- Συνέχεια -Ταχύτητα μετάδοσης (c)

Εξ ορισμού η περίοδος είναι ο χρόνος που χρειάζεται το κύμα για να διανύσει απόσταση ίση με το μήκος, λ.

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

2.3 Οριακές Συνθήκες- Συνέχεια

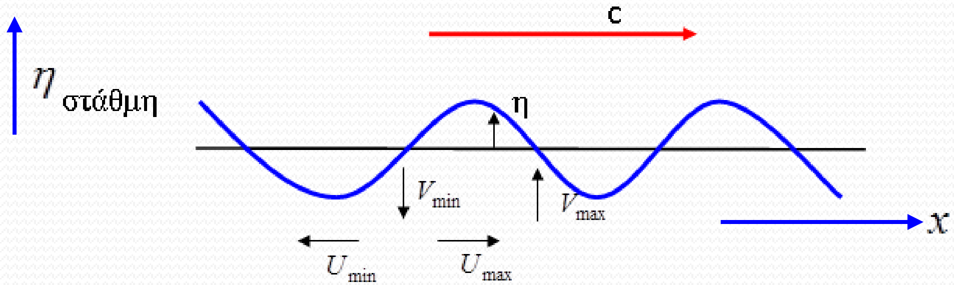
Συνιστώσες ταχύτητας:

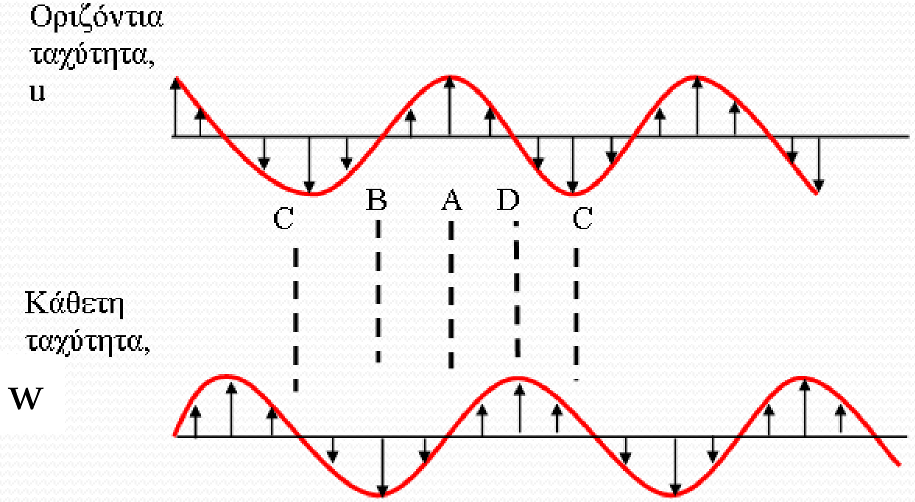
$\eta = \alpha \sin(\omega t - kx)$ Εξ. (2ε)

$$u = \frac{\alpha\omega\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(\omega t - kx)$$

$$w = \frac{\alpha\omega\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(\omega t - kx)$$

Εξς. (2ζ)





Ταχύτητες και επιταχύνσεις

$$u = \frac{a\omega \cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(\omega t - kx)$$

$$w = \frac{a\omega \sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(\omega t - kx)$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t}, a_z = \frac{\partial w}{\partial t}$$

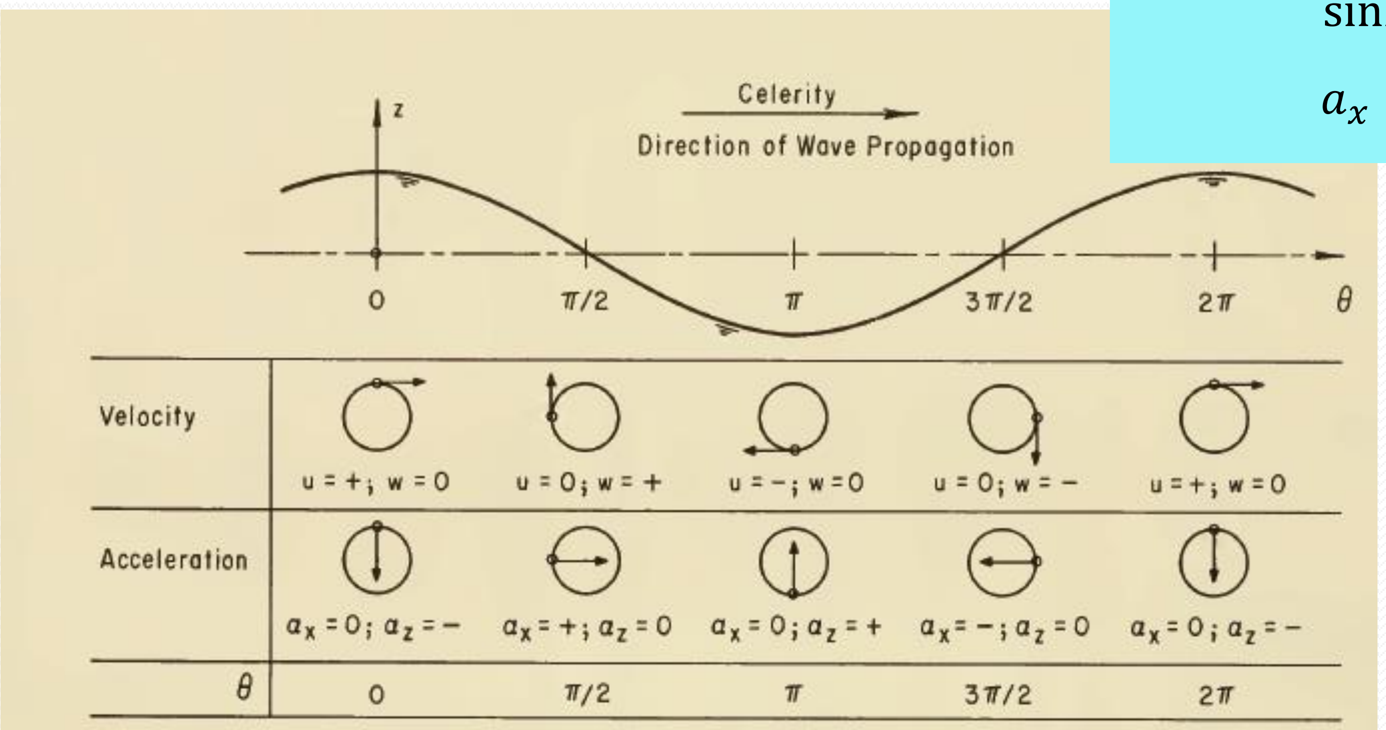


Figure 2-3. Local fluid velocities and accelerations.

SPM 2-14

2.3 Οριακές Συνθήκες- Συνέχεια

Επανεξέταση ορίων στον πυθμένα, *z=-d*

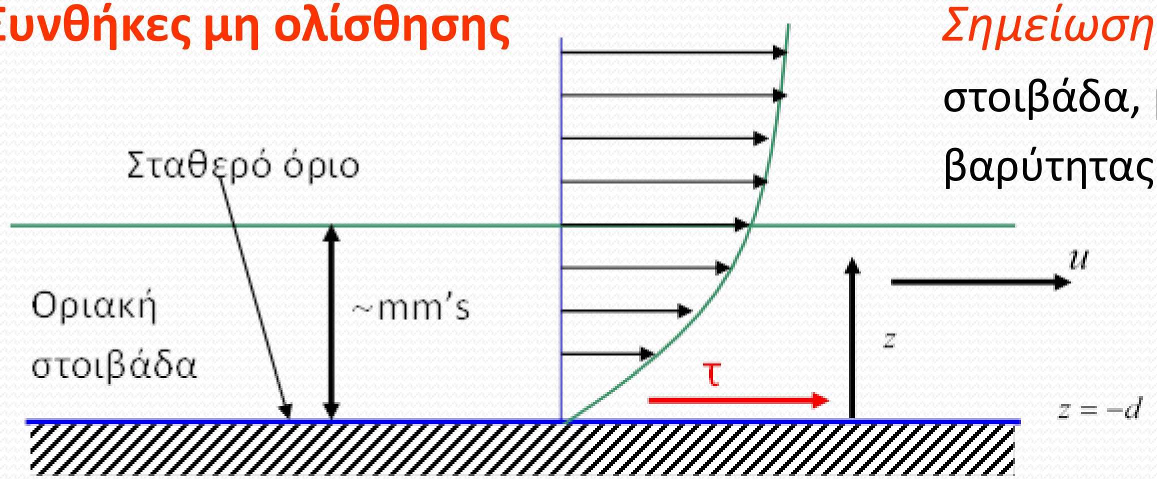
i. Στο *z=-d* $\sinh[k(z+d)] = \sinh[0] = 0 \Rightarrow w = 0$ ok!

ii. Στο *z=-d* $\cosh[k(z+d)] = \cosh[0] = 1 \Rightarrow u = \dfrac{a\omega}{\sinh(kd)}\sin(\omega t - kx)$

Στην πραγματικότητα και οι 2 συνιστώσες πρέπει να είναι μηδενικές σε σταθερό όριο λόγω τριβών.

Συνθήκες μη ολίσθησης

Σημείωση: Πάνω από την οριακή στοιβάδα, μόνο οι δυνάμεις βαρύτητας έχουν σημασία.



Εκθετική μείωση στο όριο. Το ιξώδες είναι σημαντικό

$$\tau = \mu \frac{du}{dz}$$

2.4 Μετατοπίσεις σωματιδίων

Αν $\hat{\xi}, \hat{\psi}$ τοπικές συντεταγμένες που ορίζουν την θέση ενός σωματιδίου του ρευστού

τότε: $u \approx \dfrac{\partial \hat{\xi}}{\partial t}$ και $w \approx \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}$ (Πλήρης λύση μέσω ανάπτυξης σειρών Taylor)

Άρα: $\hat{\xi} = \int u dt$ και $\hat{\psi} = \int w dt$

$$u = \frac{a\omega\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\sin(\omega t - kx)$$
$$w = \frac{a\omega\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\cos(\omega t - kx)$$

Εξς. (2ζ)

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (2ζ)

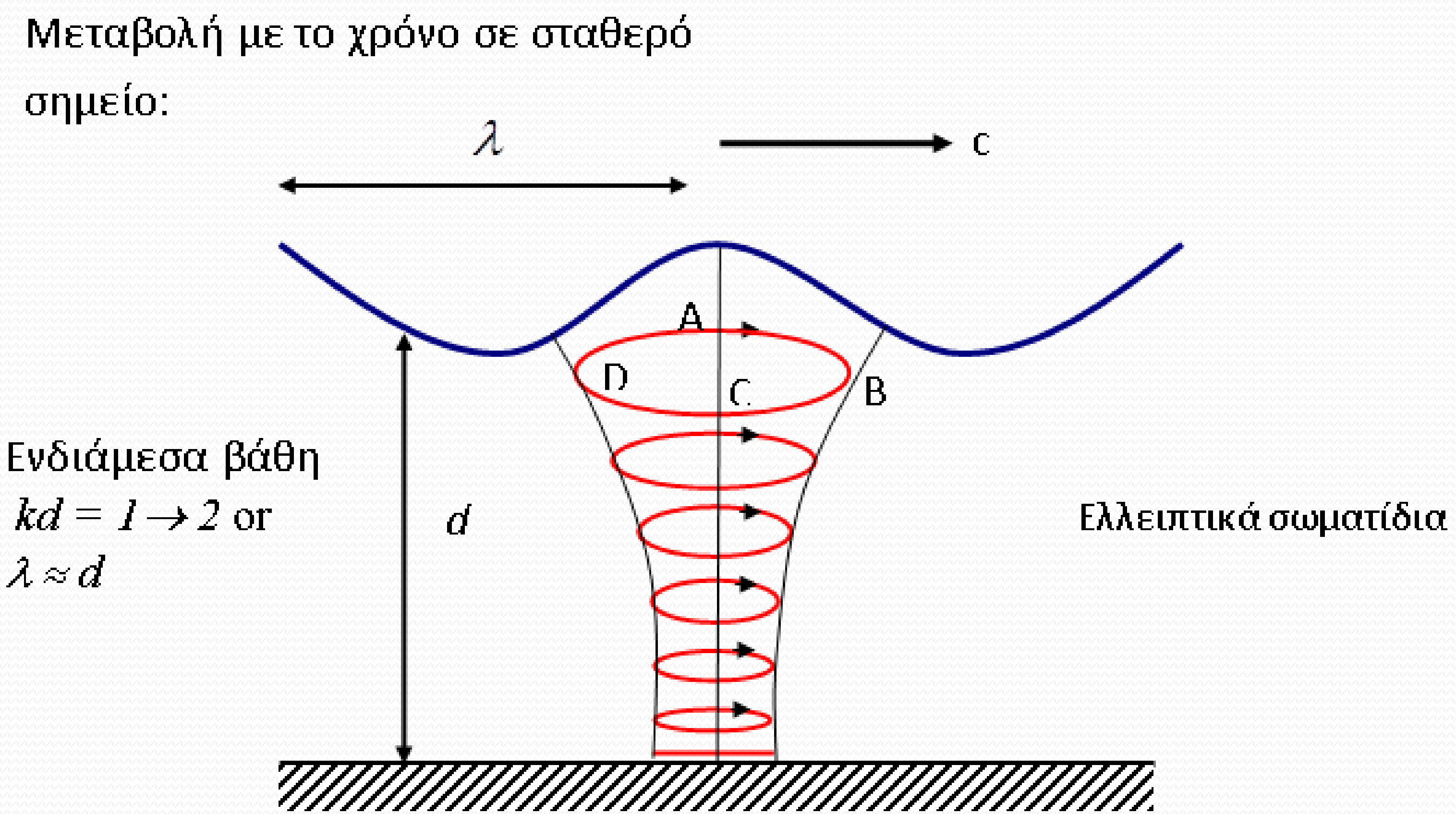
$$\hat{\xi} = \frac{-\alpha\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\cos(\omega t - kx)$$
$$\hat{\psi} = \frac{\alpha\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\sin(\omega t - kx)$$

Εξς. (2η)

Αφού: $\cos^2(\omega t - kx) + \sin^2(\omega t - kx) = 1$ ⇨ $\dfrac{\hat{\xi}^2}{\cosh^2[k(z+d)]} + \dfrac{\hat{\psi}^2}{\sinh^2[k(z+d)]} = \text{constant}$

Εξίσωση Έλλειψης

2.4 Μετατοπίσεις σωματιδίων – Συνέχεια



Για πολύ ρηχά νερά δεν έχει εφαρμογή αυτή η θεωρία.

2.4 Μετατοπίσεις σωματιδίων – Συνέχεια

Αν τα νερά είναι βαθειά $d \to \infty$

$$u = \frac{a\omega \cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(\omega t - kx)$$ αλλά

$$\cosh[k(z+d)] = \frac{\left[e^{k(z+d)} + e^{-k(z+d)}\right]}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{kz}e^{kd} - e^{-kz}e^{-kd}\right] = \frac{e^{kz}e^{kd}}{2}$$ και

$$\sinh(kd) = \left[e^{kd} - e^{-kd}\right]\frac{1}{2} = \frac{e^{kd}}{2}$$

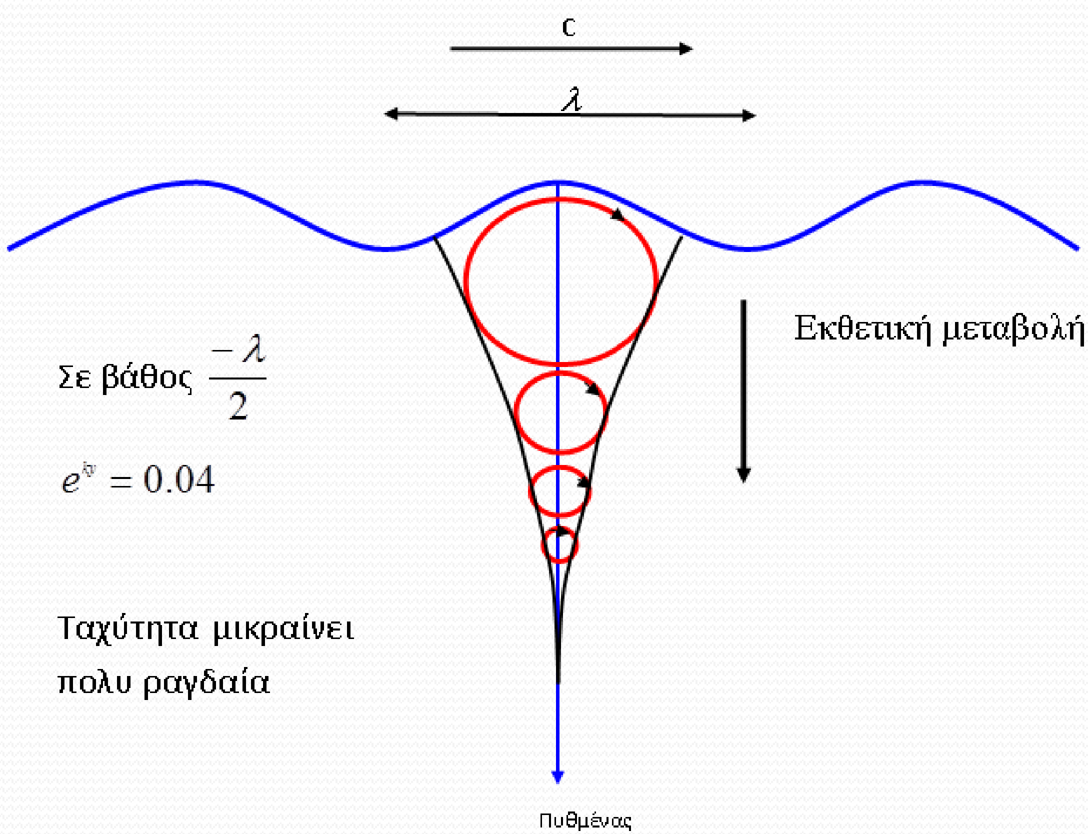
Έτσι: $\frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \to \frac{e^{kz}e^{kd}}{e^{kd}} = e^{kd}$

Το πεδίο ταχύτητας στα βαθιά είναι έτσι:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= a\omega e^{kz}\sin(\omega t - kx) \\ w &= a\omega e^{kz}\cos(\omega t - kx) \end{aligned}}$$ Εξς. (2θ)

2.4 Μετατοπίσεις σωματιδίων – Συνέχεια

Να αποδειχθεί η κυκλική τροχιά και ότι η ταχύτητα μειώνεται ραγδαία με το βάθος



2.6 Κατανομή Πίεσης

Από εξίσωση Bernoulli Εξ. (1d) έχουμε:

$$p = -\frac{\rho \partial\left(\int u \partial x\right)}{\partial t} - \rho g z + p_o$$

όπου p_o είναι η σταθερά που ασκείται στο $z = 0$, και ο όρος $\rho\left[\frac{u^2+w^2}{2}\right]$ έχει πάλι παραλειφθεί.

$$p = p_o - \rho g z + \frac{\rho \alpha \omega^2}{k}\frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh kd}\sin(\omega t - kx)$$

Όμως: $\frac{\omega^2}{k}\frac{\cosh(kd)}{\sinh(kd)} = g$

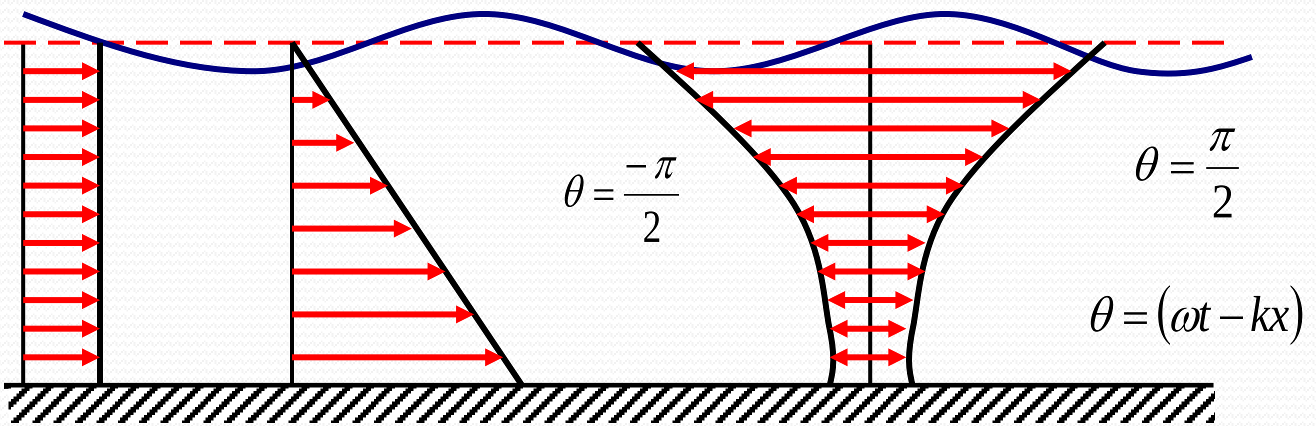
Άρα

$$p = p_o - \rho g z + \rho \alpha g\frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh kd}\sin(\omega t - kx) \qquad \text{Εξς. (2ι)}$$

2.6 Κατανομή Πίεσης – Συνέχεια

$$\boxed{p = p_o - \rho g z + \rho \alpha g \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh kd} \sin(\omega t - kx)}$$ Εξ. (21)

Συνολική πίεση



Σταθερή πίεση

p_o

Υδροστατική πίεση

$-\rho g z$

Δυναμική πίεση

$$\rho \alpha g \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh kd} \sin(\omega t - kx)$$