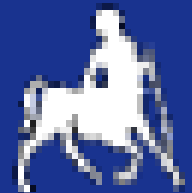


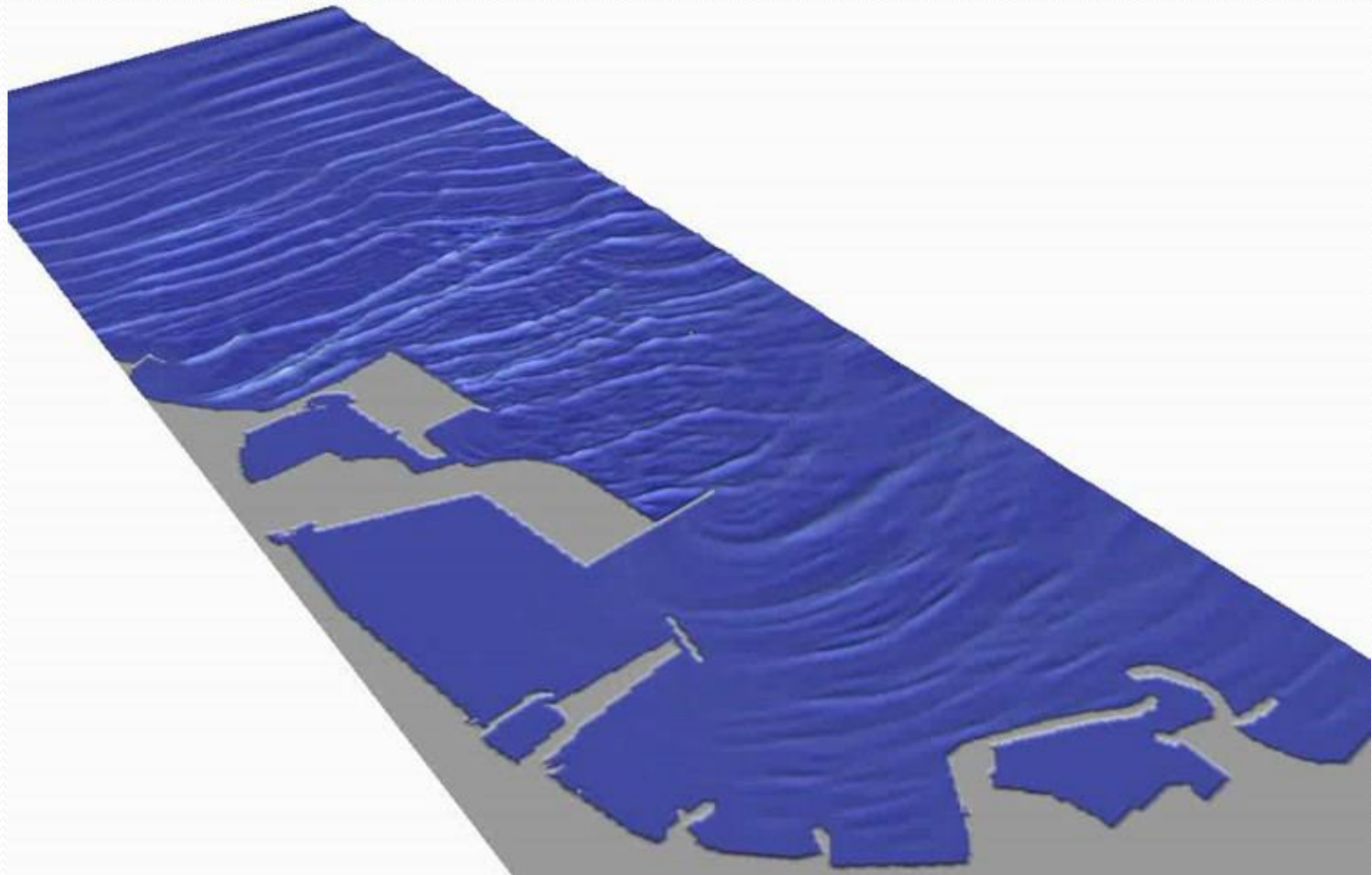
ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗ & ΛΙΜΕΝΙΚΑ ΕΡΓΑ

Σειρά VII:
Αριθμητικά Μοντέλα

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας - Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Δρ. Βασιλική Κατσαρδή



Μοντέλα Boussinesq



Μοντέλα Boussinesq

Η πρώτη ομάδα εξισώσεων εφαρμοσμένη σε μη σταθερό πυθμένα εξήχθη από τον Peregrine (1967) και είναι κοινώς γνωστές ως εξισώσεις Boussinesq.

Η μαθηματική προσομοίωση περιλαμβάνει την ανάπτυξη δισδιάστατου μαθηματικού μοντέλου ροής.

Τέτοια αριθμητικά μοντέλα δομούνται συνήθως με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

↑ Μπορούν να λάβουν υπόψη, τις επιδράσεις ασθενούς μη γραμμικότητας, διασποράς και επεκτείνονται και στην περίπτωση μη κανονικών κυματισμών.

↓ Ο μέγιστος λόγος βάθους προς μήκος κύματος στα βαθιά, για να εφαρμοστεί το μοντέλο $h/\lambda_0 \approx 0.2$

Μοντέλα Boussinesq

Βελτιωμένες εκδόσεις από:

Madsen et al (1991) και Madsen and Sorensen (1992) →
MIKE₂₁ BW

Η διασπορά συχνοτήτων εισάγεται στις εξισώσεις ορμής λαμβάνοντας υπόψη επίδρασεις όρων που περιγράφονται από παραγώγους ανώτερης τάξης των κυματικών μεγεθών.

$$h/\lambda_0 \approx 0.5$$

Το MIKE21 BW επιλύει τις τροποποιημένες εξισώσεις τύπου Boussinesq σε μία ή δύο διαστάσεις σε όρους ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ζ , και κατά το βάθος ολοκληρωμένων συνιστωσών ταχύτητας, P και Q . Στο 1DH BW module γίνεται χρήση μιας μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση των 1-D εξισώσεων.

Εξίσωση συνέχειας:
$$n \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Εξίσωση ορμής κατά x :

$$n \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{P^2}{d} \right)}{\partial x} + \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + n^2 g d \frac{\partial \zeta}{\partial x} - n \left(B + \frac{1}{3} \right) h^2 \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial x \partial x} - \frac{1}{3} h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} - n^2 B g h^2 \frac{\partial w}{\partial x} + n^2 P \left(\alpha + \beta \frac{|P|}{d} \right) + \frac{g P |P|}{d^2 C^2} = 0$$

Με
$$w = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

- Οι δείκτες x , y και t υποδηλώνουν μερικά διαφορικά αναφορικά με το χώρο και το χρόνο αντίστοιχα.
- Οι όροι που εμφανίζονται στις εξισώσεις ερμηνεύονται ως:

P	πυκνότητα ροής κατά x σε $m^3/(m/sec)$
B	σταθερός όρος βελτίωσης της διασποράς ίσος με $1/15$
x	καρτεσιανές συντεταγμένες
t	χρόνος σε sec
d	συνολικό βάθος ($d = h + \zeta$)
h	βάθος μέσης στάθμης ηρεμίας
g	επιτάχυνση βαρύτητας
n	πορώδες
C	αριθμός αντίστασης Chezy σε $m^{1/2}/sec$
α	συντελεστής αντίστασης για στρωτή ροή σε πορώδες μέσο
β	συντελεστής αντίστασης για τυρβώδη ροή σε πορώδες μέσο
ζ	ανύψωση θαλάσσιας επιφάνειας πάνω από σημείο αναφοράς σε m

Ο όρος R_{xx} προσομοιώνει τη θραύση και αντιστοιχεί στην επιπρόσθετη ορμή η οποία προκύπτει από την ανομοιόμορφη κατανομή της ταχύτητας λόγω της παρουσίας του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller) και ορίζεται ως (Madsen et al., 1997):

$$R_{xx} = \frac{\delta}{1 - \delta/d} \left(c_x - \frac{P}{d} \right)^2$$

Εδώ $\delta = \delta(x, y, t)$ είναι το πάχος του επιφανειακού κυλίνδρου και c_x, c_y οι συνιστώσες της ταχύτητας φάσης του.

Σημεία προσοχής

- Βαθυμετρία: σύμφωνα με τις προδιαγραφές του προγράμματος, ή επιλογή κατασκευής με κλίση μεγαλύτερη από 1:3 οδηγεί σε σφάλμα (blow-up).
- Τύπος εξίσωσης: Επιλέγονται οι βελτιωμένες εξισώσεις Boussinesq οι οποίες περιλαμβάνονται στους όρους για τα βαθιά νερά (deep water terms) που επεκτείνουν τις δυνατότητες του μοντέλου για λόγο βάθους μετάδοσης προς μήκους κύματος ως και 0.5. Αυτές περιγράφονται από τους Madsen et al (1991) και Madsen and Sorensen (1992).

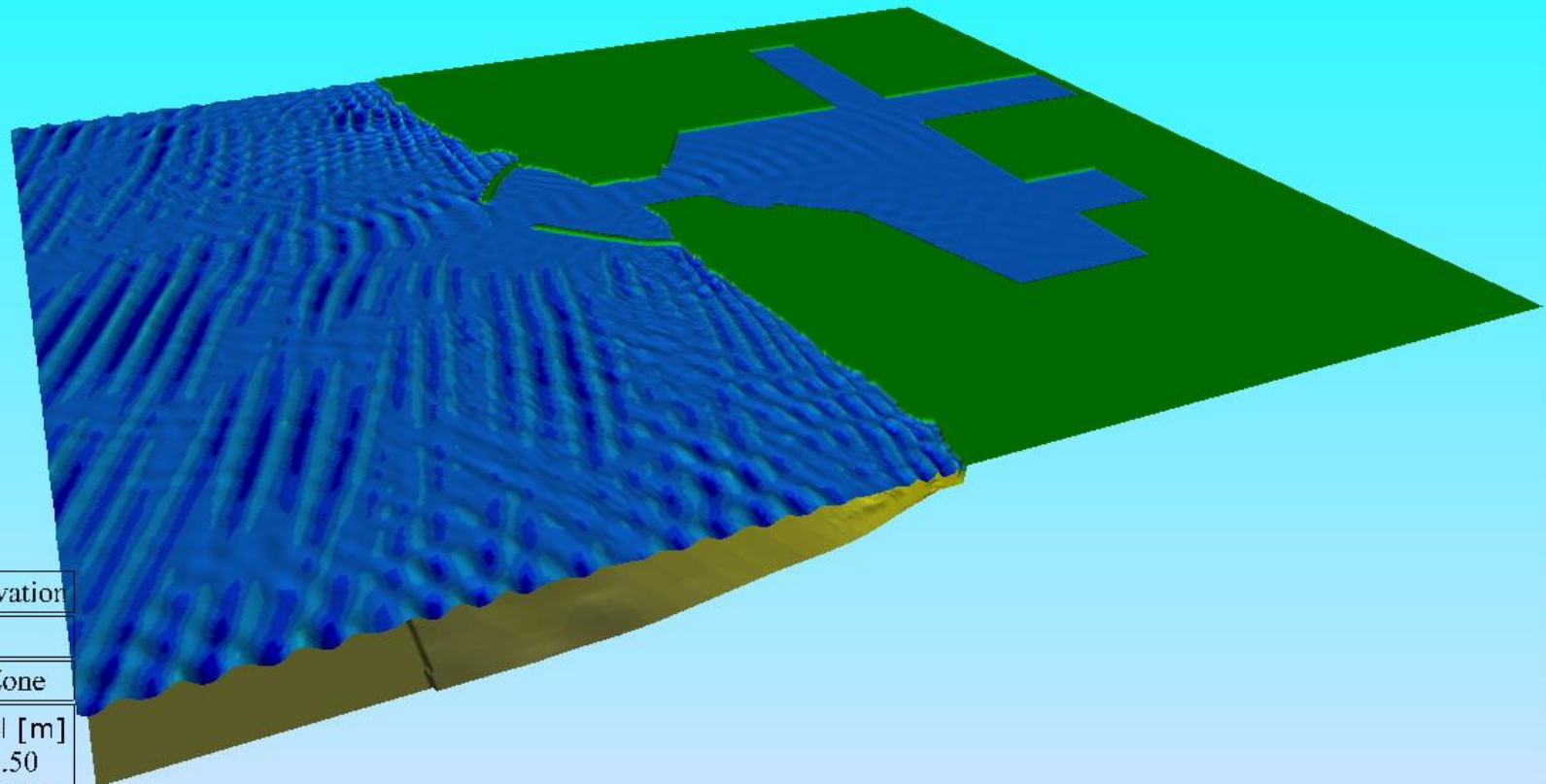
Σημεία προσοχής

- Ταχύτητες: Δεν είναι δυνατή η εξαγωγή κατά το βάθος των τιμών των ταχυτήτων μια και χρησιμοποιούνται στην επίλυση οι κατά το βάθος ολοκληρωμένων συνιστώσες ταχύτητας, P και Q .

Σημεία προσοχής

- Χρόνος προσομοίωσης: Το χρονικό βήμα (time step interval), καθώς και ο αριθμός των χρονικών βημάτων (number of time steps), επιλέγεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο αριθμός Courant να μην υπερβαίνει την τιμή 0.5 για την 1-DH έκδοση. Σημειώνεται ότι ο αριθμός Courant αντιπροσωπεύει τον αριθμό των κελιών που διατρέχει η κυματική πληροφορία σε κάθε χρονικό βήμα και δίνεται από τη σχέση: $C_r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$.
- Τριβή πυθμένα: Για τον καθορισμό του μεγέθους της τριβής του πυθμένα, η επίδραση της οποίας μπορεί να είναι σημαντική για περιπτώσεις όπου τα ύψη κύματος είναι μεγάλα σε σχέση πάντα με το βάθος, καθώς και στις περιπτώσεις όπου γενικότερα προσομοιώνονται πολύ ρηχά νερά, χρησιμοποιήθηκε ο αριθμός Chezy και ο αριθμός Manning (συνδέονται μεταξύ τους με σχέση της μορφής: $M = \frac{C}{h^{1/6}}$, όπου M ο αριθμός Manning, C ο αριθμός Chezy και h το βάθος του νερού).

Wave Disturbance Study Hambantota Seaport, Sri Lanka



Surface Elevation

Land

Drying Zone

Water Level [m]

above 1.50

0.50 to 1.50

-0.50 to 0.50

-1.00 to -0.50

below -1.00

Offshore Swell Waves:
Significant Wave Height = 2.0m
Peak Wave Period = 11.0s
Wave Direction = 200deg.N.

01/01/90 12:12:28

Μοντέλα Boussinesq – examples

- <https://www.youtube.com/watch?v=pGNnX2X8irE>
- <http://www.stepswater.cl/softeng.html>

Μοντέλα Boussinesq Setting -up

- <https://www.youtube.com/watch?v=ZqOj8XkV6tk>

Βελτιωμένες εκδόσεις

- Karambas and Memos (2009).
- Το μοντέλο αυτό υπερτερεί του προηγούμενου καθώς περιγράφει ακριβώς τη διασπορά των συχνοτήτων σε οποιοδήποτε βάθος καταργώντας τον περιορισμό του λόγου $h/\lambda_0 \leq 0.5$.
- Προσομοιώνει με ικανοποιητική ακρίβεια ελαφρώς μη γραμμικούς κυματισμούς με ένα απλό αριθμητικό σχήμα επίλυσης. Συγκεκριμένα, το μοντέλο περιλαμβάνει πέντε όρους στην εξίσωση ορμής, περιέχοντας τους όρους της εξίσωσης μακρών κυματισμών και μόνο έναν όρο διασποράς συχνοτήτων.

Karambas and Memos (2009).

$$\text{Εξίσωση Συνέχειας: } \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial((h + \zeta)U)}{\partial x} = 0$$

$$\text{Εξίσωση Ορμής: } \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{g}{\pi h(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(x - \xi, t) - \zeta(x, t)] \left[\ln \tanh \left(\frac{\pi |\xi|}{4h} \right) \right] d\xi$$

Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ , και η συνιστώσα της μέσης στο βάθος οριζόντιας ταχύτητας με διεύθυνση κάθετη στην ακτή, U , αποτελούν τις εξαρτημένες μεταβλητές του ομοιώματος.

Το αριθμητικό σχήμα επίλυσής του βασίζεται σε ένα απλό σχήμα πεπερασμένων διαφορών 2^{ης} τάξης.

Karambas and Memos (2009).

Για την προσομοίωση της θραύσης χρησιμοποιείται ένα διαφορετικό κριτήριο - Kennedy et al. (1999). Εισάγοντας έναν όρο R_{bx} που μοντελοποιεί την τυρβώδη μίξη και τη διάχυση, στο δεξιό μέρος της εξίσωσης ορμής και δίνεται από :

$$R_{bx} = \frac{1}{h + \zeta} ([\nu((h + \zeta)U)_x]_x)$$

Όπου ν ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας λόγω θραύσης. Οι υπόλοιπες επιλογές (τριβή πυθμένα, όρια κυματογέννησης στο εσωτερικό του αριθμητικού πεδίου, όρια απορρόφησης κυματικής ενέργειας, χρονικά και χωρικά βήματα διακριτοποίησης) κατά την εφαρμογή του μοντέλου είναι παρόμοιες με αυτές που περιγράφηκαν παραπάνω.