

# ΤΥΡΒΗ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΕΙΣ ΡΟΕΣ

Βλέπε Α. Λιακόπουλος: “Μηχανική Ρευστών”, Εκδόσεις Τζιόλα, 2010  
(κεφ. IV, IX,X)

## ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ

- Φυσική περιγραφή τυρβώδους ροής
- Ανάλυση σε χρονικά μέσες τιμές και διακυμάνσεις.  
**Εξισώσεις RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes)**
- Μαθηματικά Ομοιώματα της τύρβης (Μοντέλα τύρβης)

## ΤΥΡΒΗ: ΦΥΣΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ (1)

### A. Μικρο-κλίμακες Kolmogorov

$$l_k = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad u_k = u_\varepsilon = (\nu \varepsilon)^{1/4} \quad \text{και} \quad t_k = \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}$$

### B. Ολοκληρωτική κλίμακα μήκους (G.I. Taylor)

$$\Lambda = \int_0^\infty g(r) dr$$

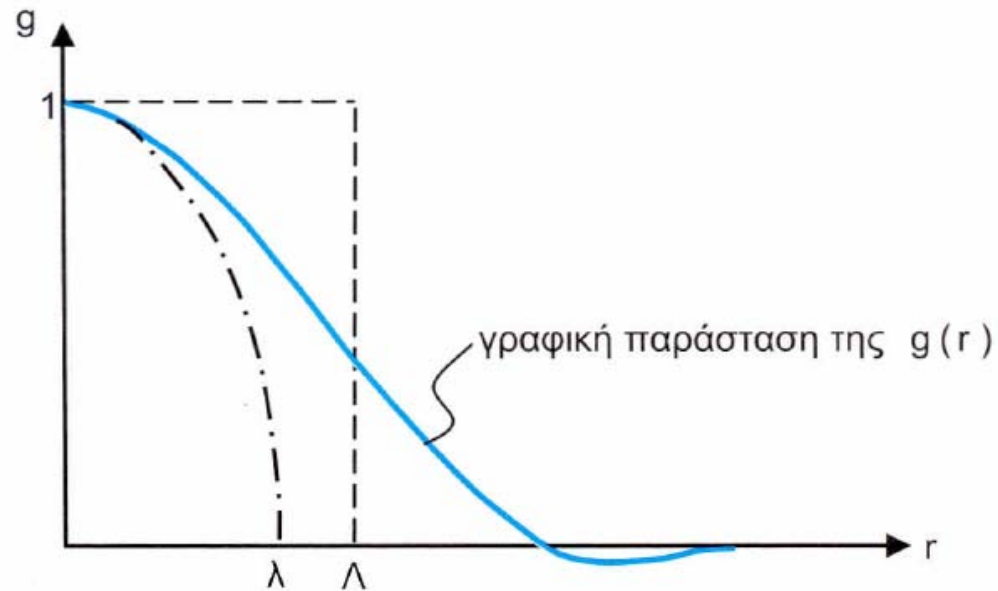
όπου  $g(r)$  είναι η συνάρτηση συσχέτισης ταχύτητας.

### Γ. Μικρο-κλίμακα του G.I. Taylor

$$\lambda^2 = - \frac{2}{\left( \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right)_0} \quad \Leftrightarrow \quad - \frac{2}{\lambda^2} = \left( \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right)_{r=0}$$

## ΤΥΡΒΗ: ΦΥΣΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ (2)

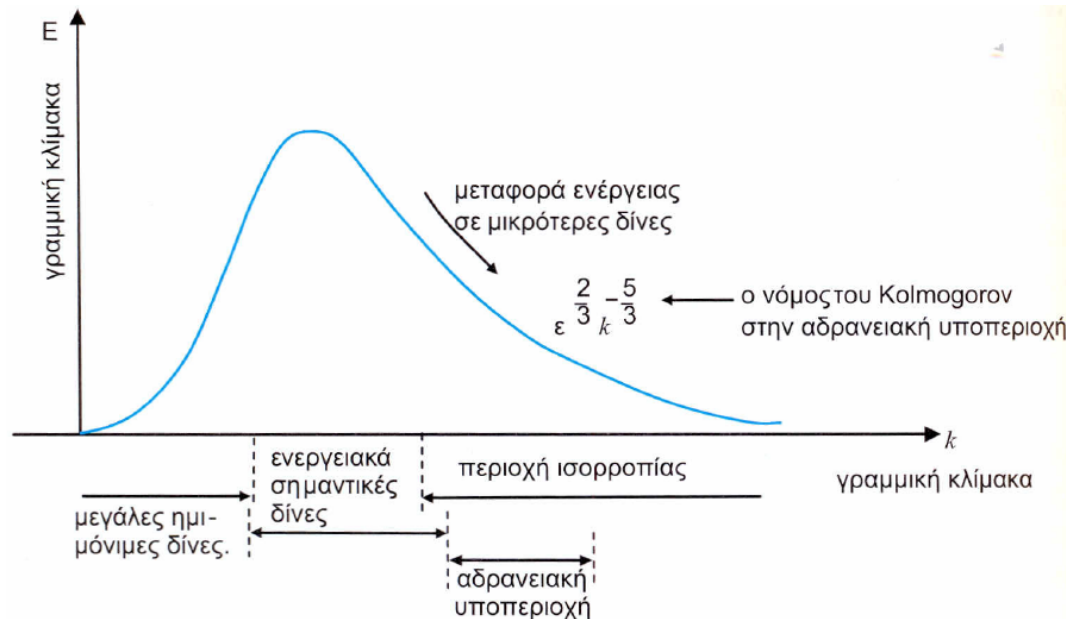
Συνάρτηση συσχέτισης ταχύτητας,  $g(r)$



Στον οριζόντιο άξονα,  $r$  είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων. Οι διακεκομμένες γραμμές παριστάνουν γραφικά: α) την ολοκληρωτική κλίμακα μήκους,  $\Lambda$ , και β) την μικροκλίμακα του Taylor,  $\lambda$ .

# ΤΥΡΒΗ: ΦΥΣΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ (3)

## ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΟ ΦΑΣΜΑ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ



### Νόμος του Kolmogorov

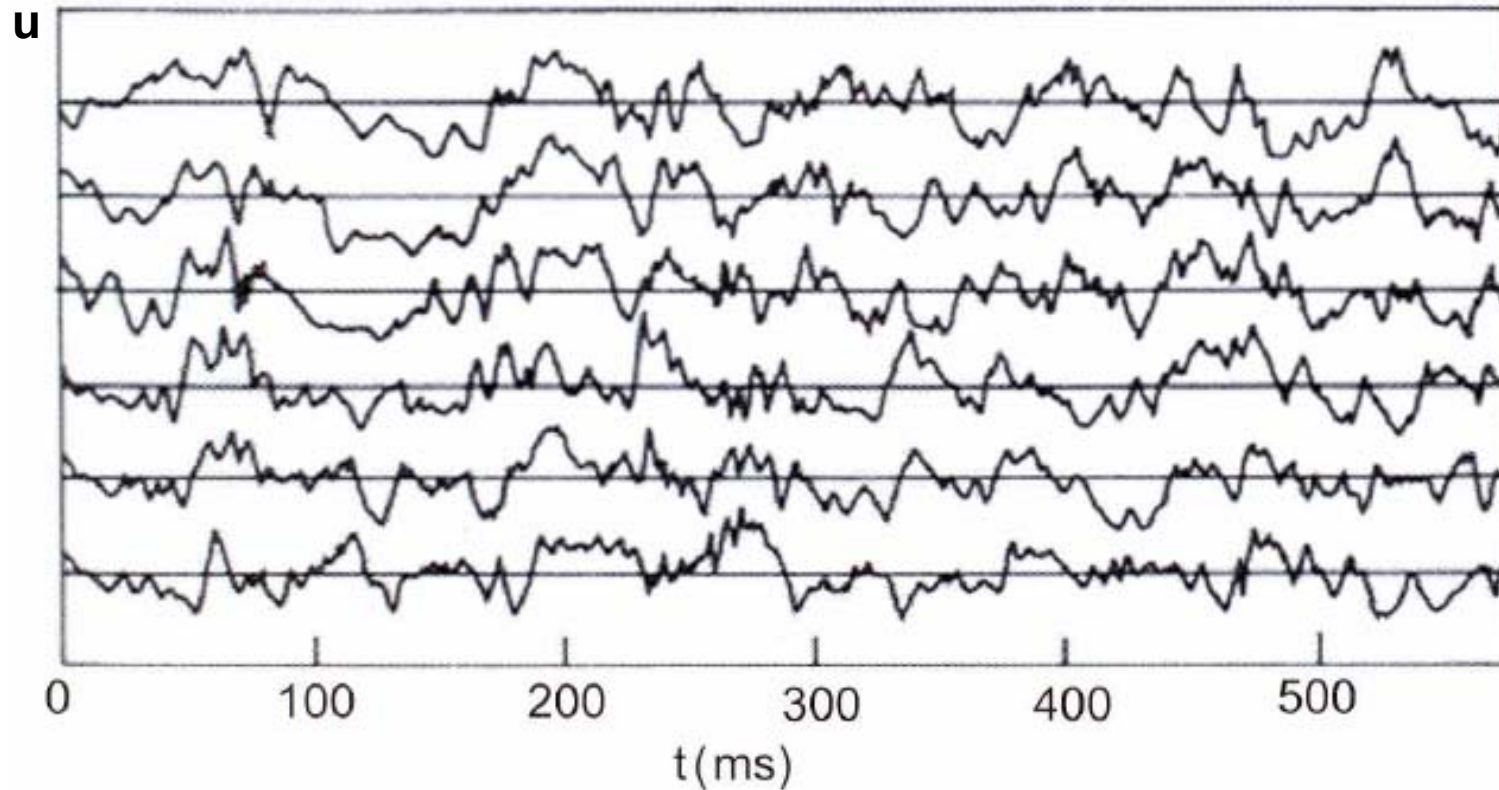
Στην αδρανειακή υποπεριοχή του φάσματος ισχύει

$$E = a \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

Ο κυματάριθμος ισούται με  $2\pi/\text{μήκος κύματος}$  και είναι αντιστρόφως ανάλογος του χαρακτηριστικού μήκους της δίνης. Επομένως, μεγάλες τιμές του  $k$  αντιστοιχούν σε μικρές δίνες.

## ΤΥΡΒΩΔΕΙΣ ΡΟΕΣ: ΤΥΠΙΚΕΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ

Τυπικά γραφήματα της  $x$ -συνιστώσας της ταχύτητας σε τυρβώδες οριακό στρώμα. Κάθε γράφημα αντιστοιχεί στη χρονοσειρά της στιγμιαίας ταχύτητας σε διαφορετικό σημείο μέσα στο οριακό στρώμα.



# ΑΠ'ΕΥΘΕΙΑΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ

## DIRECT NUMERICAL SIMULATION (DNS)

$$N \sim Re^{3/4}$$

όπου  $N$  = αριθμός βαθμών ελευθερίας

$Re$  = αριθμός Reynolds

## ΤΥΡΒΩΔΕΙΣ ΡΟΕΣ

### ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad p = \bar{p} + p' \quad (9.1)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt, \quad \bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v dt, \quad \bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt, \quad \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt \quad (9.2)$$

$$\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = \bar{p}' = 0 \quad (9.3)$$

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T u'^2 dt, \quad \overline{v'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T v'^2 dt, \quad \overline{w'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T w'^2 dt \quad (9.4\alpha)$$

$$\overline{u'^2} \neq 0, \quad \overline{v'^2} \neq 0, \quad \overline{w'^2} \neq 0 \quad (9.4\beta)$$



**Κινητική ενέργεια της τύρβης:**

$$k = \frac{1}{2} \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (9.5)$$

**Ένταση της τύρβης:**

$$\frac{\sqrt{1/3 \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)}}{\overline{U}} \quad (9.6\alpha)$$

όπου

$$\overline{U} = \left( \overline{u}^2 + \overline{v}^2 + \overline{w}^2 \right)^{1/2} \quad (9.6\beta)$$

## Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Οι χρονικά μέσες τιμές  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  ικανοποιούν την εξίσωση

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0} \quad (9.7\alpha)$$

Σχόλιο: Οι διακυμάνσεις  $(u', v', w')$  ικανοποιούν την ίδια εξίσωση

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (9.7\beta)$$

## Διατήρηση της Ορμής: Εξισώσεις Reynolds (ή RANS)

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] = \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] - \rho \left[ \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (9.8\alpha)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] = \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right] - \rho \left[ \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (9.8\beta)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right] = \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right] - \rho \left[ \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (9.8\gamma)$$

## ΟΙ ΤΑΣΕΙΣ REYNOLDS

$$\begin{bmatrix} -\rho \overline{u'^2} & -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{u'w'} \\ -\rho \overline{v'u'} & -\rho \overline{v'^2} & -\rho \overline{v'w'} \\ -\rho \overline{w'u'} & -\rho \overline{w'v'} & -\rho \overline{w'^2} \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ REYNOLDS ΣΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

- **Αξονική συνιστώσα (z – συνιστώσα)**

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_\theta \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} - \overline{\rho v'_z v'_\theta} \right) = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} - \overline{\rho v'^2_z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} - \overline{\rho v'_z v'_r} \right) \quad (9.10)$$

- **Ακτινική συνιστώσα (r – συνιστώσα)**

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} - \frac{\bar{v}_\theta^2}{r} \right) + \left( \mu \frac{\bar{v}_r}{r^2} - \rho \frac{\overline{v'^2_\theta}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} - \overline{\rho v'_r v'_\theta} \right) - \mu \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} - \overline{\rho v'_z v'_r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \overline{\rho v'^2_r} \right) - \quad (9.11)$$

- **Εφαπτομενική συνιστώσα (θ – συνιστώσα)**

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial t} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}_r \bar{v}_\theta}{r} \right) + \left( \mu \frac{\bar{v}_\theta}{r^2} - \rho \frac{\overline{v'_r v'_\theta}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\bar{v}_r}{r} - \overline{\rho v'^2_\theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} - \overline{\rho v'_z v'_\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} - \overline{\rho v'_r v'_\theta} \right) - \quad (9.12)$$

## ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$\rho c_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - q_j \right) \quad (9.13)$$

$$q_j = \rho c_p \left( \overline{u_j \theta'} \right) \quad j = 1, 2, 3 \quad (9.14)$$

Προσοχή: Σύμβαση δεικτών του Αϊνστάιν

## ΤΥΡΒΩΔΕΙΣ ΡΟΕΣ

Εξίσωση διατήρησης μάζας

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

Εξισώσεις Reynolds (διατήρησης ορμής)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$
$$\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$$

Εξισώσεις μεταφοράς των τάσεων Reynolds

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} - \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x_k} + \nu \nabla^2 \tau_{ij}$$
$$\Pi_{ij} \equiv \overline{p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}$$
$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$
$$C_{ijk} \equiv \overline{u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' u'_i \delta_{jk}} + \overline{p' u'_j \delta_{ik}}$$

Πλήρης εξίσωση μεταφοράς του ρυθμού απόσβεσης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας ( $\varepsilon$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = & \nu \nabla^2 \varepsilon - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} - 2\nu \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j}} \\ & - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m}} \right) - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}} \right) - 2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m}} \end{aligned}$$

Πλήρης εξίσωση μεταφοράς της τυρβώδους κινητικής ενέργειας ( $k$ )

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = -\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_k u'_i} + \overline{p' u'_i} \right) + \nu \nabla^2 k$$

**Πηγή:** Annual Review of Fluid Mechanics



# ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΡΟΗΣ

## ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΡΒΗΣ (1)

Στρωτή ροή:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (9.20)$$

Τυρβώδης ροή:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_L + \bar{\tau}_T = (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \quad (9.21)$$

$$\rho(\nu + \nu_T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (9.22)$$

$$\tau_T = -\overline{\rho u'v'} = \rho \nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (9.23)$$

Τυρβώδης ροή

Γενίκευση

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_T \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (9.24)$$

Στρωτή ροή:

$$\nu \sim \ell_m V_m \quad (9.25)$$

Τυρβώδης ροή (κατ' αναλογία) :

$$\nu_T \sim \ell_T V_T \quad (9.26)$$

## ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΡΒΗΣ (2)

### A. ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΗΚΟΥΣ ΑΝΑΜΕΙΞΗΣ

Prandtl (1925)

$$v_T = \ell_m^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (9.27)$$

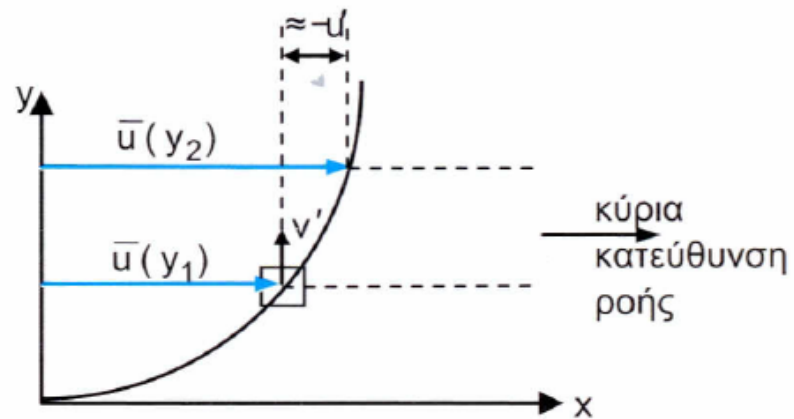
$$\ell_m = \kappa y \quad \text{για} \quad 0 \leq y \leq y_1 \quad (9.28)$$

von Karman (1934)

$$\ell_m = \kappa \left| \frac{\frac{d\bar{u}}{dy}}{\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}} \right| \quad (9.30)$$

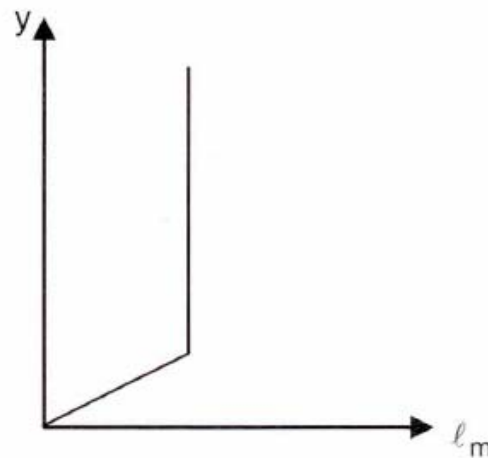
## ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΡΒΗΣ (3)

Σκαρίφημα για την κατανόηση του μηχανισμού ανταλλαγής ορμής σε τυρβώδες οριακό στρώμα



## ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΡΒΗΣ (4)

Κατανομή του μήκους ανάμειξης σε διατομή τυρβώδους οριακού στρώματος



## ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΡΒΗΣ (5)

### Β. Μοντέλο μιας διαφορικής εξίσωσης

$$v_T = c_1 k^{1/2} \Lambda \quad (9.31)$$

$$v_T = c_1 k^{1/2} \ell_m \quad (9.32)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial k}{\partial z} = \Delta + \Pi - \varepsilon \quad (9.33)$$

όπου  $k$  είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας

$\Delta$  = διάχυση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας,

$\Pi$  = παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας,

$\varepsilon$  = απόσβεση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας.

## ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΡΒΗΣ (6)

### C. Μοντέλα δύο διαφορικών εξισώσεων

▪ Το μοντέλο κ- ε της τύρβης  $\Lambda = k^{3/2} / \varepsilon$  (9.34)

α. Καθιερωμένο μοντέλο κ- ε

$$v_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (9.35)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = -\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \nu \nabla^2 k \quad (9.36)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + \nu \nabla^2 \varepsilon \quad (9.37)$$

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3.$$

**β. Τροποποιημένο μοντέλο κ- ε**

$$\boxed{v_T = C_{\mu} f_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon}} \quad (9.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mathbf{k} u_j - \left( \nu + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x_j} \right] = \frac{\mathbf{P}}{\rho} - \varepsilon - \mathbf{D} \quad (9.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \varepsilon u_j - \left( \nu + \frac{v_T}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] = \left( C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\mathbf{P}}{\rho} - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon \right) \frac{\varepsilon}{\mathbf{k}} + \mathbf{E} \quad (9.40)$$

**Πίνακας 9.1:** Ειδικά σύμβολα του Κεφαλαίου IX

<b>Λατινικοί χαρακτήρες</b>	
$k$	Τυρβώδης κινητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας
$k$	Κυματάριθμος = $2\pi /$ (μήκος κύματος)
$\ell_k$	κλίμακα μήκους του Kolmogorov
$t_k$	κλίμακα χρόνου του Kolmogorov
$v_k$	κλίμακα ταχύτητας του Kolmogorov
<b>Ελληνικοί χαρακτήρες</b>	
$a$	Σταθερά Kolmogorov
$\varepsilon$	ρυθμός απόσβεσης της κινητικής ενέργειας της τύρβης ανά μονάδα μάζας
$\kappa$	παγκόσμια σταθερά von Kármán
$\Lambda$	Ολοκληρωτική κλίμακα του Taylor



## Ειδική βιβλιογραφία Τυρβωδών Ροών

Boussinesq, J. 1877. Essai sur la theorie des eaux courantes. Mem. Pres. Par div. savantas a l' Academie Sci., Paris, 23,1-680.

Boussinesq, J. 1897. Theorie de l' ecoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section, 2 vols., Gautier-Villars, Paris.

Bradshaw, P., 1978. Turbulence. Second corrected and updated edition. Springer.

Frisch, U., 1996, Turbulence, Cambridge University Press.

Hinze, J. O. 1975. Turbulence, 2nd ed. McGraw-Hill, New York.

Jimenez, J. and Moser, R.D., 2007. What are we learning from simulating wall turbulence? Phil. Trans. R. Soc. A 365, 715-732.

Jones, W.P. and Launder, B.E., 1972. The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 301-314.

Klebanoff, P. 1954. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. NACA TN 3178.

Kolmogorov, A. N. 1941. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 30, 299-303

Landau, L. D. 1944. Turbulence. Dok. Akad. Nauk. SSSR 44(8), 339-42

Mc Comb, W.D., 1992. The Physics of Fluid Turbulence. Clarendon Press, Oxford.

Monin, A. S. and Yaglom, A. M. 1972. Statistical fluid mechanics (2 vol.). MIT Press, Cambridge, Mass.

Prandtl, L. 1925. Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Z. Ang. Math. Mech. 5, 136-7.

Prandtl, L. 1945. Ube rein neues Formelsystem fur die ausgebildete Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Cottingen, Math.-phys. Kl., 6-19.

Reynolds, O. 1883. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Philos. Trans. R. Soc., London 174, 935-82

Reynolds, O. 1894. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. Philos. Trans. R. Soc., London 186, 123-61.

Smagorinsky, J .S. 1963. General circulation experiments with the primitive equations. Mon. Weather Rev. 91, 99-165.

Taylor, G. I. 1915. Eddy motion in the atmosphere. Philos. Trans. R. Soc., London, Ser. A 215, 1-26.

Taylor, G. I. 1923. Diffusion by continuous movements. Proc. London Math. Soc. 20(2) 196-211.

Taylor, G. I. 1935. Statistical theory of turbulence. Parts 1-4 Proc. R. Soc. London, Ser. A 151, 421-78.

Taylor, G. I. 1938. The spectrum of turbulence. Proc. R. Soc. London, Ser. A 164, 476-9.

Tennekes, H. and Lumley, J.L., 1972. A First Course in Turbulence. MIT Press.

Von Karman, Th. and Howarth, L. 1938. On the statistical theory of turbulence. Proc. R. Soc. London, Ser. A. 164, 192-215.

Yakhot V. and Orszag S.A., 1986. Renormalization-Group Analysis of Turbulence. Physical Review Letters, Vol. 57, No. 14, pp. 1722-1724.